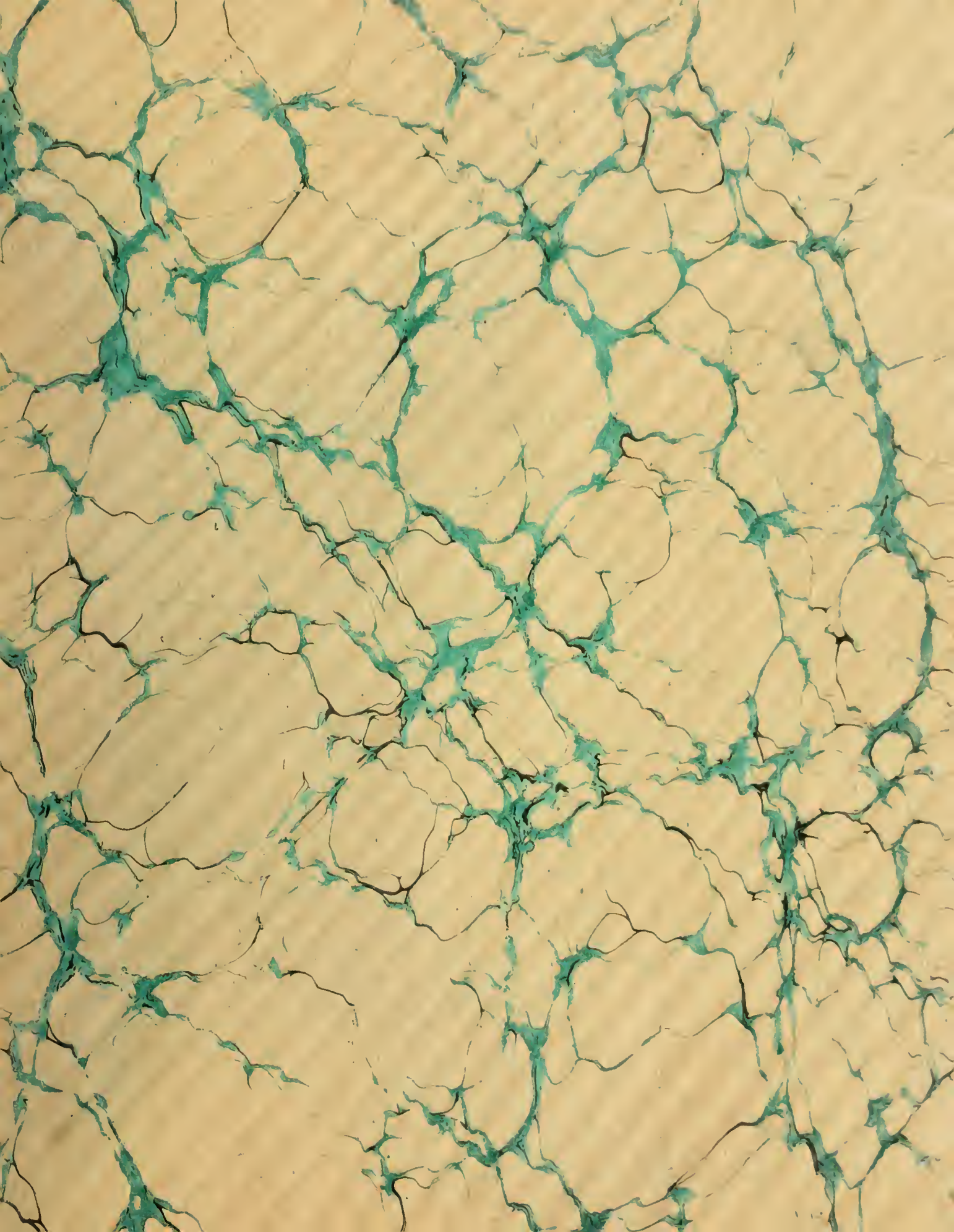


JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes

TOME XII. — ANNÉE 1847.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55

1847

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat12liou

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XII.

Pages.

Sur l'enseignement de la Géométrie supérieure. — Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris. — Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846; par M. *Chasles*. 1

Généralisation d'une propriété de la lemniscate; par M. *William Roberts*. . . . 41

Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes; par M. *C.-W. Borchardt*. 50

Sur les équations algébriques à plusieurs inconnues; par *J. Liouville*. 68

Principes d'un nouveau système de moteurs atmosphériques à forces vives, avec ou sans oscillations, avec ou sans soupape; par M. *Anatole de Caligny*. . . . 73

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *J.-H. Jellett*. 92

Sur la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques; par *J. Liouville*. 95

De la vie de Descartes, et de sa méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences; par M. *C.-G.-J. Jacobi*. (Traduit de l'allemand.) . . 97

Note sur la détermination des axes principaux d'un corps; par M. *R. Lobatto*. . . 117

Note sur le problème des tautochrones; par M. *J. Bertrand*. 121

Note sur quelques points de la théorie analytique des surfaces; par M. *B. Amiot*. 129

Extrait d'une Lettre de M. *Kummer* à M. Liouville. 136

Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^2 + B^2 + C^2 = 0$; par M. *G. Lamé*. 137

Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^n + B^n + C^n = 0$; par M. *G. Lamé*. 172

Sur les nombres complexes qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité; par M. *Kummer*. 185

Théorèmes généraux sur les systèmes de forces et leurs moments; par M. *Chasles*. 213

Note sur une propriété mécanique du cercle; par M. *A. Rispal*. 225

Sur quelques formules du calcul intégral; par M. *A. Cayley* 231

Mémoire sur les surfaces orthogonales; par M. *J.-A. Serret*. 241

Note au sujet d'un Mémoire de M. Chasles; par *J. Liouville*. 255

Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, par M. *William Thomson*. . 256

Note au sujet de l'article précédent; par *J. Liouville*. 265

Pages.

Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface; par *J. Liouville* 291

Note sur la continuité considérée dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin; par M. *Ernest Lamarle* 305

Note sur la théorie des normales à une même surface; par M. *J. Bertrand* . . 343

Expériences sur le moteur hydraulique à flotteur oscillant. — Principes de quelques-unes de ses modifications; par M. *Anatole de Caligny* 347

Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées; par M. *H. Molins* 394

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer; par *J. Liouville*. (Second Mémoire.) 410

Note sur la rectification de quelques courbes; par M. *William Roberts* 445

Note sur quelques intégrales transcendantes; par M. *William Roberts* 449

Démonstration nouvelle et élémentaire de la loi de réciprocité de Legendre, par M. Eisenstein, précédée et suivie de remarques sur d'autres démonstrations qui peuvent être tirées du même principe; par M. *V.-A. Lebesgue* 457

Note sur la stabilité de l'équilibre; par M. *Lejeune-Dirichlet* 474

Extrait d'une Lettre adressée à M. Alfred Serret par M. *William Roberts* 479

Note au sujet de cette Lettre, par M. *Alfred Serret* 480

Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde; par M. *E. Catalan* 483

Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville par M. *Michael Roberts* 491

Note sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique; par M. *William Thomson* 493

Sur le symbole $\binom{a}{b}$ et quelques-unes de ses applications; par M. *V.-A. Lebesgue* . 497

Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier; par M. *J.-A. Serret* 518

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
255,	29,	*au lieu de* tous, *lisez* toutes
295,	3,	*au lieu de* La lettre, *lisez* La première lettre
446,	23,	*au lieu de* que leur somme et leur différence, etc., *lisez* qu'elles sont exprimables par la somme et la différence de deux fonctions elliptiques de première espèce, multipliées respectivement par des coefficients constants.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris.

Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846.

PAR M. CHASLES.

Depuis plus d'un siècle, l'enseignement de la Géométrie se réduit aux premiers principes qu'on appelle les *Éléments*. Ce nom d'*Éléments* semble indiquer les premiers matériaux de l'édifice, les premiers pas ou l'introduction dans la science; et si l'on considère que la Géométrie a pour objet *la mesure et les propriétés de l'étendue*, on sent aussitôt combien elle est vaste et que même le champ qu'elle embrasse n'a pas de limites : car l'*étendue figurée* varie de formes à l'infini, et les propriétés de chacune des figures que présente la nature ou que l'esprit peut imaginer, sont elles-mêmes extrêmement nombreuses, on pourrait même dire inépuisables. Il semblerait donc que l'étude de la Géométrie dût occuper une grande place dans l'enseignement public; et cette opinion se fortifie, quand on considère que cette science, indépendamment de son application à tous les arts de construction, est réputée le fondement des sciences mathématiques, et que les meilleurs penseurs, dans tous les temps, l'ont regardée comme un excellent

exercice de logique, éminemment propre à former de bons esprits. Il en a été ainsi, en effet, chez les Anciens, et chez les Modernes jusque vers le commencement du siècle dernier. Mais, depuis, par l'effet de ces vicissitudes auxquelles les sciences elles-mêmes sont sujettes, cette partie si importante de nos connaissances positives a été négligée, et réduite à ses *Éléments*.

Cependant, quoique privés des secours et des encouragements que procure l'enseignement, plusieurs géomètres, depuis les premières années de ce siècle, ont cultivé avec prédilection cette Géométrie abandonnée, et lui ont fait faire des progrès notables. On a même commencé, dans plusieurs Universités d'Allemagne et d'Angleterre, à la réintroduire dans les cours publics et dans les thèses ayant pour but l'obtention des grades universitaires.

M. le Ministre de l'Instruction publique, dans sa sollicitude pour toutes les parties de l'enseignement soumis à sa haute direction, a jugé que le temps était venu de combler en France aussi une lacune préjudiciable aux progrès des sciences mathématiques. La Faculté des Sciences consultée a partagé ces vues judicieuses et libérales, et émis le vœu que l'enseignement des Mathématiques supérieures reçût, dans la Faculté, le complément qui lui manquait, et qu'une chaire de *haute Géométrie* y fût immédiatement instituée. Ce projet a reçu la sanction des pouvoirs législatifs.

M. le Ministre m'a fait l'honneur de me confier cet enseignement. Qu'il me soit permis d'exprimer ici combien je suis flatté et reconnaissant de cette haute marque de confiance, surtout quand je considère le mérite éminent des collègues et de l'illustre doyen qui m'ont accueilli avec tant de bonté, et dont il m'est si honorable d'avoir à partager les travaux. Ce sentiment profond me guidera dans tous mes efforts pour que l'enseignement que j'ai mission de fonder réponde aux intentions de la Faculté.

Mais cette tâche si flatteuse, qu'on me permette de le dire dès ce moment, en sollicitant l'indulgence des personnes qui me font l'honneur de m'écouter, cette tâche n'est pas sans difficultés. Car ce ne sont plus les théories, ce n'est plus, pour ainsi dire, la science qu'enseignaient Oronce Finée, Ramus, Roberval, qu'il s'agit de reproduire; il ne peut suffire d'expliquer et de commenter les travaux d'Archi-

mède et d'Apollonius, de Fermat, de Cavaleri, de Pascal, d'Huygens, de Newton, de Maclaurin. Ces ouvrages renferment d'admirables exemples des ressources que procure la Géométrie dans toutes les spéculations de la philosophie naturelle; on y trouve le germe de plusieurs théories: mais ils ne forment pas un ensemble de méthodes qu'on puisse réunir dans un corps de doctrine, et qui suffisent pour initier les jeunes mathématiciens à la connaissance et à la culture de la haute Géométrie. S'ils offrent de magnifiques applications de cette science, ils ne constituent pas un cours de *Géométrie supérieure*. Et d'ailleurs la science a marché; elle s'est enrichie de doctrines nouvelles, en harmonie parfois avec celles de l'Analyse; et c'est sur des bases nouvelles, dont on n'aurait pas eu l'idée il y a un siècle, qu'il faut aujourd'hui fonder ce cours de *Géométrie supérieure*. C'est dans quelques ouvrages modernes, dans des Mémoires épars dans les recueils scientifiques, qu'il faut chercher le germe et les éléments des théories et des méthodes propres à former le corps de doctrine que nous avons en vue. Ces théories et ces méthodes une fois déterminées, il faudra les coordonner entre elles, et les soumettre à l'enchaînement logique qui est le caractère propre des sciences mathématiques, et plus particulièrement de la Géométrie. C'est donc une œuvre toute nouvelle à accomplir.

Où trouverons-nous les éléments dispersés de cet enseignement nouveau? Dans l'étude attentive des travaux de nos devanciers. Nous devrons consulter les ouvrages des Grecs, qui se présentent les premiers dans la carrière, qu'ils ont parcourue avec un grand succès: puis suivre les développements de la science chez les Modernes; puis enfin aborder les doctrines du XIXe siècle.

Cette étude rétrospective est indispensable pour atteindre le but qui nous est proposé. Dès aujourd'hui nous jetterons un rapide coup d'œil sur les travaux des géomètres anciens et modernes. Ce sera l'objet de cette première Leçon.

I.

De la Géométrie chez les Grecs.

La Géométrie a été la science de prédilection des Grecs; ils la divi-

saient en trois parties distinctes : la Géométrie élémentaire, qu'ils appelaient simplement les *Éléments ;* la Géométrie pratique ou *Géodésie;* et la Géométrie supérieure, qu'ils appelaient le *lieu résolu*, et qui était un ensemble de questions résolues d'avance et de théories où le géomètre trouvait les ressources nécessaires pour procéder à la démonstration des vérités, et à la solution des problèmes.

C'est cette partie, le *lieu résolu*, que les Modernes ont appelée l'*Analyse géométrique* des Anciens.

Le peu de détails qui nous sont parvenus sur ce point extrêmement intéressant de l'histoire de la science se trouvent dans les *Collections mathématiques* de Pappus, géomètre qui vivait au IVe siècle de notre ère. Ces *Collections mathématiques* étaient un ouvrage en huit livres, dont six seulement nous ont été conservés. On y trouve, avec des détails qui nous font connaître, sur plusieurs points, l'état des mathématiques anciennes, une foule de propositions et de lemmes destinés à servir de commentaires à divers ouvrages, dont la plupart ne sont pas arrivés jusqu'à nous. L'auteur était un géomètre éminent, que Descartes avait en grande estime; c'est dans Pappus et Diophante que le grand philosophe remarquait des traces de cette *lumière de raison* qui, dans l'antiquité, était le caractère des *mathématiques véritables* [*].

Nous trouvons dans les *Collections* de Pappus la nomenclature des Traités qui, faisant suite aux *Éléments*, formaient le *lieu résolu*, c'est-à-dire la Géométrie supérieure. C'étaient : un livre des *Données* d'Euclide; deux livres de la *Section de raison*, d'Apollonius; deux livres de la *Section de l'espace*, et deux des *Attouchements* (*contacts des cercles*), du même; trois livres des *Porismes*, d'Euclide; encore d'Apollonius, deux livres des *Inclinaisons*, deux des *Lieux plans*, et huit des *Sections coniques;* d'Aristée l'ancien, deux livres des *Lieux solides;* d'Euclide encore, deux livres des *Lieux à la surface;* d'Ératosthènes, deux livres des *Moyennes raisons;* enfin, d'Apollonius, deux livres de la *Section déterminée*.

Ces divers ouvrages formaient donc un corps de science, une *Géométrie supérieure*, que les Anciens distinguaient essentiellement des

---

[*] *Règles pour la direction de l'esprit;* 4e règle; t. XI de l'édition de M. Cousin

Éléments. Pappus ajoute que les géomètres, en appliquant les ressources que leur offraient ces ouvrages pour la démonstration des vérités géométriques et la solution des problèmes, suivaient deux méthodes, ou plutôt deux manières de procéder par le raisonnement; savoir : la *synthèse* ou *composition*, et l'*analyse* ou *décomposition*. Ces deux mots : *synthèse* et *analyse*, avaient alors, en mathématiques, leur sens naturel. Mais, comme aujourd'hui nous leur attribuons un sens très-différent, il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici la définition même que donne Pappus, laquelle s'accorde avec celle qu'on trouve aussi dans Euclide.

Par la *synthèse*, on part de vérités connues pour arriver, de conséquence en conséquence, à la vérité que l'on cherche ou que l'on veut démontrer.

Par l'*analyse*, on regarde la chose cherchée, comme si elle était donnée, et l'on marche de conséquence en conséquence, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque vérité connue, et que l'on puisse en conclure que la chose admise comme vraie l'est réellement.

Ces deux manières de procéder en mathématiques ne répondent nullement à la signification actuelle des deux termes *analyse* et *synthèse*, dont le premier caractérise l'emploi du *calcul algébrique*, et le second, la considération seule des propriétés des figures, au moyen du raisonnement naturel.

Les deux méthodes anciennes ne différaient, au fond, que dans le point de départ, les diverses opérations de raisonnement étant les mêmes dans l'une et dans l'autre, mais dans un ordre inverse. On caractérisera avec brièveté et précision ces deux méthodes, en appelant avec Kant, la *synthèse, méthode progressive*, et l'*analyse, méthode régressive* [*].

Celle-ci est, en quelque sorte, une méthode expérimentale, puisqu'elle consiste à prendre une idée à priori, et à vérifier, par une suite de déductions logiques, si cette idée est vraie ou fausse.

---

[*] Nous n'entendons pas faire allusion ici à la distinction fondamentale posée par l'illustre philosophe, entre les jugements *synthétiques* et *analytiques*. Ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

Dans la *synthèse*, au contraire, on ne raisonne que sur des vérités connues, pour arriver, en les composant entre elles, à la proposition qu'on veut démontrer, ou à la chose qu'on veut connaître et déterminer.

Dans les sciences, en général, c'est par la méthode *synthétique* qu'on en expose les principes ou les éléments : c'est ainsi que sont écrits les *Eléments* d'Euclide. Toutefois, on trouve aussi dans cet ouvrage des exemples de la méthode analytique, telle que la méthode appelée *réduction à l'absurde*, quoique dans ce mode de démonstration ce ne soit qu'indirectement, ou par exclusion, qu'on introduit dans le raisonnement la proposition que l'on veut démontrer. On part, comme on sait, de propositions contraires à celle-là, et, en les combinant logiquement avec des propositions connues, on arrive, de conséquence en conséquence, à un résultat faux ou *absurde*, d'où l'on conclut que la première est bien la proposition vraie.

Archimède surtout nous offre des exemples de l'analyse. Ainsi, quand il se propose, dans son *Traité de la Sphère et du Cylindre* (prop. 8), de couper une sphère par un plan, de façon que les deux segments soient entre eux dans un rapport donné, il raisonne sur la grandeur inconnue comme sur celles qui sont données, et il parvient à une proposition qui renferme l'expression de la grandeur cherchée.

Diophante, dans son ouvrage d'Algèbre, qui porte le nom d'*Arithmétique*, fait usage continuellement de la méthode analytique ; car il représente les inconnues de la question et ses puissances par des signes ou des mots, et il les introduit dans le raisonnement pour former, entre ces inconnues et les quantités connues, des égalités d'où il tire la valeur des inconnues.

On conçoit que l'*analyse* et la *synthèse* ont dû être employées concurremment, dans tous les temps, depuis l'origine des sciences mathématiques : aussi, quand Proclus et Diogène Laërce font honneur à Platon, de l'invention de la *méthode analytique*, il faut croire que cela signifie seulement que c'est Platon qui, le premier, a distingué ces deux manières différentes de procéder, suivant que l'on connaît déjà, ou qu'il faut découvrir les liens qui existent entre la vérité que l'on veut démontrer et les principes de la science.

Nous venons de préciser ce qu'il faut entendre par la *synthèse* et

l'*analyse*, dans la Géométrie des Anciens : nous n'aurions que peu de mots à ajouter pour dire comment ces termes ont pris, chez les Modernes, des acceptions très-différentes; mais n'anticipons pas sur la marche de la science : l'origine du nouveau sens des deux mots se rattache à la grande conception de Viete, dont nous aurons bientôt à faire mention.

De ces ouvrages qui, d'après Pappus, formaient comme les éléments d'une Géométrie supérieure, et offraient les ressources nécessaires pour se livrer aux recherches géométriques, trois seulement nous sont parvenus : ce sont les *Données* d'Euclide, les sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius, et le Traité de la *Section de raison*, qui s'est retrouvé en langue arabe. La plupart des autres ont été rétablis par divers géomètres, dans le style de la Géométrie ancienne, d'après le peu de détails que nous en a laissés Pappus.

Cependant on n'est pas fixé sur le sujet du livre des *Lieux à la surface*, d'Euclide. L'auteur y considérait des courbes tracées sur des surfaces courbes; mais quelle était la nature de ces surfaces? les courbes qu'on y traçait étaient-elles nécessairement planes? La brièveté de Pappus nous laisse dans l'incertitude. Je dirai toutefois que quelques indices peuvent porter à croire que, dans le livre des *Lieux à la surface*, Euclide traitait des conoïdes, appelés aujourd'hui surfaces du second degré de révolution, et des sections faites par des plans dans ces surfaces, comme dans le cône.

Mais il est un autre ouvrage d'Euclide bien plus digne de fixer notre attention, et qui a présenté pendant longtemps une énigme indéchiffrable à laquelle se sont attachés, dans les deux derniers siècles, plusieurs des géomètres les plus célèbres; je veux parler du Traité des *Porismes*. Au dire de Pappus, cet ouvrage, où brillait le génie pénétrant d'Euclide, était éminemment utile pour la résolution des problèmes les plus compliqués : c'était, en quelque sorte, l'instrument indispensable des géomètres dans leurs spéculations et leurs recherches.

Jusque vers le milieu du siècle dernier, cette question des porismes n'a présenté qu'une obscurité profonde dans toutes ses parties. Alors seulement R. Simson fit les premiers pas vers la découverte du sens caché des idées de l'auteur, tant en rétablissant la définition du terme *porisme* et surtout la forme particulière des énoncés des propositions

ainsi appelées, qu'en donnant l'explication de six ou sept, sur une trentaine, des énoncés de porismes que Pappus nous a transmis en termes laconiques et obscurs. Cette divination a fait beaucoup d'honneur à R. Simson. Depuis, plusieurs géomètres ont continué de traiter ce sujet si digne d'intérêt.

Cependant un voile épais couvre encore cette doctrine des porismes; car, indépendamment des vingt-quatre énoncés de Pappus, dont on n'a pas donné le sens, il faudrait connaître en outre la cause de la forme inusitée de ces propositions; leur usage particulier; la raison de leur éminente utilité dans l'art du géomètre; la transformation que cette doctrine a probablement subie pour pénétrer, à notre insu, dans nos méthodes modernes. Ces questions mériteront de trouver place dans un enseignement de haute Géométrie, d'autant plus que les théories sur lesquelles semblent rouler ces propositions obscures se rattachent à celles de la Géométrie moderne. Peut-être alors pourrons-nous répandre quelque lumière sur cette grande énigme que nous a léguée l'antiquité.

A défaut des ouvrages originaux des Grecs, qui sont presque tous perdus, c'est dans les *Collections mathématiques* de Pappus, dans cette foule de propositions éparses et sans ordre, parce qu'elles se rattachent à des ouvrages différents auxquels elles doivent servir de commentaires, que nous trouverons les premiers éléments d'une Géométrie supérieure.

On y distingue notamment quelques-unes de ces propositions simples qui sont bien réellement le fondement de la science, car on les retrouve dans les Traités célèbres de Pascal et de Desargues sur les *Coniques*, et plus tard, dans l'ingénieuse et féconde *Théorie des Transversales* de Carnot; ouvrages qui se rapportent essentiellement à une partie des méthodes qui feront la base de notre enseignement.

Nous ne faisons pas ici l'analyse de toutes les ressources que peuvent offrir les *Collections mathématiques* de Pappus; disons cependant que nous aurons à y emprunter quelques beaux exemples de cette manière de démontrer de simples propositions de Géométrie plane par la contemplation des figures à trois dimensions, qui rentre dans certains procédés de la Géométrie moderne. Par exemple, c'est en considérant une surface hélicoïde, que Pappus décrit la spirale d'Archimède

et la quadratrice de Dinostrate, comme projection de certaines courbes à double courbure tracées sur la surface.

Ce n'est pas sans surprise et admiration qu'on rencontre dans le livre de Pappus ces spéculations qu'on croirait sorties de l'école de Monge; nous y trouverons même certaines questions qui prouvent que les Grecs avaient des procédés de Géométrie descriptive analogues et parfois identiques à nos méthodes actuelles. Telle est cette question : « Connaissant les projections horizontales et les hauteurs ver- » ticales de trois points, déterminer la trace et l'inclinaison du plan » qui passe par ces points. »

Nous n'avons point eu à citer jusqu'ici les Traités d'Archimède, où se trouvent cependant des découvertes capitales qui toutes ont été utiles à la science. En voici la raison. Les ouvrages d'Archimède se peuvent distinguer en trois classes :

1°. Les *Traités géométriques*, qui sont : la mesure du cercle, les livres de la sphère et du cylindre, des conoïdes et des sphéroïdes, de la quadrature de la parabole, des hélices et des lemmes;

2°. Les livres *de l'équilibre des plans*, et *des corps portés sur un fluide*, qui contiennent les principes de la Statique et de l'Hydrostatique, mais où domine encore le génie géométrique;

3°. Le livre *De numero arenæ*, où se trouvent des connaissances très-diverses, d'astronomie et d'arithmétique notamment, et qui suffirait seul pour attacher au nom d'Archimède le sceau de l'immortalité.

Les Traités géométriques contiennent des résultats admirables, qui ont créé ou établi sur leurs bases véritables plusieurs parties des sciences; mais ces résultats, par leur nature, ne sont pas d'une application aussi fréquente, dans les spéculations géométriques, que diverses autres théories dont l'usage est pour ainsi dire journalier. C'est pourquoi Pappus ne les a pas compris dans sa nomenclature des Traités propres à guider dans les recherches géométriques.

Si dans la marche suivie par Archimède pour arriver à ses belles découvertes, on peut voir le germe ou des applications d'une méthode spéciale susceptible d'extension, c'est surtout dans la méthode d'*exhaustion* (c'est-à-dire d'*épuisement*). Par cette méthode on considère une grandeur, une courbe par exemple, comme une limite de laquelle s'approchent de plus en plus des polygones inscrits et circon-

scrits, dont on multiplie le nombre des côtés, de manière que la différence, qu'on *épuise* en quelque sorte, devienne plus petite qu'une quantité donnée. Les propriétés des polygones, par exemple l'expression de leur périmètre ou de leur surface, indiquent, par la loi de continuité, les propriétés de la courbe; et l'on démontre ensuite celles-ci en toute rigueur, par le raisonnement *à l'absurde*.

On peut voir ici le germe des méthodes infinitésimales, ou du moins un procédé ingénieux qui ne leur est pas étranger. Mais ces méthodes, qui reposent aujourd'hui sur des principes rigoureux, et qui sont, dans ces questions d'Archimède, d'une application immédiate et élémentaire, ont remplacé celles du géomètre de Syracuse. On conçoit donc que dans les principes de la Géométrie supérieure que nous avons ici en vue, de même que dans un aperçu de l'origine et du développement des méthodes qui se rattachent à ces principes, les beaux théorèmes d'Archimède n'occupent pas la place que leur grande renommée semblerait, au premier abord, leur assigner.

Quelques développements vont faire comprendre plus complétement notre pensée sur cette partie de la Géométrie qui doit représenter l'*Analyse géométrique* des Anciens et constituer les éléments de la *Géométrie supérieure*.

La Géométrie se définit la science qui a pour objet *la mesure et les propriétés de l'étendue figurée*. Cette définition indique deux divisions principales de la science. Aussi les divers travaux des géomètres diffèrent par leur nature, et donnent lieu d'eux-mêmes à cette distinction. Les uns se rapportent à la *mesure*, c'est-à-dire à l'expression de la longueur des lignes, de l'étendue des surfaces, du volume des corps. La détermination des centres de gravité, et beaucoup d'autres questions qui se présentent dans les sciences physico-mathématiques, sont du même genre. C'est à de telles questions que se rapporte spécialement la Géométrie d'Archimède. Ce sont ces questions, comme nous venons de le dire, qu'on traite aujourd'hui par les méthodes infinitésimales.

Les autres recherches mathématiques ont pour objet les propriétés résultantes des formes et des positions relatives des figures, propriétés qui comprennent aussi des relations de grandeur, mais qui sont, en général, des relations de segments rectilignes, et qui n'exigent pas l'emploi du calcul infinitésimal. C'est à cette partie de la Géométrie que

se rapportent les ouvrages d'Apollonius, tels que son grand *Traité des Coniques*, et, en général, les Traités sur le *lieu résolu* ou *analyse géométrique* des Anciens. Cette partie est vaste; c'est celle qui doit aujourd'hui constituer spécialement la Géométrie considérée dans l'ensemble des méthodes qui lui sont propres.

Quant à la première partie, qui a pour objet le calcul des grandeurs curvilignes, ce sont les méthodes infinitésimales qui lui conviennent : ce serait rétrograder que de revenir à celles d'Archimède, ou aux méthodes intermédiaires et de transition de Cavaleri, de Pascal, de Grégoire de Saint-Vincent, de Wallis, quelque puissantes qu'elles aient été entre les mains de ces grands géomètres. Et, d'ailleurs, l'emploi des méthodes infinitésimales n'implique pas l'abandon des méthodes géométriques pour le calcul algébrique des Modernes; loin de là : ce sont précisément les questions de Géométrie qui ont donné naissance à ces méthodes, dans les travaux de Fermat, comme dans ceux de Leibnitz et de Newton.

Mais il ne faut pas croire que, par la distinction que nous venons d'établir, nous scindions la Géométrie en deux parties pour n'en attribuer qu'une à la Géométrie moderne, et diminuer ainsi le domaine de la science que les Grecs nous ont transmise. Au contraire, cette Géométrie des propriétés des figures est d'une application nécessaire et constante dans la Géométrie des mesures. Celle-ci ne saurait procéder seule; il est aisé de le concevoir. On y décompose les figures (lignes, surfaces, ou volumes) dans leurs parties élémentaires qu'on appelle infiniment petites, et ce sont ces éléments dont on considère les propriétés, soit pour les comparer entre eux, soit pour en faire la sommation. Or, de même qu'en analyse le succès, dans les questions de cette nature, dépend du choix des variables, il dépend ici de la forme et des propriétés des éléments, c'est-à-dire de la manière dont on a décomposé la figure : c'est ce mode de décomposition qui constitue la question géométrique, et il exige essentiellement la connaissance des propriétés de la figure, et souvent des propriétés les plus intimes et les plus cachées [*]. On retombe donc sur cette partie de la Géométrie

[*] C'est ce qui a fait dire à Wallis : Cycloidis sic in partes suas resolutionem, se-

qui forme l'*Analyse géométrique* des Anciens, et qui doit être la base de notre Géométrie supérieure.

Ainsi, par exemple, dans le célèbre problème de l'attraction des ellipsoïdes sur des points extérieurs, qui a offert pendant longtemps des difficultés aux méthodes fondées sur le calcul, la difficulté géométrique consistait seulement dans la découverte de quelques propriétés qui fissent connaître le mode convenable de décomposition de l'ellipsoïde en ses éléments : ce sont ces propriétés que Maclaurin eut le bonheur de découvrir, du moins pour certains cas de la question.

On conçoit donc bien comment cette partie de la Géométrie, qui se rapporte plus spécialement aux propriétés des figures, est aussi celle qui doit conduire au calcul de leurs mesures, et qu'il n'y a, au fond, qu'une Géométrie générale.

Néanmoins il y avait lieu de distinguer les deux genres de questions qui forment le domaine de cette Géométrie générale.

Ces considérations montrent combien est incomplète et dénuée de justesse, cette définition qu'on trouve dans quelques ouvrages, savoir, que *la Géométrie est la science qui a pour objet la* MESURE *de l'étendue*. On serait tenté de croire que cette définition nous vient de quelques arpenteurs romains, si elle ne remonte pas aux Égyptiens, qui, selon la tradition historique ou fabuleuse, auraient créé cette science, pour retrouver l'étendue primitive de leurs terres après les inondations du Nil. Toutefois, l'origine de la distinction que nous venons d'établir se peut apercevoir dans Aristote, qui regarde les mathématiques comme ayant pour objet adéquat *l'ordre* et *la proportion*. C'est aussi l'idée de Descartes, et l'on n'est pas surpris d'avoir à citer, à la suite de ces deux grands philosophes de l'antiquité et des temps modernes, le célèbre auteur de la doctrine des Couples, que ses recherches sur la théorie des nombres ont conduit à cette définition d'un sens philosophique si profond.

Un des beaux monuments de la Géométrie des Anciens, l'une de ses plus magnifiques applications, est le grand Traité d'Astronomie de

---

cundum ipsius *Anatomiam veram*, ostendi.... Sic ego distribuo semi-cycloidem, *non ut Lanius, sed ut Anatomista*, in semi-circulum....

Ptolémée, appelé par l'auteur *Syntaxe mathématique*, expression fort juste, que les Arabes, dans leur admiration, ont remplacée par celle d'*Almageste* (le très-grand). On a souvent cité dans cet ouvrage les principes et les applications de la Trigonométrie plane et sphérique; la construction des cordes des arcs de cercle; quelques théorèmes qui, chez les Modernes, ont fait la base de la théorie des transversales; la détermination du lieu des stations des planètes, l'une des plus belles questions de la Géométrie ancienne, que Ptolémée attribue à Apollonius : mais, considéré sous un point de vue plus général, l'Almageste constitue, dans son ensemble, la solution d'un grand problème de Géométrie, à savoir, de représenter, par une combinaison de mouvements circulaires et de mouvements uniformes, tous les phénomènes du mouvement des corps célestes. Ce fut Platon qui posa ce principe des mouvements célestes, adopté par Aristote et par tous les philosophes grecs, dont il flattait l'esprit de système et de généralisation.

L'Astronomie orientale, mère de l'Astronomie grecque, semble prouver, par les différences essentielles qu'elle présente avec celle-ci, que c'est ce grand problème qui marque le véritable but des efforts d'Hipparque et Ptolémée, et qui fait le caractère propre de leur astronomie.

Les Tables du mouvement des astres, que les Grecs ont dû recevoir des Chaldéens avec leurs observations de dix-neuf siècles consécutifs, étaient fondées, si je ne m'abuse, sur des expressions empiriques analogues aux formules qui ont été longtemps en usage chez les Modernes; et quand Ptolémée dit qu'Hipparque a représenté par un épicycle le mouvement du soleil et la première inégalité de la lune, mais que ses efforts ont échoué à l'égard de la seconde inégalité et à l'égard des planètes, cela ne doit pas signifier qu'il n'existait point de Tables du soleil avant Hipparque, et que ce grand astronome n'a connu ni la loi numérique de l'évection lunaire, ni celle du mouvement des planètes. Non, ce ne peut être là ce qu'a voulu dire Ptolémée; cette interprétation fait naître trop de difficultés dans l'histoire de l'Astronomie. Mais il a voulu dire qu'Hipparque n'avait fait que les premiers pas dans le grand problème posé par Platon, et que lui, Ptolémée, a surmonté les difficultés géométriques qui avaient arrêté ses devanciers.

Si le principe, ou plutôt le préjugé des Grecs, sur les mouvements

célestes, après avoir régné vingt siècles et imposé une loi inflexible à Copernic lui-même, a été mis au néant par les immortels travaux de Kepler, le grand ouvrage de Ptolémée n'en conserve pas moins son intérêt au point de vue géométrique. Mais c'est un de ces ouvrages d'une lecture longue et pénible dont il serait bien utile qu'on eût des analyses précises et philosophiques, qui peut-être sont trop rares aujourd'hui. Les jeunes géomètres préfèrent naturellement les recherches de découvertes aux recherches rétrospectives; celles-là seules assurent les progrès et le développement de la science. Cependant, que mes jeunes auditeurs de l'École normale me permettent de leur dire, dès ce moment, que, parmi les ouvrages du passé, il peut en être dont l'appréciation intelligente les conduirait à des travaux dignes de prendre rang dans les fastes de la science.

J'ose espérer qu'on ne regardera pas comme une digression étrangère à mon sujet, ces considérations sur l'Almageste de Ptolémée, si elles montrent sous quel rapport cette belle composition nous présente une œuvre de pure Géométrie, et surtout quand nous aurons vu bientôt l'analogie qu'elle nous offre, à cet égard, avec le grand ouvrage de Newton, qui est aussi une œuvre de pure Géométrie.

II.

De la Géométrie au Moyen âge et chez les Modernes.

Dans l'état actuel de nos connaissances historiques, nous pourrions passer rapidement de la Géométrie des Grecs aux temps modernes. Toutefois, nous devons payer un juste tribut de reconnaissance aux Arabes, qui, après le déclin de l'école d'Alexandrie, et quand l'Occident était plongé pour longtemps encore dans la barbarie et l'ignorance, ont recueilli avec ardeur et intelligence les débris des sciences grecques et les connaissances orientales, qu'ils nous ont transmises vers le XIIe siècle. Leurs ouvrages ont été le modèle de tous les ouvrages européens, depuis cette époque et longtemps encore après le XVe siècle, qui marque la renaissance des lettres et de la civilisation en Europe. Mais ce n'est pas toujours dans leur état de pureté et d'abstraction, que les Mathématiques grecques nous ont été transmises par les Arabes. Ceux-ci n'avaient point recueilli les seuls ouvrages grecs;

ils avaient puisé à un autre foyer de lumières, à la source orientale; leurs connaissances ont été un mélange des connaissances grecques et des connaissances hindoues, qui avaient leur caractère particulier. Les Grecs étaient surtout géomètres; ce n'est que très-tard que l'on trouve chez eux le Traité d'Algèbre de Diophante: leur Géométrie était pure, sans mélange de calcul, et leur goût pour cette partie fondamentale des sciences mathématiques se manifeste non-seulement dans les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, mais encore, comme je l'ai dit ci-dessus, dans leurs ouvrages d'astronomie; car tout y est géométrique, et les Tables des mouvements célestes ne sont elles-mêmes que l'expression numérique de constructions géométriques. Chez les Hindous, au contraire, et chez les Persans, l'Algèbre paraît être la science la plus cultivée: les théories algébriques s'y trouvent dans une perfection surprenante et qui les distingue des méthodes de Diophante; enfin le génie du calcul se trouve même dans leur Géométrie, et je crois pouvoir dire aussi dans leur Astronomie. Les Arabes ont recueilli avec le même soin et la même avidité toutes ces connaissances d'origine différente, et leurs ouvrages ont porté l'empreinte de ces éléments divers, qui, en réagissant les uns sur les autres, enlevaient aux différentes parties de la science leur pureté naturelle. C'est dans cet état que les Arabes nous ont transmis leurs connaissances: aussi ne trouve-t-on pas, dans nos ouvrages du XVIe siècle, la distinction que les Grecs avaient établie entre les différentes parties des Mathématiques; au contraire, toutes sont réunies et confondues, pêle-mêle pour ainsi dire, dans le même livre: l'Algèbre en est la partie principale et y fait une sorte d'introduction à la Géométrie. Dans celle-ci, la partie pratique, que les Grecs appelaient la Géodésie, se trouve mêlée aux *Éléments*, et y tient la plus grande place. Enfin les propositions de Géométrie n'ont plus le caractère abstrait de la Géométrie grecque; c'est presque toujours sur des données numériques qu'elles sont démontrées.

Que l'on ne croie pas que mes observations impliquent ici la moindre critique: les Arabes ont fait ce que, dans leur brillante, mais trop courte carrière scientifique, on pouvait légitimement attendre d'eux; et nous n'avons qu'un regret à exprimer, c'est que leurs ouvrages ne nous soient encore connus que très-imparfaitement. Au

XIIe siècle, ce sont les ouvrages élémentaires dans chaque partie, que les traducteurs nous ont transmis; plusieurs raisons expliquent ce choix naturel. Depuis, cet amour désintéressé des sciences, qui avait conduit chez les Musulmans Adelard de Bath, Rodolphe de Bruges, Gérard de Crémone, Léonard de Pise, s'est éteint, et les Modernes, confiants sans doute dans leurs propres forces et leurs grandes découvertes, ont négligé d'explorer les sources arabes, bien qu'on pût espérer d'y trouver tout à la fois d'utiles documents sur des ouvrages grecs qui ne nous sont point parvenus, et sur les anciennes connaissances orientales, telles que l'astronomie indienne et chaldéenne, dont l'histoire est encore si obscure. Il faut espérer que ces sources arabes, si riches et aujourd'hui faciles à explorer, même sans aller au loin, ne tarderont pas à piquer vivement la curiosité, et à exciter le zèle des érudits et des orientalistes. Déjà, nous le savons, ce sujet de recherches a fixé l'attention de M. le Ministre de l'Instruction publique; l'Europe savante lui saura gré de cette sollicitude éclairée.

A l'état de confusion qui caractérise les ouvrages du XVIe siècle, a bientôt succédé une rénovation générale des sciences mathématiques, qui leur a donné, avec le caractère d'abstraction et de généralité qui leur convient, des ressources puissantes dont les Grecs n'avaient point eu l'idée. Viète, Descartes et Fermat sont les premiers et les principaux auteurs de cette grande révolution.

L'Algèbre, avons-nous dit, était fort cultivée à l'imitation des Arabes: plusieurs géomètres italiens, Scipion Ferro, Cardan, Tartalea, Ferrari y firent même des progrès notables, en résolvant les équations du troisième et du quatrième degré; mais la constitution de cet art le rendait peu susceptible de plus grands développements et d'applications bien importantes. En effet, les opérations alors ne s'y faisaient que sur des nombres; l'inconnue seule et ses puissances étaient représentées par des signes (des mots ou des lettres), comme dans Diophante et chez les Arabes; on ne figurait point d'opérations sur ces signes eux-mêmes: le produit de deux quantités exprimées par des lettres était représenté par une troisième lettre.

On conçoit que cet état restreint et d'imperfection ne constituait pas la science algébrique de nos jours, dont la puissance réside dans ces combinaisons des signes eux-mêmes, qui suppléent au raisonnement

d'intuition, et conduisent, par une voie mystérieuse, aux résultats désirés.

Ce fut Viète qui créa cette science des symboles et apprit à les soumettre à toutes les opérations que l'on était accoutumé d'exécuter sur des nombres. C'est cette idée féconde qui a fait de l'Algèbre un instrument universel des mathématiques. Viète avait appelé cette science, qu'il créait, *logistique spécieuse*, *calcul des symboles* (species), et il la regardait comme l'introduction à l'*art analytique* des Anciens, c'est-à-dire à l'art de résoudre tous les problèmes, *nullum non problema solvere*. En effet, elle facilitait merveilleusement la mise en pratique de la *méthode analytique* de Platon, puisqu'elle permettait de faire indistinctement sur les quantités connues et inconnues, les mêmes opérations arithmétiques, et d'introduire toutes ces quantités, au même titre, dans les équations et dans le raisonnement.

Mais, par la raison que cette *algèbre* ou *logistique spécieuse* devenait l'instrument propre à la marche *analytique*, les géomètres ont fini par l'appeler elle-même *analyse*. Voilà comment ce terme *analyse* a changé de sens, et signifie aujourd'hui l'emploi du *calcul algébrique*.

Par une conséquence naturelle, on a appelé *synthèse* la Géométrie cultivée à la manière des Anciens, parce qu'on y raisonne directement sur les propriétés des figures, sans faire usage des notations et des transformations algébriques.

Cependant on a donné encore une troisième acception aux mots *analyse* et *synthèse*, qui est venue accroître la confusion que pouvait causer déjà le double sens dont il vient d'être question.

Dans les ouvrages des Anciens, en général, les théorèmes sont parfaitement distincts, et l'énoncé de chacun précède sa démonstration, de sorte qu'il reste peu de traces de la marche d'invention que l'auteur a suivie dans la recherche et la découverte de ses propositions; les fils qui primitivement ont uni ces différentes propositions dans leur ordre naturel de déduction, sont rompus. C'est ainsi que sont composés les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, et, chez les Modernes, le grand ouvrage des *Principes* de Newton. Par cette raison on a pensé, parfois, que ce mode d'exposition était plus conforme à l'esprit de la *méthode synthétique*, qu'il la constituait même; et l'on en a conclu, réciproquement, qu'un ouvrage où les propositions sont

exposées suivant l'ordre des déductions rationnelles qui y ont conduit l'auteur, n'est pas *synthétique*, mais bien *analytique* [*].

D'où résulte, dans l'esprit de quelques personnes, que la *synthèse* peut être une méthode d'exposition, et que l'*analyse* est la méthode de recherche ou d'invention. Erreur grave; car, au contraire, un ouvrage écrit suivant la méthode de recherche ou d'invention, est presque toujours exclusivement *synthétique*, puisque toutes les fois qu'on part de principes connus, et qu'en les combinant entre eux on arrive à une nouvelle proposition, il y a *synthèse*.

L'équivoque qui peut résulter de ces acceptions diverses des termes *synthèse* et *analyse*, en mathématiques, cause parfois quelque embarras et de l'obscurité dans le langage. Il est à regretter que l'expression de *logistique*, employée si convenablement par Viète et longtemps après lui, n'ait pas été conservée.

Il n'est nullement besoin de dire qu'il ne faut pas confondre l'*Analyse géométrique* des Anciens avec la *Géométrie analytique* des Modernes; la première est précisément ce que l'on appelle aujourd'hui *synthèse*, par opposition à la *Géométrie analytique*.

Cette *Géométrie analytique*, dont il n'existe point de traces chez les Anciens, est la grande conception de Descartes; elle a bientôt changé la face des sciences mathématiques, et peut être regardée encore aujourd'hui comme l'invention qui a le plus contribué à leurs progrès. C'est l'art de représenter les lignes et les surfaces courbes par des équations algébriques; application magnifique de l'instrument analytique que Viète venait de créer, et qui ne doit pas être confondue avec le simple usage de l'Algèbre dans quelques questions de Géométrie.

Descartes appela simplement *la Géométrie* le livre où il exposa cette grande idée, dont il montra succinctement et avec clarté les conséquences sans bornes.

Dans le développement de cette méthode se trouvent plusieurs inventions algébriques, telle que la méthode si féconde des coefficients indé-

---

[*] Crouzas : « On a donné le nom de *méthode analytique* à celle qui suit, en enseignant, l'ordre même de l'invention; et la méthode opposée a reçu celui de *synthétique*. »

terminés, et cette célèbre règle des signes *de Descartes*, ainsi qu'on l'appelle. Dans les inventions géométriques, on distingue le problème de mener les tangentes à toutes les courbes géométriques. Les Anciens n'avaient mené les tangentes qu'à quelques courbes, en petit nombre, et pour chacune, par des considérations particulières qui ne pouvaient faire naître l'idée d'une solution générale applicable à toutes les courbes. Descartes donna, de deux manières, cette solution générale, du moins pour les courbes qu'il considérait dans sa Géométrie, celles qu'on appelle indistinctement courbes *géométriques* ou *algébriques*.

Les tangentes forment l'élément dont la connaissance est le plus indispensable dans la théorie des courbes, et celui qui devait conduire au calcul infinitésimal. Aussi Descartes, inspiré par son sens profondément mathématique, dit-il, dans un passage de ses Lettres, que c'est le problème « qu'il a le plus désiré de connaître. »

On sait que la *Géométrie*, le *Traité des météores* et la *Dioptrique* parurent ensemble, en 1637, à la suite du *Discours de la Méthode*, et comme simples essais des règles que le grand philosophe venait de donner pour la recherche de la vérité.

Dans le même temps, Fermat, l'un des plus puissants génies que nous présente l'histoire des productions de l'esprit humain, résolut aussi le problème général des tangentes. Sa solution, dont le principe s'étend aux courbes mécaniques ou transcendantes, comme aux courbes géométriques de Descartes, reposait sur des considérations originales qui impliquaient le *calcul de l'infini*, et que les géomètres les plus illustres, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Fourier, ont regardées comme la véritable origine des méthodes infinitésimales, qui, un demi-siècle plus tard, dans les mains de Leibnitz et de Newton, ont complété la grande œuvre de Descartes [*].

Fermat cultiva aussi l'*analyse géométrique*, et laissa, entre autres,

---

[*] On peut dire que Leibnitz lui-même n'eût point contredit ce jugement; car on lit, dans une de ses Lettres à Wallis, ce passage où respire la sincérité qui convenait à son grand esprit, à sa noble intelligence : *Quod calculum differentialem attinet; fateor multa ei esse communia cum iis quæ et Tibi et* Fermatio *aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata; fortasse tamen res multo longius nunc provecta est, ut iam effici possint quæ antea etiam summis Geometris clausa videbantur. Hugenio ipso*

un livre des Lieux plans, à l'instar d'Apollonius; un Traité du Contact des sphères; une courte notice sur les Porismes, dont il promettait de rétablir la doctrine. Malheureusement, Fermat se bornait à communiquer à ses amis ses découvertes, sans vouloir les publier, et elles ne nous sont point toutes parvenues. Ce n'est pas ici le lieu de parler de ses admirables recherches sur la théorie des nombres, qui ont occupé depuis les plus grands géomètres.

Roberval, le rival de Descartes et l'émule de Fermat en plusieurs points, donna aussi une méthode générale des tangentes, fondée sur la composition des mouvements; principe excellent, mais dont l'application n'était point aussi commune que celle des méthodes de Descartes et de Fermat, parce que la manière dont on considère, en général, la génération des courbes ne s'y prêtait pas. Roberval donna, sous le titre de *Traité des Indivisibles*, une méthode générale pour le calcul des grandeurs curvilignes, la détermination des centres de gravité, etc.; méthode qu'il avait puisée, dit-il, dans une lecture attentive des œuvres d'Archimède, et qui était un acheminement naturel vers les nouveaux calculs. Car, il faut le remarquer, la métaphysique de ces méthodes de transition était la même que dans les méthodes infinitésimales proprement dites; le grand avantage de celles-ci fut dans l'algorithme imaginé par Leibnitz. Roberval ayant tardé à publier sa méthode, dont il faisait usage en secret, dans les luttes difficiles et passionnées où il se trouvait engagé, se laissa devancer par Cavaleri, dont la *Méthode des Indivisibles* eut une grande célébrité et d'illustres sectateurs, Pascal, Torricelli, Schooten, etc. On a de Cavaleri divers autres ouvrages, notamment ses *Exercitationes geometricæ*, en six livres.

---

id agnoscente [*]. — Wallis lui répond : *Quod tuus Calculus differentialis multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius Archimedis; tu pro candore tuo libere profiteris : non tamen est inde minus æstimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota; ita tamen intricata et difficultatis plena, ut sint ea (nostra ætate) reddita multo diluciliora et usibus aptiora.*

[*] On voit, par ces paroles, que Leibnitz reconnaissait, avec une noble sincérité, ce qu'il pouvait devoir à ses devanciers et à ses contemporains, de même qu'il avait su gré à Huygens et à Newton d'avoir cité ses propres découvertes, ainsi qu'il le rappelle lui-même dans un autre passage de ses Œuvres, en ajoutant cette réflexion : *Ita quanto quisque est doctrina excellentior, tanto his sinceritatis, atque humanitatis ostendit.*

dont le dernier contient de nombreuses questions sur cette autre partie de la Géométrie, que nous avons appelée l'*Analyse géométrique* des Anciens.

Pascal, dont le génie géométrique est proverbial, enrichit, dans sa trop courte carrière, toutes les parties des mathématiques. La pénétration avec laquelle il appliqua la méthode des indivisibles aux questions les plus difficiles, le fit toucher de près au calcul intégral. Il sut découvrir de nombreuses propriétés de la cycloïde, cette courbe merveilleuse qui occupait alors tous les esprits.

Sa supériorité ne fut pas moindre dans cette autre partie qu'on pourrait appeler la *Géométrie d'Apollonius*. La généralité de vues qu'il y apportait ne se trouvait encore que dans les conceptions analytiques de Viète et de Descartes, dont il n'eut pas besoin de se servir.

Malheureusement il ne nous reste que quelques indications bien restreintes sur cette partie de ses travaux.

Le plus important, celui qui du moins a eu le plus de retentissement, fut son *Traité des Coniques*, dans lequel il avait suivi une méthode nouvelle, d'une facilité et d'une fécondité alors inconnues, et telles, comme nous l'apprend le P. Mersenne, qu'un seul théorème se prêtait à quatre cents corollaires.

Cet ouvrage et ceux de Desargues, qui l'ont précédé de très-peu de temps, donnaient à l'Analyse géométrique des Anciens une marche plus rapide et plus hardie; ils marquent l'origine d'une partie de nos méthodes du XIXe siècle : je vais donc m'y arrêter quelques instants.

Les Anciens avaient considéré les sections coniques dans le cône, ou dans le *solide*, suivant leur expression; c'est-à-dire qu'ils avaient connu ces courbes en coupant par un plan un cône à base circulaire. Des propriétés du cercle qui forme la base, ils avaient conclu une propriété des sections coniques; c'était une relation entre l'ordonnée et les segments que celle-ci fait sur l'axe de la courbe. De cette relation, que nous appelons, en Géométrie analytique, l'*équation de la courbe*, ils déduisaient, par la seule force du raisonnement, les propriétés des sections coniques, sans se servir davantage du cône dans lequel ils avaient d'abord considéré ces courbes.

Desargues, géomètre actif et pénétrant, qui cultivait toutes les parties des sciences et y apportait un esprit de généralisation rare, conçut l'idée d'appliquer aux coniques les propriétés mêmes du cercle qui servait de base au cône, et de simplifier par là la recherche et la démonstration de ces propriétés, souvent pénible dans l'ouvrage d'Apollonius. Il reconnut aussi que, par ce moyen, les démonstrations relatives à l'une des trois courbes s'appliquent d'elles-mêmes aux deux autres, malgré leurs différences de figures : idée profonde et heureuse; car les Anciens distinguaient essentiellement les trois courbes, et employaient des démonstrations différentes. Enfin il découvrit, entre autres, une belle et féconde propriété de ces courbes, celle qu'il appela *Involution de six points*, propriété qui a pris un grand développement dans certaines théories de la Géométrie moderne.

C'est la méthode de Desargues que Pascal a suivie dans plusieurs de ses recherches, notamment dans son *Traité des Coniques*. Il ne nous est parvenu, de ce célèbre Traité, qu'une notice très-succincte de Leibnitz, qui nous fait connaître les titres des six parties qui le composaient. Mais cet ouvrage avait été précédé d'un premier jet, sous le titre d'*Essai pour les coniques*, qui fait partie des deux volumes consacrés, dans l'édition de Bossut, aux recherches mathématiques de Pascal. C'est dans cet *Essai* que se trouve le fameux théorème sur l'hexagone inscrit, que Pascal appelait *hexagramme mystique*. Ce théorème exprime une propriété simple et fort belle de six points quelconques pris sur une conique. Cinq points suffisent pour déterminer la courbe : on conçoit dès lors que cette propriété, relative à un sixième point, servait à décrire la courbe et la définissait complétement; qu'elle devait donc avoir des conséquences innombrables comme l'*équation* dans le système de Descartes.

Dans cet opuscule, Pascal reconnaît ce qu'il doit à Desargues : il dit, au sujet du théorème de l'involution de six points : « Nous » démontrerons la propriété suivante, dont le premier inventeur est » M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps, et » des plus versés aux mathématiques, et, entre autres, aux coni- » ques; dont les Ecrits sur cette matière, quoique en petit nombre, » en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en » recevoir l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que

» j'ai trouvé sur cette matière, à ses Écrits, et que j'ai tâché d'imiter,
» autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet.... La pro-
» priété merveilleuse dont est question est telle ... »

Desargues ne se borna pas aux spéculations des mathématiques pures; il traita de leurs applications aux arts. Il écrivit sur la perspective, la gnomonique et la coupe des pierres; et, en apportant dans toutes ces parties la même supériorité de vues et les mêmes principes de généralisation, il les traita par des méthodes rigoureuses et mathématiques. C'était une innovation véritable : car une partie des règles ou des pratiques que l'on suivait dans ces arts, étaient sans base réelle et souvent fautives : aussi Desargues eut de nombreux détracteurs; la routine et l'ignorance disputèrent le terrain pied à pied, et il fut enjoint au célèbre graveur Bosse de cesser d'enseigner les pratiques de la perspective du sieur Desargues, dans ses leçons à l'Académie de peinture. Pour la coupe des pierres, Desargues offrit de défendre la bonté de ses méthodes contre les attaques de l'architecte Curabelle, par un pari de cent mille livres : le défi fut accepté pour cent pistoles; mais il n'eut pas de suite, parce qu'on ne put s'entendre sur le choix des juges du débat. « Desargues, nous apprend Curabelle,
» voulait s'en rapporter au dire d'excellents géomètres et autres per-
» sonnes savantes et désintéressées, et, en tant qu'il serait de besoin,
» aussi des jurés-maçons de Paris. » « Ce qui fait voir évidemment,
» ajoute Curabelle, que ledit Desargues n'a aucune vérité à déduire
» qui soit soutenable, puisqu'il ne veut pas de vrais experts pour les
» matières en conteste; il ne demande que des gens de sa cabale,
» comme de purs géomètres, lesquels n'ont jamais eu aucune expé-
» rience des règles des pratiques en question, et notamment de la
» coupe des pierres et l'architecture qui est la plus grande partie des
» œuvres de question, et partant ils ne peuvent parler des subjections
» que les divers cas enseignent.... »

J'ai cité ces détails que j'extrais d'une brochure rare et peu connue de Curabelle, parce que rien ne pourrait mieux faire apprécier quel était l'état des arts de construction il y a deux siècles; et qu'ils prouvent bien que ce fut Desargues qui eut le mérite d'introduire, notamment dans la coupe des pierres, les principes rigoureux de la Géométrie, à la place des pratiques empiriques qu'on y suivait alors.

Desargues, malgré divers passages des Lettres de Descartes et de Fermat, qui s'accordent à le montrer comme un géomètre d'un mérite rare, a été fort négligé par les biographes et les historiens des Mathématiques. M. Poncelet, en signalant, le premier, l'esprit généralisateur qui domine dans toutes ses recherches, et les services dont les méthodes de la Géométrie moderne et les arts de construction lui sont redevables, l'a appelé le *Monge* de son siècle. Nous partageons pleinement l'opinion de ce juge si compétent.

Je suis obligé de passer ici sous silence une foule de géomètres qui tiennent une place distinguée dans l'histoire de la science; car ce XVIIe siècle a été peut-être le plus fécond en mathématiciens, et, bien que l'Analyse de Viète et la Géométrie de Dercartes aient enlevé de nombreux disciples aux anciennes méthodes, ce siècle marque une époque des plus glorieuses pour cette partie même des Mathématiques.

Il me suffira de citer Kepler, Huygens et Newton, dont les travaux admirables ont élevé le plus bel édifice dont s'honore l'esprit humain.

Kepler donna une extension considérable aux belles spéculations d'Archimède, en calculant les volumes d'un grand nombre de solides dont les sphéroïdes et les conoïdes du géomètre grec n'étaient que des cas particuliers. Sa méthode, fondée sur l'idée de l'infini, ouvrait un nouveau champ de recherches, et conduisit bientôt à celle des *indivisibles*.

Avec les seules ressources mathématiques dont se servait Ptolémée, et à force de méditations et de calculs longtemps infructueux, Kepler parvint à la connaissance des véritables lois du mouvement des corps célestes; découvertes sublimes qui inspirent pour le génie de l'auteur une admiration égale à l'étendue de leurs conséquences.

Huygens, quoiqu'il sût à fond la méthode de Descartes, resta fidèle à celle des Anciens, où son génie sut triompher des plus grandes difficultés, de celles même, parfois, que Leibnitz et Jacques Bernoulli avaient pu croire être réservées aux méthodes infinitésimales.

Aussi Newton, qui lui donnait le surnom de *grand*, le proclamait « le plus excellent imitateur des Anciens, admirables, suivant lui, » par leur goût et la forme de leurs démonstrations. » Le sentiment de Leibnitz, exprimé dans plusieurs passages de ses œuvres, n'est pas moins explicite. Qu'il nous suffise de citer ces simples paroles: « Huge- » nius nulli Mathematicorum nostri sæculi secundus.... »

Nous ne rappellerons pas ici tous les résultats importants qu'on doit à la sagacité d'Huygens, une séance ne pourrait suffire; ils s'étendent sur toutes les parties des Mathématiques et sur les sciences naturelles qui en dépendent : la Physique, l'Astronomie, la Mécanique. Bornons-nous à rappeler que, dans le seul Traité *de Horologio oscillatorio*, composé par Huygens quand il résidait en France, se trouvent cette théorie des développées, l'une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne, et les lois de la force centrifuge, deux choses dont la connaissance était nécessaire à Newton pour entreprendre son grand ouvrage des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

C'est dans ce livre impérissable que Newton a posé le principe de la gravitation universelle, qui comprend, dans ses conséquences, les lois de Kepler et toute la phoronomie des corps célestes.

Toutefois, quelque éclat que cette grande découverte ait répandu, dans le monde, sur le nom de Newton, ce n'est pas cette découverte elle-même que les géomètres ont le plus admirée, et qui atteste le plus le génie mathématique de l'auteur. L'idée d'une attraction mutuelle des corps était alors dans tous les esprits; Kepler, Bacon, Fermat, Roberval, Hevelius, Hook, l'avaient émise et en avaient entrevu les conséquences. La loi relative aux distances était inconnue, il est vrai, et fut la première découverte de Newton; mais elle ne pouvait rester longtemps cachée. Aussi, ce qu'il y a de plus digne d'admiration dans Newton, et ce qui eût pu rester longtemps à faire dans d'autres mains, ce sont les développements mathématiques qu'il a su donner à ce principe, pour en tirer la connaissance des lois dynamiques et géométriques du mouvement des corps célestes; c'est d'avoir composé ce beau monument de son génie, *par les méthodes et avec les seules ressources de la Géométrie des Anciens*.

Ptolémée, avons-nous dit, avait fondé une cinématique des corps célestes sur le principe unique de mouvements circulaires et uniformes, mais sans faire acception des causes de ces mouvements ou des forces qui les produisent.

L'ouvrage de Newton était fondé aussi sur un principe unique, mais ce principe était vrai et fécond; il comprenait tout. Les conséquences qu'il s'agissait d'en tirer embrassaient et les mouvements des corps célestes, et les forces qui les animent.

Toutefois le livre de Newton et l'Almageste ont quelque chose de commun : c'est la méthode, qui est la même dans les deux ouvrages. Car Newton, malgré ses brillantes découvertes dans les nouveaux calculs, avait conservé une telle estime pour la Géométrie des Anciens, qu'il la suivit dans tout le cours de son grand ouvrage, opposant ainsi aux futurs incrédules des preuves incontestables des ressources que cette Géométrie pouvait offrir dans les spéculations les plus relevées. On peut croire que Newton eût craint de rester au-dessous d'Huygens, dont il admirait tant le génie géométrique, s'il n'eût pas montré qu'il savait, comme lui, se servir de cette méthode naturelle et lumineuse des Mathématiques anciennes [*].

Non-seulement le livre des *Principes* atteste toute l'estime de Newton pour cette Méthode, mais l'illustre auteur ne négligeait aucune occasion de manifester à ce sujet ses sentiments. Pemberton, qui vécut dans son intimité, nous rapporte qu'il se reprochait de n'avoir point encore assez cultivé cette Géométrie de l'école grecque; qu'il approuvait l'entreprise de Hugue de Omérique de rétablir l'ancienne *analyse*, et qu'on l'entendait souvent faire de grands éloges du Traité *De sectione rationis*, qui, suivant lui, développait mieux la nature de cette *analyse* qu'aucun autre ouvrage de l'antiquité.

On ne peut parler du goût de Newton pour la Géométrie des Anciens, sans nommer aussitôt Halley et Maclaurin, promoteurs éminents de ces belles méthodes. Halley, qui joignait à la science et à l'habileté du grand astronome une érudition profonde et la connaissance des mathématiques anciennes, contribua puissamment à en répandre le goût et à en montrer l'usage, par la reproduction, dans de magnifiques éditions grecques et latines, des ouvrages anciens, et par ses propres travaux.

Il suffit, pour apprécier l'enthousiasme que lui inspirait la beauté de ces méthodes et la foi qu'il avait dans leur puissance et leur utilité, de se souvenir que son désir ardent de connaître le Traité de la *Section de raison*, qu'il venait de découvrir dans les manuscrits de la biblio-

[*] Cette réflexion a été faite par M. le baron Maurice, dans une excellente Notice sur la vie et les travaux d'Huygens.

thèque Bodléienne, le porta aussitôt, malgré ses grandes occupations astronomiques, à étudier l'arabe pour traduire et commenter bientôt le livre précieux qui lui a dû le jour chez les Modernes. C'est aussi après une révision sur un texte hébreu, qu'il donna une nouvelle édition des sphériques de Ménélaus.

Les recherches originales du grand astronome; sa méthode pour calculer les éléments paraboliques des cometes, méthode dont l'heureux usage lui permit de prédire, pour la premiere fois, le retour d'un de ces astres errants et de les rattacher, comme les planetes, à notre systeme solaire; le procédé qu'il indiqua pour faire servir les passages de Vénus à une détermination de la parallaxe du soleil, plus exacte et plus sûre que celles qu'on avait obtenues jusqu'alors; ces recherches, dis-je, offrent, ainsi que le grand ouvrage de Newton, la preuve manifeste des ressources que renferment les méthodes de la pure Géométrie. Elles démontrent l'erreur où l'on est tombé quand, l'imagination remplie des merveilleux résultats de l'Analyse dans ses premiers développements, on a pensé que ces méthodes avaient peu de portée, et qu'elles n'avaient plus de valeur que comme aliment offert à la curiosité et à l'esprit inquiet de l'antiquaire et de l'érudit. Nos spéculations actuelles seraient-elles d'un ordre plus relevé que celles de Kepler, de Huygens, de Newton, de Halley? Personne ne le dira. Il faut donc croire que la Géométrie, considérée dans ses développements et ses applications, sera, dans tous les temps, un noble et utile exercice de l'esprit.

Ah! combien est juste cette réflexion d'un grand homme, dont les talents éminents ont su faire servir tout à la fois les armes et les sciences à la gloire et à la défense de la patrie: « Lorsqu'on pense que c'est » cette Géométrie qui fut si féconde entre les mains des Archimède, » des Hipparque, des Apollonius; que c'est la seule qui fut connue » des Neper, des Viète, des Fermat, des Descartes, des Galilée, des » Pascal, des Huygens, des Roberval; que les Newton, les Halley, les » Maclaurin la cultivèrent avec une sorte de prédilection, on peut » croire que cette Géométrie a ses avantages! [*] »

---

[*] Carnot; *Géométrie de position*, Dissertation préliminaire

Maclaurin fut un digne continuateur de Newton, et par la nature des questions de philosophie naturelle qu'il traita, et en restant fidele à la Géométrie des Anciens.

Dans la célèbre question de l'attraction des ellipsoïdes, qui avait pris naissance dans le livre des *Principes*, mais dont Newton n'avait traité que le cas le plus simple, Maclaurin parvint, par les seules ressources de cette méthode, à des résultats que l'Analyse elle-même a longtemps admirés. C'est pour les besoins de cette question, que Maclaurin considéra, le premier, ces ellipsoïdes homofocaux qui ont donné lieu à l'une des plus importantes théories de la Géométrie moderne, qui embrasse les lignes de courbure, comme les lignes géodesiques de ces surfaces, et ont offert à l'Analyse un puissant principe de transformations.

Maclaurin cultiva aussi la théorie des courbes, par la méthode de Descartes, dans sa *Géométrie organique*, et par la Géométrie pure dans son *Traité des Courbes du troisième ordre*, où il fit connaître pour la première fois de fort belles propriétés de ces courbes. Ce second ouvrage, où la facilité et la brièveté des démonstrations s'unissent à la beauté des résultats, se rattache essentiellement aux méthodes de la Géométrie moderne, et y forme la base d'une théorie qui a déjà fixé l'attention de quelques géometres et qui doit prendre une grande extension.

Après Maclaurin, on trouve encore Mathieu Stewart, qui essaya de traiter par la seule Géométrie quelques-unes des grandes questions du système du monde, telles que la distance du soleil à la terre, le problème des trois corps, etc.; mais les succès rapides de l'Analyse dans les mains des Bernoulli, de Clairaut, d'Euler, de d'Alembert, ôtaient toute opportunité à ces recherches qui ne parurent plus offrir de chances de succès. Mathieu Stewart s'adonna aussi à l'*Analyse géométrique* des Anciens, dans le but spécial d'en accroître les ressources. Dans le siècle précédent, les géomètres s'étaient occupés plus particulierement de rétablir les Traités sur lesquels Pappus nous avait laissé quelques données. Mathieu Stewart entra dans une voie nouvelle, et fit un pas de plus; il composa deux ouvrages qui n'étaient point l'imitation d'ouvrages grecs. L'un, intitulé : *Quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques*, renferme de beaux théoremes, dont une partie n'a pas encore été démontrée.

Dans le même temps, Robert Simson composait son célèbre *Traité des Porismes*, et restituait les *Lieux plans* et les deux livres de la *Section déterminée*, d'Apollonius. Ce géomètre avait préparé une édition des *Collections mathématiques* de Pappus; il est à regretter qu'il ne l'ait pas mise au jour [*].

Depuis, c'est surtout en s'occupant de la doctrine des *Porismes*, que les géomètres anglais ont suivi la forte impulsion que Newton et Maclaurin avaient donnée à la culture des méthodes anciennes.

L'un des derniers ouvrages de ce genre est un Mémoire de *haute Géométrie*, qu'on trouve dans les *Transactions philosophiques* de la Société royale de Londres, de 1798. Le nom de l'auteur ne se lit peut-être pas sans quelque étonnement : c'est celui d'un illustre contemporain (lord Brougham), que des travaux fort différents ont porté aux plus hautes dignités de l'État et à la première magistrature du Parlement.

Mais pendant ce temps, en France et en Allemagne, on cultivait l'analyse de Descartes et le calcul de Leibnitz, et l'on appliquait les ressources merveilleuses de ces puissantes méthodes à une foule de problèmes nouveaux, et principalement au développement des grandes questions qu'avait posées ou fait naître l'ouvrage de Newton.

Cependant la Géométrie, cultivée à la manière de Descartes, suivit le cours de ses progrès naturels. Après que Clairaut, à l'âge de seize ans, avait appliqué l'analyse infinitésimale aux lignes à double courbure, Euler créa la belle et importante théorie de la courbure des surfaces, qui prit bientôt une grande extension dans les ouvrages de Monge et de l'un de ses plus illustres disciples.

Euler, dont l'esprit éminemment fécond s'appliqua à toutes les parties des Mathématiques, enrichit les *Éléments* de la Géométrie du théorème qui établit une relation entre les nombres des faces, des sommets et des arêtes d'un polyèdre.

Ce théorème d'Euler et la belle théorie des polyèdres d'un ordre

[*] On sait que M. Peyrard, à qui nous devons la belle édition des *Éléments* d'Euclide et des Œuvres d'Archimède, avait préparé de pareilles traductions de plusieurs autres ouvrages anciens, notamment du grand Traité des Sections coniques d'Apollonius, mais que la mort l'a surpris avant qu'il eût achevé l'impression de cet ouvrage.

supérieur, de M. Poinsot, avaient conduit un jeune géomètre à deux Mémoires remarquables, qu'on ne peut se rappeler sans éprouver le regret que, depuis, l'illustre auteur ait consacré exclusivement à l'Analyse les ressources de son génie mathématique.

Nous ne devons point omettre, avant de clore cet aperçu des travaux qui ont précédé le XIXe siècle, l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes*, de Cramer, qui a souvent servi de guide dans les applications de l'analyse à cette vaste théorie des lignes courbes.

III.

De la Géométrie au XIXe siècle.

Les ouvrages qui, au commencement du siècle présent, ont eu une heureuse influence sur la marche et les progrès de la Géométrie, sont, à des titres différents, ceux de Monge et de Carnot : de Monge, la *Géométrie descriptive* et le Traité de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie;* de Carnot, la *Géométrie de position* et la *Théorie des Transversales*.

Ces ouvrages, en agrandissant les idées, en inspirant aux jeunes mathématiciens le goût des recherches de bonne Géométrie, leur offraient des méthodes et des ressources nouvelles.

La *Géométrie descriptive* a pour objet de représenter sur un plan, surface à deux dimensions, les corps qui en ont trois : ou, en d'autres termes, de réunir dans une figure plane tous les éléments nécessaires pour faire connaître la forme et la position, dans l'espace, d'une figure à trois dimensions.

Une conséquence de cette représentation, c'est que l'on exécutera sur cette figure plane elle-même, les opérations géométriques répondant à celles que l'on aurait à faire sur la figure à trois dimensions.

Sous ce point de vue général, on conçoit que la *Géométrie descriptive* a dû exister dans tous les temps. Et, en effet, c'est par des dessins sur une aire plane, que les appareilleurs et les charpentiers ont, dans tous les temps, déterminé les formes des corps à trois dimensions, qu'ils avaient à construire.

On possédait même plusieurs Traités, et de bons, de Philibert Delorme, de Mathurin Jousse, du P. Derand, de Delarue, sur l'art du

trait appliqué à la coupe des pierres et à la charpente. Desargues avait fait un pas de plus, en montrant l'analogie qui existait entre des procédés divers, et en rattachant ceux-ci à des principes communs. En dernier lieu, Frézier, officier du génie, qui appréciait le mérite des conceptions de Desargues, avait donné suite à ses idées de généralisation et d'abstraction mathématique, dans son *Traité de Stéréotomie*, ouvrage où se trouvent, avec les applications à la coupe des pierres, plusieurs questions sous une forme abstraite, telles que le développement des surfaces coniques et cylindriques; la théorie de l'intersection de ces surfaces entre elles et avec la sphère; la manière de représenter une ligne à double courbure par ses projections sur des plans; etc.

Toutefois, on n'avait pas songé à rattacher toutes ces questions à un petit nombre d'opérations abstraites et élémentaires, et surtout à présenter celles-ci dans un traité spécial et sous un titre particulier, qui leur donnât un caractère de doctrine indépendant des pratiques d'où il avait suffi de les faire sortir. C'est là ce que Monge a conçu, et ce qu'il a exécuté avec infiniment de talent.

C'est par deux projections des corps sur deux plans rectangulaires, dont on abat l'un sur l'autre, pour ne former qu'une aire plane, que Monge a représenté mathématiquement les formes de l'étendue à trois dimensions; et c'est ce procédé qu'il a appelé *Géométrie descriptive*.

Les principes en sont très-simples et n'exigent guère que la connaissance du livre des *plans* de la Géométrie ordinaire.

Un petit nombre d'opérations faciles suffisent pour les applications de cette méthode à tous les arts de construction; de même, en quelque sorte, que les quatre règles de l'Arithmétique suffisent pour tous les calculs auxquels donnent lieu les sciences mathématiques dans leurs applications.

Et, en effet, un procédé graphique, destiné au simple ouvrier comme à l'ingénieur, devait se réduire à un petit nombre de préceptes d'une application immédiate et toujours facile.

Auparavant on employait des procédés divers, et si l'on se servait aussi de projections, ce n'était pas d'une manière uniforme; les plans de projection étaient différents, et le dessin ne se prêtait pas à une lecture facile et sûre, comme les épures de Monge.

La *Géométrie descriptive* simplifiait donc les opérations graphiques

nécessaires aux constructeurs ; elle en facilitait l'étude qu'elle mettait à la portée de tous, tandis que les ouvrages savants de Delarue, de Frézier, etc., auxquels manquait cette base première, n'étaient accessibles qu'aux géomètres et aux ingénieurs.

Mais une cause plus efficace sans doute que ces avantages réels, pour assurer le prompt succès du livre de Monge, fut ce décret puissant de la Convention qui, en créant sous le nom d'*Écoles normales*, le grand établissement où vinrent se réunir douze cents jeunes gens, les plus capables, choisis sur tous les points de la France, ordonna que la Géométrie descriptive y fût enseignée, et en confia l'enseignement à l'enthousiasme et au patriotisme actif de Monge.

Voilà comment Monge n'eut point à éprouver les difficultés et les procès en parlement que la routine, l'ignorance et les intérêts lésés avaient suscités à Desargues, un siècle et demi auparavant.

La *Géométrie descriptive*, instrument créé principalement pour le besoin des artistes et des ingénieurs, devait être utile aussi aux géomètres : elle formait un complément de leur Géométrie pratique ; elle pouvait faciliter leurs recherches théoriques, en leur donnant le moyen de représenter par une figure plane les corps qu'ils avaient à considérer ; enfin, en familiarisant avec les formes de certaines familles de surfaces, elle habituait l'esprit à les concevoir intellectuellement, et développait l'intelligence. Aussi est-ce avec raison que, depuis quelques années, l'étude des principes de la Géométrie descriptive fait partie des cours de mathématiques dans l'instruction secondaire.

Quant aux applications spéciales et les plus fréquentes de cet art, ce sont la perspective, la construction des reliefs, la détermination des ombres, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente.

Une foule d'autres travaux, tels que le percement des routes et des canaux dans des pays accidentés, les constructions navales, la direction des mines souterraines, le défilement dans la science des fortifications, etc., sont encore du domaine de la Géométrie descriptive [*].

---

[*] Toutefois il convient d'ajouter qu'il existe d'autres méthodes générales, on peut dire d'autres procédés de *Géométrie descriptive*, dans lesquels on se sert d'une seule projection, orthogonale ou perspective, et de quelque autre donnée qui supplée à la seconde projection. Les officiers du génie, par exemple, se servent le plus souvent de la me-

Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans toutes ces questions, la Géométrie descriptive n'est toujours qu'un instrument dont l'ingénieur se sert pour traduire sa pensée et exécuter sur le papier les opérations que la science, je veux dire la Géométrie générale, lui indique. La Géométrie descriptive exécute, mais elle ne crée pas. Si elle montre aux yeux la courbe d'intersection de deux surfaces, elle n'en fait point connaître les propriétés; elle ne saurait même indiquer, mathématiquement parlant, si cette courbe est plane ou a double courbure. Elle n'a point de méthodes pour ces recherches, qui sont exclusivement du domaine de la Géométrie rationnelle.

Je fais cette réflexion, parce qu'on trouve, dans le livre de Monge, quelques passages qui ne sont pas de la *Géométrie descriptive*, et qui pourraient induire en erreur les jeunes géomètres sur la destination et le caractère scientifique de cette méthode graphique.

Ainsi, Monge démontre deux propositions de Géométrie plane, qui résultent naturellement de la considération de figures à trois dimensions, savoir : la propriété ancienne des coniques, sur laquelle repose la théorie des polaires, puis ce beau théorème de d'Alembert, que les tangentes communes à trois cercles, pris deux à deux, ont leurs points de concours situés, trois à trois, en ligne droite. Ces exemples, on le conçoit, ne constituent point de la *Géométrie descriptive*, on n'y fait pas même usage des projections; ils rentrent dans la Géométrie rationnelle.

Il en est de même des propriétés générales de l'étendue, relatives aux lignes à double courbure et aux lignes de courbure des surfaces courbes, que Monge a placées à la suite de sa *Géométrie descriptive*, en faveur « des professeurs qui doivent être exercés à des considérations » d'une généralité plus grande que celles qui forment l'objet ordinaire » des études. » Ces propriétés fort belles des lignes et des surfaces courbes, placées dans un livre destiné à être très-répandu, ont contribué à développer le goût de ces spéculations d'un ordre supérieur.

---

thode des *plans cotés*, qui leur permet d'exécuter les mêmes opérations que par celle de Monge, et qui leur offre quelques avantages particuliers, à raison de la nature de leurs travaux.

et, sous ce rapport, le livre de Monge a encore atteint le but de l'illustre auteur. Mais elles n'ont rien de commun avec les principes de la *Géométrie descriptive*, et elles rentrent exclusivement dans le domaine de la Géométrie générale.

Le grand Traité de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* a le même objet que la *Géométrie* de Descartes; il en est la continuation : mais celle-ci roulait sur l'analyse des quantités finies, et le livre de Monge, sur l'analyse des quantités infinitésimales. Euler avait déjà traité plusieurs de ces questions et donné son beau théorème sur les rayons de courbure des surfaces courbes. Monge les traita avec beaucoup plus d'extension et sous de nouveaux points de vue. Les rapports qu'il établit entre les équations aux différences partielles et certaines familles de surfaces, offrent des exemples magnifiques des secours mutuels que peuvent et doivent se prêter le Géométrie et l'Analyse.

Les ouvrages de Carnot ont pour objet spécial l'extension de la Géométrie des Anciens. Ils font suite aux ouvrages de Robert Simson, Stewart, etc. ; mais ils sont empreints de cet esprit de facilité et de généralité que nous offrent les ouvrages de Pascal et de Desargues; et ce caractère, qui leur est propre, a été dans l'intention de leur illustre auteur.

Dans le siècle dernier, R. Simson et Stewart donnaient autant de démonstrations d'une proposition, que la figure à laquelle elle se rapportait, présentait de formes différentes. Carnot s'attacha à prouver qu'une seule démonstration appliquée à un état assez général de la figure suffisait.

Généralement, on ne parvenait à la démonstration d'une proposition importante, qu'en s'élevant successivement des cas les plus simples à de plus composés. Les recherches géométriques de Viète et de Fermat sur les contacts des cercles et des sphères, le *Traité des Sections coniques* de R. Simson, et les ouvrages de Stewart, sont des exemples de cette marche lente et pénible. Dans le contact des sphères de Fermat, par exemple, on ne parvient à déterminer une sphère tangente à quatre autres, qu'après avoir résolu quatorze questions préliminaires, dont la plupart sont des cas particuliers de la question principale. Carnot, au contraire, traite directement les questions dans leur sens le plus

général, et la science gagne en facilité et en force, en même temps qu'en brièveté et en généralité.

Cette manière d'écrire la Géométrie fait le caractère de la Géométrie moderne, et ce sont les ouvrages de Carnot qui ont le plus contribué à la répandre.

Quant aux résultats qu'on y trouve, ils sont extrêmement nombreux. Une partie roule sur diverses propriétés des sections coniques qu'on a reproduites souvent depuis, et que l'auteur démontre avec une facilité extrême.

On y distingue une belle propriété des courbes géométriques, concernant les segments qu'une courbe de cette espèce fait sur les côtés d'un polygone quelconque; propriété qui est une extension d'un théorème de Newton, et dont les géomètres ont fait, depuis, de nombreuses applications, notamment à la détermination générale des tangentes et des cercles osculateurs de ces courbes géométriques.

Ces belles recherches se rapportent à une partie de l'ouvrage où Carnot propose divers systèmes de coordonnées, autres que celui de Descartes, pour représenter les courbes, et établit les relations qui ont lieu entre ces coordonnées, de manière à passer d'un système à un autre. On transforme ainsi les équations des courbes; et comme l'équation, dans chaque système, exprime une propriété différente de la courbe, ces recherches facilitent et ont pour objet, au fond, l'étude des propriétés des courbes. Elles nous paraissent rentrer essentiellement dans la doctrine des porismes d'Euclide.

On trouve dans la *Géométrie de position* des idées sur une science qui, selon Carnot, devrait tenir le milieu entre la Géométrie et la Mécanique, savoir, celle des *mouvements géométriques*. Il appelle ainsi les déplacements que peuvent subir plusieurs corps sans se déformer par leur contact et en conservant entre eux des conditions prescrites, conditions géométriques et indépendantes des règles de la communication des mouvements et de toutes considérations de forces et de mécanique proprement dite. On voit que c'est cette science que M. Ampère a proposée aussi sous le nom de *Cinématique*, dans son *Essai sur la philosophie des Sciences*. Carnot avait déjà émis ces idées en 1783, dans son *Essai sur les Machines*.

Le temps ne me permet pas de pousser plus loin cette étude du

livre de Carnot; je me bornerai à dire que son titre, *Géométrie de position*, se rapportait à certaines considérations sur la doctrine des quantités *positives* et *négatives* en Géométrie, et non à quelque méthode spéciale, telle que la *Géométrie des indivisibles*, la *Géométrie analytique*, la *Géométrie descriptive*, etc., ni à une partie restreinte de la science, comme la *Géométrie de la règle*, la *Géométrie du compas*, etc. La *Géométrie de position* n'était point autre chose que de la Géométrie générale traitée par les procédés ordinaires, mais avec talent et par des considérations faciles et fécondes.

La *Théorie des Transversales* est un ensemble de propositions qui expriment toutes des rapports entre les segments que fait, sur un système de lignes droites, une ligne droite ou courbe, qu'on appelle *transversale*. Ces rapports, exprimés, en général, par des équations à deux termes, jouissent de cette propriété, qu'ils se conservent dans les projections, perspectives ou orthogonales, de la figure. Les mêmes relations ont lieu aussi entre les sinus des angles des droites projetantes. Ce sont ces propriétés importantes qui font le caractère des propositions que Carnot a réunies sous le titre de *Théorie des Transversales*. Ces propositions peuvent être d'un usage très-fréquent pour la démonstration d'une foule de théorèmes, particulièrement dans la théorie des sections coniques. Elles n'ont pas été inconnues des Anciens; on en trouve des traces éparses dans Pappus et chez quelques auteurs modernes : mais c'est Carnot qui a reconnu qu'elles étaient propres à former une véritable méthode de démonstration; et cette théorie, en effet, a pris de l'extension et est devenue d'un grand usage dans la Géométrie moderne.

Je me suis étendu sur les ouvrages de Monge et de Carnot, parce que je les regarde comme ayant ranimé en France l'esprit des méthodes géométriques et inspiré les jeunes mathématiciens, qui bientôt sont entrés dans cette voie.

A leur tête se présentent MM. Ch. Dupin et Poncelet, dont les remarquables travaux attestent cette heureuse impulsion.

M. le baron Dupin, dans ses *Développements de Géométrie*, qu'il considère comme faisant suite aux ouvrages de Monge, a traité, par les seules ressources de la Géométrie, aussi bien que par l'Analyse, la théorie générale de la courbure des surfaces, que l'on avait

supposée jusque-là n'être accessible qu'à l'Analyse. C'est dans ce bel ouvrage qu'on trouve cette importante théorie des *indicatrices*, qui n'est pas moins féconde en Géométrie rationnelle qu'en Géométrie descriptive. Ce volume et celui des *Applications de Géométrie et de Mécanique* ont servi utilement la science, et par les belles théories qui s'y trouvent, et comme ayant donné aux jeunes géomètres une juste confiance dans les ressources que peuvent offrir ces méthodes.

La *Théorie des Transversales* est le principal fondement du grand *Traité des Propriétés projectives*, de M. Poncelet, où l'on trouve, avec une foule de résultats du plus haut intérêt, cette méthode merveilleuse de la *Théorie des Polaires*, et ce mode de déformation des figures à trois dimensions, analogue aux procédés de la perspective des figures planes; méthodes qui, en donnant le moyen de créer à volonté, d'une manière en quelque sorte mécanique, une foule de théorèmes fort divers et pourtant dérivés d'un seul, forment les sources les plus fécondes de la Géométrie moderne.

Les transformations sont le propre de l'Algèbre; on conçoit donc combien des procédés analogues en Géométrie doivent apporter de facilité et de puissance; ils réalisent cette réflexion si judicieuse de M. Poinsot : « En Géométrie comme en Algèbre, la plupart des idées » différentes ne sont que des transformations; les plus lumineuses et » les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et » que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans » le calcul [*]. » Ce sont ces idées les plus lumineuses et les plus fécondes, que les méthodes de transformation dont nous parlons, et qui ont pris de nos jours un grand accroissement, sont très-propres à faire découvrir, en variant diversement, par des procédés certains, les formes d'une idée primitive.

C'est dans le sein de l'École Polytechnique surtout, que les ouvrages de Monge et de Carnot ont porté leurs fruits. Le goût des sciences, implanté dans ce grand établissement par les hommes illustres qui l'ont fondé, s'y est conservé, grâce à son organisation sage

[*] *Mémoire sur la composition des moments et des aires dans la Mécanique*. Voir *Éléments de Statique*, 8e édition, p. 353.

et puissante, et a contribué, comme les services militaires et civils, à la gloire et à la grande renommée de cette École célèbre dans le monde entier.

Je ne puis rappeler ici tous les élèves dont les travaux se sont succédé et ont concouru à l'accroissement de la science; mais leurs noms se présenteront naturellement dans le cours de notre enseignement. Nous aurons souvent à citer aussi le vénérable M. Gergonne, dont les travaux et les *Annales* ont tant contribué au mouvement scientifique de l'époque [*]. Nous ne négligerons point non plus les Mémoires importants publiés de nos jours en Allemagne, en Angleterre, en Italie, où la Géométrie est cultivée avec un grand succès et souvent avec éclat [**].

Les théories et les méthodes dont l'usage doit se présenter le plus fréquemment, formeront naturellement la base de ce cours. Mais les questions spéciales d'un ordre plus relevé, qui seront propres, soit à ouvrir de nouvelles voies, soit à offrir de belles applications de la science, entreront aussi nécessairement dans le cadre que nous nous sommes tracé. Si nous n'avons pas à analyser des ouvrages de l'importance du livre des *Principes* de Newton, il en est cependant qui nous offriront des exemples non moins remarquables de la puissance d'invention que l'esprit géométrique développe, et de la richesse des résultats qu'il peut procurer dans les questions les plus difficiles. Rien de plus beau que ces considérations directes et lucides, pittoresques, s'il est permis de s'exprimer ainsi, par lesquelles un grand géomètre, en transportant l'ingénieuse doctrine des couples dans la Dynamique, nous a dévoilé toutes les circonstances géométriques et dynamiques

---

[*] Les géomètres regrettent que la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quételet, après avoir contribué, de 1824 à 1838, à l'heureuse impulsion que les sciences avaient reçue en Belgique, ait cessé de paraître. Nous aurons à consulter les onze volumes de cette intéressante collection et les divers Recueils périodiques qui offrent chaque jour aux géomètres les avantages d'une facile et prompte publication : le Journal de Mathématiques de M. Crelle; celui de M. Liouville; les Nouvelles Annales de M. Terquem; le Journal de Mathématiques de Cambridge et de Dublin, édité par M. Thomson; le Recueil scientifique de Rome.

[**] Voyez, par exemple, les Ouvrages de MM. Steiner, Mac-Cullagh, etc.

du double mouvement d'un corps pesant qui a reçu une impulsion. Cette importante et difficile question avait été résolue analytiquement par Euler et d'Alembert, à peu près dans le même temps, puis avec plus d'ordre et d'élégance par Lagrange. Mais dans ces solutions, dont le but final est la détermination de la position du corps à un instant donné, par des formules de quadrature, on ne voit que des calculs qui, s'ils donnent la solution numérique de la question, c'est-à-dire la position actuelle du corps, ne font nullement connaître comment il y est arrivé; comment se modifie à chaque instant l'effet de l'action permanente de l'impulsion primitive. Par les seules ressources du raisonnement géométrique, M. Poinsot rend palpables et semble peindre aux yeux toutes les circonstances du mouvement du corps. A l'instar des forces accélératrices que les géomètres sont accoutumés à considérer, il considère dans le mouvement du corps un *couple accélérateur* qui, en se combinant avec la rotation, de même qu'une force accélératrice se combine avec une force d'impulsion, change, à chaque instant, la grandeur de cette rotation et la direction de l'axe autour duquel elle s'effectue; et ce double effet se suit pour ainsi dire de l'œil, en même temps que l'esprit en voit les causes.

On reconnaît ici quels sont les avantages propres de l'Analyse et de la Géométrie. La première, par le mécanisme merveilleux de ses transformations, passe rapidement du point de départ au but proposé, mais souvent sans connaître, ni le chemin qu'elle a fait, ni la signification des nombreuses formules qu'elle a employées.

La Géométrie, au contraire, qui ne puise ses inspirations que dans la considération attentive des choses et dans l'enchaînement des idées, est obligée de découvrir naturellement les propositions que l'Analyse a pu négliger et ignorer, et qui forment le lien le plus immédiat entre les deux termes extrêmes. Cette marche peut paraître parfois difficile; mais elle est, au fond, la plus simple, parce qu'elle est la plus directe; elle est aussi la plus lumineuse et la plus féconde.

L'Analyse découvre-t-elle une vérité; que la Géométrie en cherche la démonstration par ses propres moyens: soyez sûrs que, dans cette recherche, elle rencontrera et fera connaître diverses autres propriétés qui se rattachent au sujet, l'éclairent et le complètent.

L'Analyse et la Géométrie, au point de vue philosophique, sont

deux branches d'une science unique, qui a pour objet la recherche des vérités naturelles; elles sont destinées à s'éclairer mutuellement, à se prêter un secours réciproque : toutes deux sont des instruments aujourd'hui indispensables.

Cultivons donc simultanément l'Analyse et la Géométrie, et que l'une et l'autre trouvent également leur place dans l'enseignement.

C'est la pensée que le chef éminent qui préside à l'instruction publique a cherché à réaliser, en fondant la chaire de Géométrie supérieure.

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA LEMNISCATE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Dans les *Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 17, M. Sturm a démontré un théorème énoncé par M. Talbot, savoir, que si l'on multiplie la différence entre l'arc infini d'une hyperbole équilatère et son asymptote par la longueur du quadrant de la lemniscate correspondante, le produit sera égal à $\frac{1}{4}\pi a^2$, en désignant par a le demi-axe de l'hyperbole. Cette propriété, déduite par M. Sturm de la théorie des intégrales eulériennes, n'est qu'une conséquence très-simple de la relation bien connue entre les fonctions elliptiques complètes à modules complémentaires, que l'on doit à Legendre, comme je l'ai déjà fait remarquer dans ce Journal. Dans cette Note, je me propose d'étendre le résultat dont il s'agit à une hyperbole quelconque, par un théorème dont voici l'énoncé :

Soit S *la différence entre l'arc infini d'une hyperbole, ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et son asymptote, et soit S_1 *la longueur du quadrant de la courbe, lieu des projections orthogonales du centre sur ses tangentes; soient aussi* Σ, Σ_1 *les mêmes choses par rapport à l'hyperbole conjuguée*

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

et l'on aura

$$SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{b} - \sqrt{c^2 - b^2}.s\right),$$

en supposant $c > b$, *et en désignant par* s *un arc de l'hyperbole pre-*

mière compte du sommet jusqu'au point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{c^2}{b}, \quad y = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Pour démontrer cette propriété, rappelons-nous les expressions connues (tome X de ce Journal, page 186) pour S et S_1 en fonctions elliptiques completes, savoir,

$$S = E(c) - b^2 F(c), \quad S_1 = \frac{c^2}{b} \Pi\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}, b\right),$$

dans lesquelles on prend $b^2 + c^2$ pour unité; ce qui donne, en mettant pour la fonction Π sa valeur en fonctions de la première et de la seconde espèce,

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}} S_1 = \tfrac{1}{2}\pi + F(b)\left[\frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}} - E(c, \theta)\right] - [E(b) - F(b)] F(c, \theta),$$

ou

$$\sin\theta = \frac{b}{c}.$$

Or, si l'on prend un autre angle λ, tel que

$$\cos\lambda = \frac{b^2}{c^2},$$

on aura

$$F(c, \theta) + F(c, \lambda) = F(c), \quad E(c, \theta) + E(c, \lambda) - E(c) = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - b^2},$$

d'où, en se servant de la relation connue

$$E(c) F(b) + E(b) F(c) - F(c) F(b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

resultera l'expression suivante pour S_1,

$$(1) \quad S_1 = \frac{b}{c} F(b) + \sqrt{c^2 - b^2}\,[F(b) E(c, \lambda) + E(b) F(c, \lambda) - F(b) F(c, \lambda)].$$

D'ailleurs on a, en considérant l'hyperbole conjuguée,

$$\Sigma = E(b) - c^2 F(b), \quad \Sigma_1 = \frac{b^2}{c} \Pi\left(\frac{b^2 - c^2}{c^2}, c\right),$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad \Sigma_1 = \frac{b}{c} F(c) + \sqrt{c^2 - b^2}\,[F(c) E(c, \lambda) - E(c) F(c, \lambda)].$$

Maintenant prenons la somme des deux produits SS_1 et $\Sigma\Sigma_1$, ce qui nous donnera

$$SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \sqrt{c^2 - b^2}\left\{ \begin{array}{l} [E(b) - F(b)][E(c) - b^2 F(c)] \\ -[F(b) - c^2 F(b)]E(c) \end{array} \right\} F(c, \lambda)$$

$$+ \sqrt{c^2 - b^2}\,\{[E(c) - b^2 F(c)]F(b) + [E(b) - c^2 F(b)]F(c)\}\,E(c, \lambda)$$

$$+ \frac{b}{c}\,\{[E(c) - b^2 F(c)]F(b) - [E(b) - c^2 F(b)]F(c)\},$$

ou ce qui est la même chose, comme on s'en assurera sans difficulté,

$$(3) \qquad SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{c^2 - b^2}\left[E(c, \lambda) - b^2 F(c, \lambda) - \frac{b}{c\sqrt{c^2 - b}}\right]$$

Mais, en désignant par s l'arc de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dont les coordonnées x', y' de l'extrémité sont

$$x' = \frac{c^2}{b}, \quad y' = \sqrt{c^2 - b^2},$$

on a, par la formule connue, en se rappelant la valeur de λ,

$$s = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} + b^2 F(c, \lambda) - E(c, \lambda);$$

on trouve donc finalement

$$(4) \qquad SS_1 + \Sigma\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{c^2}{b} - \sqrt{c^2 - b^2}\,s\right\},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

2. Il est bon de remarquer que des propriétés comme celle qu'on vient d'indiquer ne sont pas bornées au cas de l'hyperbole et de l'autre courbe dont nous avons parlé. Si l'on considère la courbe lieu des projections orthogonales du centre sur les tangentes à cette dernière, et encore les autres qui dérivent successivement de la nouvelle courbe par la répétition de la même construction, on parviendra à reconnaître qu'il existe entre leurs périmètres une variété des relations analogues à celle du n° 1.

En effet, en désignant par S_2 le quadrant de la seconde dérivée de

l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et par Σ_2 la même chose pour l'hyperbole conjuguée, on aura, en se rappelant des formules que j'ai déjà données (tome X de ce Journal, page 186),

$$S_2 = 2E(c) + \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{c^2 - b^2} F(c) - \frac{b^4}{c^2 - b^2} \Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c),$$

$$\Sigma_2 = 2E(b) + \frac{c^2(2c^2 - b^2)}{b^2 - c^2} F(b) - \frac{c^4}{b^2 - c^2} \Pi(b^2 \operatorname{tang}^2 \lambda, b),$$

en faisant, comme auparavant,

$$\cos \lambda = \frac{b^2}{c^2}.$$

Si l'on y substitue, au lieu des fonctions Π leurs valeurs en S_1 et Σ_1, on en déduira, après quelques réductions, à l'aide des expressions pour S et Σ,

$$(5) \quad \begin{cases} S_2 - 2S + \dfrac{bc}{c^2 - b^2} \Sigma_1 = \dfrac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} F(c), \\ \Sigma_2 - 2\Sigma - \dfrac{bc}{c^2 - b^2} S_1 = -\dfrac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} F(b), \end{cases}$$

et l'on trouvera, en ajoutant ces équations, après les avoir multipliées respectivement par S_1 et Σ_1,

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 - 2(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \frac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} [S_1 F(c) - \Sigma_1 F(b)].$$

Or il est aisé de voir, en vertu des équations (1) et (2), que

$$S_1 F(c) - \Sigma_1 F(b) = \tfrac{1}{2} \pi \sqrt{c^2 - b^2}\, F(c, \lambda),$$

en sorte que

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 - 2(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \tfrac{1}{2} \pi \frac{b^2 c^2}{\sqrt{c^2 - b^2}} F(c, \lambda);$$

d'où, par suite de la valeur de $SS_1 + \Sigma\Sigma_1$ donnée par l'équation (3),

$$(6) \quad S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 = \tfrac{1}{2} \pi \sqrt{c^2 - b^2} \left[2E(c, \lambda) + \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{c^2 - b^2} F(c, \lambda) + \frac{2b}{c\sqrt{c^2 - b}} \right].$$

Multiplions encore la première des équations (5) par Σ, la seconde par S, et l'on en tirera facilement

$$\Sigma S_2 - S\Sigma_2 + \frac{bc}{c^2 - b^2}(SS_1 + \Sigma\Sigma_1) = \frac{b^2c^2}{c^2 - b^2}[\Sigma F(c) + SF(b)].$$

Mais on s'assurera sans peine que

$$\Sigma F(c) + SF(b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ce qui nous donnera, après avoir mis pour $SS_1 + \Sigma\Sigma_1$ sa propre valeur,

$$(7)\quad \Sigma S_2 - S\Sigma_2 = \tfrac{1}{2}\pi\frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}}\left[b^2F(c, \lambda) - E(c, \lambda) + \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - b^2}\right].$$

3. Considérons encore la troisième dérivée de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a, pour la différentielle de son arc (s_3), la formule suivante (tome X de ce Journal, page 186) :

$$ds_3 = \left[\frac{3}{(r^2 + b^2 - c^2)^2} + \frac{2}{r^2(r^2 + b^2 - c^2)}\right]\frac{b\,c^2\,dr}{\sqrt{(r^2 + b^2)(r^2 - c^2)}},$$

où la variable r est le rayon vecteur de l'hyperbole. Pour la réduction de cette expression aux formes fondamentales des fonctions elliptiques, rappelons-nous que nous avons, en faisant $(r^2 + b^2)(r^2 - c^2) = R$,

$$2(b^2 - c^2)b^2c^2\int\frac{dr}{(r^2 + b^2 - c^2)^2\sqrt{R}} = \int\frac{(r^2 + b^2 - c^2)\,dr}{\sqrt{R}}$$
$$- [(b^2 - c^2)^2 - b^2c^2]\int\frac{dr}{(r^2 + b^2 - c^2)\sqrt{R}} - \frac{r\sqrt{R}}{r^2 + b^2 - c^2},$$

d'où l'on déduira, en posant

$$r = c\,\text{séc}\,\varphi,$$

et, en faisant toutes les réductions convenables,

$$\frac{2(c^2 - b^2)}{bc}s_3 = \frac{3(c^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 - b^2\sin^2\varphi}}{c^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} - \frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2}F(b, \varphi)$$
$$- E(b, \varphi) + \frac{3(c^2 - b^2)^2 + b^2c^2}{c^2 - b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\Pi\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}, b, \varphi\right).$$

et, par conséquent, pour la valeur du quart entier, S_3,

$$\frac{2(c^2-b^2)}{bc} S_3 = \frac{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}{c^2-b^2} \Pi\left(\frac{c^2-b^2}{b^2}, b\right)$$
$$- E(b) - \frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2} F(b);$$

d'où l'on tire, en substituant pour Π sa valeur en S_4,

$$S_4 = \frac{(c^2-b^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2} F(b) + E(b) + \frac{2(c^2-b^2)}{bc} S_3\right].$$

De même :

$$\Sigma_4 = \frac{(b^2-c^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2} F(c) + E(c) + \frac{2(b^2-c^2)}{bc} \Sigma_3\right].$$

On a donc

$$S_4 S_2 + \Sigma_4 \Sigma_2 = \frac{2(c^2-b^2)^2}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}(S_2 S_3 + \Sigma_2 \Sigma_3)$$
$$+ \frac{(c^2-b^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left\{\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2} F(b) + E(b)\right] S_2 - \left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2} F(c) + E(c)\right] \Sigma_2\right\}$$

Or il est aisé de montrer que

$$S_2 = 2E(c) - b^2 F(c) - \frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}[F(c) E(c, \lambda) - E(c) F(c, \lambda)],$$

et

$$\Sigma_2 = 2E(b) - (1+c^2) F(b)$$
$$+ \frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}[F(b) E(c, \lambda) + E(b) F(c, \lambda) - F(b) F(c, \lambda)],$$

ce qui nous donnera

$$\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2} F(b) + E(b)\right] S_2 - \left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2} F(c) + E(c)\right] \Sigma_2$$
$$= A + BF(c, \lambda) + CE(c, \lambda),$$

en faisant, pour abréger,

$$A = \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right][2E(c) - b^2 F(c)]$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^4}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right][2E(b) - (1 + c^2) F(b)].$$

$$\frac{B\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} = \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] E(c)$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right][E(b) - F(b)],$$

$$\frac{C\sqrt{c^2 - b^2}}{bc} = - \left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] F(c)$$
$$- \left[\frac{(2c^2 - b^2)b^2}{b^2 - c^2} F(c) + E(c)\right] F(b).$$

On verra aussi que les quantités A, B, C deviendront très-simples apres quelques réductions, et qu'on aura

$$A = \frac{\pi b^2(3c^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)}, \quad B = \frac{\pi b^3 c(2c^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = -\frac{\pi bc}{2\sqrt{c^2 - b^2}},$$

en sorte qu'on a

$$S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2 = \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + c^2 b^2}(S_2 S_3 + \Sigma_2 \Sigma_3)$$
$$+ \frac{\pi bc}{2[3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2]}\left[\begin{array}{l} \frac{(2c^2 - b^2)b^3 c}{\sqrt{c^2 - b^2}} F(c, \lambda) \\ - bc\sqrt{c^2 - b^2}\, E(c, \lambda) - (3c^2 - b^2)b^2 \end{array}\right].$$

d'ou l'on conclut, en mettant pour $S_1 S_2 + \Sigma_1 \Sigma_2$ sa propre valeur, qu'on tire de l'équation (6),

$$(8) \quad S_2 S_3 + \Sigma_2 \Sigma_3 = \frac{3\pi}{4(c^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l} [2(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2] E(c, \lambda) \\ - b^2[(c^2 - b^2)^2 + b^4] F(c, \lambda) \\ - \frac{b^3(2b^2 - c^2)\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \end{array}\right\}$$

On a aussi les équations suivantes :

$$SS_1 = \frac{(c^2 - b^2)bc}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2}\left[\frac{(2b^2 - c^2)c^2}{c^2 - b^2} F(b) + E(b)\right] S$$
$$+ \frac{2(c^2 - b^2)^2}{3(c^2 - b^2)^2 + b^2 c^2} SS_2.$$

$$\Sigma\Sigma_1 = \frac{(b^2-c^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2}F(c)+E(c)\right]\Sigma$$
$$+\frac{2(c^2-b^2)^2}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\Sigma\Sigma_3,$$

ce qui donne, en mettant pour S et Σ leurs propres valeurs,

$$SS_1+\Sigma\Sigma_1 = \frac{2(c^2-b^2)^2}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}(SS_3+\Sigma\Sigma_3)$$
$$+\frac{(c^2-b^2)bc}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{(2b^2-c^2)c^2}{c^2-b^2}F(b)+E(b)\right][E(c)-b^2F(c)]\\ -\left[\frac{(2c^2-b^2)b^2}{b^2-c^2}F(c)+E(c)\right][E(b)-c^2F(b)]\end{array}\right\};$$

d'où l'on tire, après les réductions convenables,

$$SS_1+\Sigma\Sigma_1 = \frac{2(c^2-b^2)^2}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}(SS_3+\Sigma\Sigma_3)+\frac{\pi}{2}\frac{b^3c^3}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2},$$

ou bien encore

$$(9)\qquad SS_3+\Sigma\Sigma_3 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}{(c^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{c}E(c,\lambda)-b^2F(c,\lambda)\\ +\frac{b^3}{c}\frac{(2c^2-3b^2)\sqrt{c^2-b^2}}{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}\end{array}\right]$$

Enfin, on a

$$S_3 = \frac{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}{2(c^2-b^2)^2}S_1-\frac{bc}{2(c^2-b^2)}\Sigma-\frac{b^3c}{2(c^2-b^2)^2}F(b),$$
$$\Sigma_3 = \frac{3(c^2-b^2)^2+b^2c^2}{2(c^2-b^2)^2}\Sigma_1+\frac{bc}{2(c^2-b^2)}S-\frac{b^3c^3}{2(c^2-b^2)^2}F(c).$$

ce qui donne

$$S_1\Sigma_3-S_3\Sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{c^2-b^2}(SS_1+\Sigma\Sigma_1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3c^3}{(c^2-b^2)^2}[\Sigma_1F(b)-S_1F(c)],$$

d'où

$$S_1\Sigma_3-S_3\Sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{c^2-b^2}(SS_1+\Sigma\Sigma_1)-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{b^3c^3}{(c^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}F(c,\lambda).$$

d'où, finalement,

$$(10)\quad S_1\Sigma_3-S_3\Sigma_1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{\sqrt{c^2-b^2}}\left[E(c,\lambda)-\frac{(2c^2-b^2)b^2}{c^2-b^2}F(c,\lambda)+\frac{b^3}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right.$$

Il est aisé de voir qu'on obtiendrait des relations semblables en poursuivant l'évaluation des périmètres des courbes qui appartiennent au système que nous avons considéré; il est très-probable, surtout, que les deux fonctions

$$S_p \Sigma_{p+2q} - \Sigma_p S_{p+2q} \quad \text{et} \quad S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1},$$

conservent toujours le même type, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme

$$\pi [l + m F(c, \lambda) + n E(c, \lambda)],$$

ce qui se trouve vérifié pour le cas de l'hyperbole équilatère. Dans ce cas, la première de ces fonctions s'évanouit, et la valeur de l'autre est donnée par l'équation (en désignant par a le demi-axe de l'hyperbole)

$$S_{2p} S_{2q+1} = \left(\frac{4p-1}{4p-3} \cdot \frac{4p-5}{4p-7} \cdots \frac{3}{1}\right) \left(\frac{4q+1}{4q-1} \cdot \frac{4q-3}{4q-5} \cdots \frac{5}{3}\right) \frac{\pi a^2}{4}.$$

Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes [*];

PAR M. C.-W. BORCHARDT.

1. On sait que différentes questions d'analyse pure et appliquée, entre autres la détermination des inégalités séculaires du mouvement des planètes, conduisent à l'équation que l'on obtient en éliminant les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$\begin{aligned} gx_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\ gx_2 &= a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ gx_n &= a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n, \end{aligned}$$

les coefficients $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots$ étant supposés connus et devant satisfaire à l'équation de condition

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

L'équation du $n^{ième}$ degré en g, qui résulte de cette élimination, et que je représenterai par

$$\Gamma = 0,$$

a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles. On possède aujourd'hui plusieurs démonstrations de cette propriété de l'équation $\Gamma = 0$, et il ne serait pas d'un grand intérêt d'en offrir une nouvelle, si elle ne prouvait rien de plus que les démonstrations données jusqu'à présent.

[*] J'ai publié, dans le tome XXX du Journal de M. Crelle, un Mémoire sur le même sujet, mais moins complet; le Mémoire actuel peut être considéré comme une extension du premier.

Mais j'ai reconnu que, en suivant une marche différente de celles que l'on prend ordinairement, on parvient à faire connaître une circonstance assez remarquable, qui a lieu pour l'équation $\Gamma = 0$.

Voici en quoi elle consiste. On sait que la réalité des racines d'une équation algébrique dépend des signes de certaines expressions formées de ses coefficients, expressions qui, lorsque l'équation a toutes ses racines réelles, devront être toutes positives. Or, pour l'équation $\Gamma = 0$, toutes ces expressions peuvent être mises sous la forme d'une somme de carrés de quantités réelles. La démonstration de cette propriété de l'équation $\Gamma = 0$ formera l'objet de ce Mémoire.

Pour le cas de $n = 2$, l'équation $\Gamma = 0$ est le résultat de l'élimination entre les deux équations

$$gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2,$$

$$gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2,$$

ce qui donne

$$\Gamma = g^2 - Ag + B = 0,$$

en posant

$$A = a_{1,1} + a_{2,2}, \quad B = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2;$$

pour que cette équation ait ses racines réelles, il n'y a qu'une condition à remplir, il faut que la quantité

$$A^2 - 4B$$

soit positive. Dans l'équation proposée, on a

$$A^2 - 4B = (a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}^2,$$

c'est-à-dire égale à la somme de deux carrés, ce qui démontre la proposition énoncée ci-dessus, pour le cas de $n = 2$.

Pour le cas de $n = 3$, c'est-à-dire quand l'équation $\Gamma = 0$ est du troisième degré, la réalité des racines ne dépend encore que du signe d'une seule expression, qui est fort compliquée, mais que, malgré cette complication, M. Kummer, par des tentatives aussi ingénieuses qu'heureuses, est parvenu à représenter sous la forme d'une somme de sept carrés (*voyez* le Journal de M. Crelle, tome XXVII),

résultat dont M. Jacobi a montré les applications à la géométrie analytique dans le tome LXLVIII du *Giornale Arcadico*. C'est en cherchant la vraie source analytique de laquelle découle le résultat de M. Kummer, que j'ai trouvé la proposition générale énoncée ci-dessus. Avant d'en donner la démonstration, il sera nécessaire de rappeler quelques notions préliminaires.

2. Les considérations suivantes reposeront principalement sur les propriétés des algorithmes que l'on rencontre dans la résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues. On sait que les valeurs des n inconnues auront toujours un dénominateur commun, que les géomètres sont convenus d'appeler *déterminant*. Donc, si les coefficients des n inconnues dans le système des équations données sont

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}, \quad \alpha_{2,1}, \ldots, \quad \alpha_{n,1}, \\ \alpha_{1,2}, \quad \alpha_{2,2}, \ldots, \quad \alpha_{n,2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1,n}, \quad \alpha_{2,n}, \ldots, \quad \alpha_{n,n}, \end{array}$$

ce dénominateur commun sera appelé déterminant du système d'équations, ou simplement déterminant des quantités $\alpha_{i,k}$, et il sera représenté par la notation symbolique

$$\sum (\pm \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n}),$$

que l'on a adoptée parce que tous les termes de la somme dont le déterminant est composé se déduisent du terme

$$+ \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n},$$

lorsque, en conservant la série des premiers indices des lettres α dans l'ordre naturel, on substitue pour la série des seconds indices toutes les permutations possibles, et que l'on prend le terme correspondant avec le signe $+$ ou $-$, suivant qu'on est parvenu à la permutation dont il s'agit en échangeant deux à deux les indices $1, 2, \ldots, n$ un nombre pair ou un nombre impair de fois. Relativement à ces déterminants ou sommes alternées, je vais rappeler ici deux propositions dont j'aurai besoin dans la suite.

Proposition I. « En posant

$$\alpha_{i,k} = \alpha^{i-1},$$

» le déterminant

$$\sum(\pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{n,n})$$

» se transforme dans le produit de toutes les différences des quan-
» tités α_i prises deux à deux, c'est-à-dire

$$\sum(\pm \alpha_1^0\alpha_2^1\alpha_3^2\ldots\alpha_n^{n-1}) = \pm(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)$$
$$\times(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n).$$

Cette propriété des déterminants remarquée par Vandermonde a été posée comme leur définition par plusieurs géomètres. (*Voyez* le *Cours d'analyse algébrique* de M. Cauchy.)

Proposition II. « Soient données un nombre np de quantités

$$(A)\quad \begin{cases} \alpha_{1,1}, & \alpha_{2,1}, \ldots, & \alpha_{p,1}, \\ \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}, \ldots, & \alpha_{p,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, \ldots, & \alpha_{p,n}, \end{cases}$$

» et soit

$$p \geqq n;$$

» de ces quantités α déduisons les n^2 quantités

$$\begin{matrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,1}, \ldots, & \beta_{n,1}, \\ \beta_{1,2}, & \beta_{2,2}, \ldots, & \beta_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1,n}, & \beta_{2,n}, \ldots, & \beta_{n,n}, \end{matrix}$$

» en faisant

$$\beta_{i,k} = \alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + \alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \ldots + \alpha_{p,i}\alpha_{p,k}.$$

» Cela posé, le déterminant des quantités β est égal à la somme des
» carrés de tous les déterminants que l'on peut former avec n^2 quan-
» tités α, composant n colonnes verticales du tableau (A); c'est-à-dire
» que l'on a

$$\sum(\pm \beta_{1,1}\beta_{2,2}\ldots\beta_{n,n}) = \mathrm{S}\left[\sum(\pm \alpha_{i_1,1}\alpha_{i_2,2}\ldots\alpha_{i_n,n})\right]^2.$$

« le signe $\mathbf{S}$ se rapportant à toutes les combinaisons r', r'', ..., r^{n} des « nombres 1, 2, ..., p prises n à n. »

Ce théorème (et même un théorème plus général où les carrés sont remplacés par des produits) a été donné pour la première fois par M. Cauchy [*].

5. Avant d'entrer dans la question spéciale à laquelle se rapporte la proposition énoncée dans le n° 1, il faut encore rappeler les expressions du signe desquelles dépend la réalité des racines des équations algébriques. La détermination de ces expressions est une simple application du célèbre théorème de M. Sturm sur les équations algébriques. En effet, d'après le théorème de M. Sturm, le nombre N des racines réelles d'une équation $V = 0$ du $n^{\text{ième}}$ degré en x, situées entre les limites $x = A$ et $x = B$, B étant supposé $> A$, se détermine de la manière suivante :

Soit V_1 la dérivée de V, et faisons les opérations nécessaires pour développer la fraction $\frac{V}{V_1}$ dans une fraction continue. Soit pour cela

$$\begin{aligned}
V &= V_1 q_1 - V_2,\\
V_1 &= V_2 q_2 - V_3,\\
V_2 &= V_3 q_3 - V_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_{n-2} &= V_{n-1} q_{n-1} - V_n,
\end{aligned}$$

où les fonctions V_2, V_3, V_4, ..., V_{n-2}, V_{n-1}, V_n seront, en général, des degrés $n-2$, $n-3$, $n-4$, ..., 2, 1, 0. Substituons, dans ces fonctions, les valeurs A et B, et formons les deux séries

$$\begin{array}{llllll}
V(A), & V_1(A), & V_2(A), & V_3(A), \ldots, & V_{n-1}(A), & V_n(A),\\
V(B), & V_1(B), & V_2(B), & V_3(B), \ldots, & V_{n-1}(B), & V_n(B):
\end{array}$$

soient A le nombre des changements de signes qui se trouvent dans

[*] Dans le Mémoire intitulé : *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier.) Voyez aussi un travail de M. Jacobi inséré dans le tome XXII du Journal de M. Crelle, et qui contient une théorie complète des déterminants.

la première série, B′ le nombre correspondant pour la seconde série, on aura le nombre des racines réelles entre les limites $x = A$ et $x = B$

$$N = A' - B'.$$

Pour avoir le nombre de toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$, il faut donc faire $A = -\infty$, $B = +\infty$. Mais alors la question se simplifie beaucoup, puisque les valeurs des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$ ne dépendent que des coefficients de leurs plus hautes puissances. En effet, soient $v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ les coefficients des plus hautes puissances dans $V, V_1, \ldots, V_n$, c'est-à-dire v le coefficient de x^n dans V, v_1 celui de x^{n-1} dans V_1, v_2 celui de x^{n-2} dans V_2, etc. Alors les deux séries de valeurs seront de même signe terme à terme avec les deux séries

$$\begin{array}{cccccc} (-1)^n v, & (-1)^{n-1} v_1, & (-1)^{n-2} v_2, \ldots, & +v_{n-2}, & -v_{n-1}, & +v_n, \\ v, & v_1, & v_2, \ldots, & v_{n-2}, & v_{n-1}, & v_n. \end{array}$$

En désignant par α et β les nombres de changements de signes qui se trouvent dans ces séries, le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$ sera égal à

$$\nu = \alpha - \beta.$$

Mais on prouve aisément que

$$\alpha + \beta = n.$$

En effet, supposons d'abord que, dans la seconde série, il n'y ait aucun changement de signe; il y en aura nécessairement n dans la première, et il est aisé de voir que, par chaque changement de signe que la seconde série gagne, la première en perd autant : donc la somme reste invariablement égale à n. On a donc en même temps

$$\nu = \alpha - \beta,$$
$$n = \alpha + \beta,$$

et de là

$$\nu = n - 2\beta;$$

c'est-à-dire que l'équation $V = 0$ a $n - 2\beta$ racines réelles, et, partant, β paires de racines imaginaires, β désignant le nombre des change-

ments de signe dans la série

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad \ldots\quad v_{n-1},\quad v_n,$$

et v_k le coefficient de la plus haute puissance x^{n-k} de x dans la fonction V_k.

Le théorème que je viens d'énoncer n'est pas encore sous sa forme finale; pour la lui donner, il faut chercher les valeurs explicites des quantités $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$. C'est à quoi nous parviendrons facilement en ayant recours aux formules de M. Sylvester, démontrées et précisées par M. Sturm dans sa *Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester*, insérée au tome VII de ce Journal. En effet, supposons que le coefficient de x^n dans V soit $= 1$, et que les racines réelles ou imaginaires de l'équation $V = 0$ soient représentées par les lettres a, b, $c, \ldots, h$ (au nombre de n); M. Sturm donne les expressions suivantes :

$$V = (x-a)(x-b)\ldots(x-h),$$

$$V_1 = \sum (x-b)(x-c)\ldots(x-h),$$

$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2}\sum (a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h),$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3}\sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)(x-e)\ldots(x-h),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_n = \frac{1}{\lambda_n}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(b-c)^2\ldots(g-h)^2.$$

les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ étant déterminées par les formules

$$\lambda_2 = p_1^2, \qquad p_1 = n,$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \qquad p_2 = \sum (a-b)^2,$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{p_3 p_2}{p_2}\right)^2, \qquad p_3 = \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2,$$

$$\lambda_5 = \left(\frac{p_4 p_3}{p_3 p_2}\right)^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad p_n = (a-b)^2(a-c)^2\ldots(g-h)^2.$$

Ces formules nous montrent que les coefficients des plus hautes puis-

sances de x dans les fonctions V, $V_1, \ldots, V_n$, c'est-à-dire les quantités $v, v_1, \ldots, v_n$, ont les valeurs suivantes :

$$v = 1,$$

$$v_1 = n = p_1,$$

$$v_2 = \frac{1}{\lambda_2} \sum (a-b)^2 = \frac{1}{\lambda_2} p_2,$$

$$v_3 = \frac{1}{\lambda_3} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 = \frac{1}{\lambda_3} p_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = \frac{1}{\lambda_n} (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (g-h)^2 = \frac{1}{\lambda_n} p_n.$$

Mais les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ étant des fonctions symétriques des racines de l'équation $V = 0$, et, partant, des quantités réelles, les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont nécessairement positives; donc les quantités $v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ont les mêmes signes que

$$1, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n;$$

dans le théorème énoncé ci-dessus, on pourra donc substituer cette série au lieu de la série des quantités $v, v_1, \ldots, v_n$.

Ces quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ peuvent encore être représentées sous une autre forme en y appliquant les deux propositions sur les déterminants rappelées au n° 2. En effet, soit m le nombre des quantites $a, b, \ldots, f$; nous avons

$$p_m = \sum [(a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(e-f)]^2;$$

mais, d'après la proposition I du n° 2, nous savons que

$$\pm (a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(e-f)$$

est égal au déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll}
1, & 1, & 1, \ldots, & 1, \\
a, & b, & c, \ldots, & f, \\
a^2, & b^2, & c^2, \ldots, & f^2, \\
a^3, & b^3, & c^3, \ldots, & f^3, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a^{m-1}, & b^{m-1}, & c^{m-1}, \ldots, & f^{m-1};
\end{array}$$

donc p_m est la somme des carrés de tous les déterminants qu'on peut former par m colonnes verticales du tableau

$$\begin{array}{llll} 1, & 1, & 1,\ldots, & 1, \\ a, & b, & c,\ldots, & h, \\ a^2, & b^2, & c^2,\ldots, & h^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{m-1}, & b^{m-1}, & c^{m-1},\ldots, & h^{m-1}, \end{array}$$

en sorte que p_m rentre dans la catégorie des quantités dont il est question dans la proposition II du n° 2. Ainsi, d'après cette proposition, en posant

$$\beta_{i,k} = a^{i-1}a^{k-1} + b^{i-1}b^{k-1} + \ldots + h^{i-1}h^{k-1},$$

nous aurons

$$p_m = \sum(\pm\,\beta_{1,1}\,\beta_{2,2}\cdots\beta_{m,m});$$

mais $\beta_{i,k}$ n'est autre chose que la somme des puissances $i+k-2$ des racines de l'équation $V=0$: p_m est donc le déterminant des m^2 quantités [*],

$$\begin{array}{llll} s_0, & s_1, & s_2,\ldots, & s_{m-1}, \\ s_1, & s_2, & s_3,\ldots, & s_m, \\ s_2, & s_3, & s_4,\ldots, & s_{m+1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1},\ldots, & s_{2m-2}, \end{array}$$

s_k représentant la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $V=0$.

En réunissant les résultats obtenus dans ce numéro, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. « Soit proposée une équation $V=0$ du $n^{\text{ième}}$ degré; des

[*] Résultat qui coïncide avec les formules données par M. Cayley dans le tome XI de ce Journal.

» coefficients de cette équation déduisons les sommes des puissances
» de ses racines jusqu'à l'ordre $2n-2$ inclusivement, et avec ces quan-
» tités, que nous désignerons par $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2n-2}$, formons les
» quantités $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ en posant

$$p_1 = s_0 = n,$$

» p_2 égale au déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, \\ s_1, & s_2; \end{matrix}$$

» p_3 égale au déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, & s_2, \\ s_1, & s_2, & s_3, \\ s_2, & s_3, & s_4, \end{matrix}$$

» et ainsi de suite, jusqu'à p_n qui sera le déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, & s_2, \ldots, & s_{n-1}, \\ s_1, & s_2, & s_3, \ldots, & s_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, \ldots, & s_{2n-2}; \end{matrix}$$

» cela posé, l'équation $V = 0$ aura autant de paires de racines imagi-
» naires qu'il y aura de changements de signes dans la série

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n. \text{ »}$$

A ce théorème, on peut ajouter les corollaires suivants :

Corollaire 1. Dans la série

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n,$$

il ne peut y avoir que $\frac{n}{2}$ changements de signes tout au plus.

Corollaire 2. Pour que l'équation $V = 0$ ait toutes ses racines

réelles, il est nécessaire et suffisant que les quantités

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n$$

soient toutes positives.

4. Retournons à présent à la proposition énoncée dans le n° **1**, et prouvons que, pour l'équation $\Gamma = 0$, les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ sont des sommes de carrés.

L'équation $\Gamma = 0$ est le résultat de l'élimination des n inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_n$ entre les n équations

$$(1) \quad \begin{cases} gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\ gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ gx_n = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n, \end{cases}$$

ou

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Multiplions chacune de ces équations par g, puis substituons dans le second membre, au lieu de gx_1, $gx_2, \ldots$, gx_n, leurs valeurs tirées des équations (1); nous obtiendrons

$$(2) \quad \begin{cases} g^2x_1 = a''_{1,1}x_1 + a''_{2,1}x_2 + \ldots + a''_{n,1}x_n, \\ g^2x_2 = a''_{1,2}x_1 + a''_{2,2}x_2 + \ldots + a''_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^2x_n = a''_{1,n}x_1 + a''_{2,n}x_2 + \ldots + a''_{n,n}x_n, \end{cases}$$

ou

$$a''_{i,k} = a''_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\, a_{h,k}.$$

En multipliant chacune de ces équations par g, et substituant pour gx_1, $gx_2, \ldots$, gx_n leurs valeurs tirées des équations (1), nous obtiendrons un troisième système d'équations également semblable au système (1) dans lequel g sera remplacé par g^3 et les quantités $a_{i,k}$ par

$$a'''_{i,k} = a'''_{k,i} = \sum_{h} a_{h,i}\, a''_{h,k} = \sum_{h'} \sum_{h} a_{i,h}\, a_{h',h}\, a_{h',k}.$$

En continuant de cette manière, nous trouverons le système d'équations suivantes qui correspondent à la $r^{ième}$ puissance de g :

$$(r)\quad \begin{cases} g^r x_1 = a^{(r)}_{1,1} x_1 + a^{(r)}_{2,1} x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,1} x_n, \\ g^r x_2 = a^{(r)}_{1,2} x_1 + a^{(r)}_{2,2} x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,2} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^r x_n = a^{(r)}_{1,n} x_1 + a^{(r)}_{2,n} x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,n} x_n, \end{cases}$$

ou

$$a^{(r)}_{i,k} = a^{(r)}_{k,i} = \sum_{h'} \sum_{h''} \cdots \sum_{h^{(r-1)}} a_{i,h'} a_{h',h''} \ldots a_{h^{(r-2)},h^{(r-1)}} a_{h^{(r-1)},k} = \sum_{h} a_{h,i} a^{(r-1)}_{h,k},$$

toutes les sommations se rapportant aux quantités h dont chacune prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

A présent, multiplions le système d'équations (r) par $g^{r'}$, et substituons pour $g^{r'}x_1, g^{r'}x_2, \ldots, g^{r'}x_n$ leurs valeurs tirées du système d'équations (r'); le résultat devant être identique avec le système d'équations $(r+r')$, nous aurons l'équation

$$a^{(r+r')}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a^{(r)}_{h,i} a^{(r')}_{h,k},$$

qui, en substituant q et $r-q$ au lieu de r et r', devient

$$(3)\qquad a^{(r)}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a^{(q)}_{h,i} a^{(r-q)}_{h,k}.$$

Cette équation subsistera pour toutes les valeurs de q moindres que r depuis $q=1$ jusqu'à $q=r-1$. Pour ces valeurs extrêmes, il faudra faire

$$(4)\qquad a^{(1)}_{i,k} = a_{i,k}.$$

L'équation (3) subsistera même pour les valeurs $q=0$ et $q=r$ si nous faisons

$$(5)\qquad \begin{cases} a^{(0)}_{i,k} = 1, \text{ pour } i=k, \\ \qquad\quad = 0, \ i \text{ étant différent de } k. \end{cases}$$

Après avoir établi l'équation (3) pour toutes les valeurs de q depuis $q = 0$ jusqu'à $q = r$, retournons à l'équation $\Gamma = 0$. Cette équation est le résultat de l'élimination des n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les n équations (1); Γ sera donc ce que devient le déterminant

$$\sum (\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

lorsqu'on diminue les n quantités $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ de la même quantité g. On aura donc

$$\pm \Gamma = g^n - (a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n})\, g^{n-1} + \ldots,$$

et de là

$$s_1 = g_1 + g_2 + \ldots + g_n = \sum_i a_{i,i},$$

où $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont les n racines de l'équation $\Gamma = 0$. En appliquant le même raisonnement au système d'équations (r), nous obtiendrons

$$s_r = g_1^r + g_2^r + \ldots + g_n^r = \sum_i a_{i,i}^{(r)},$$

ce qui, à l'aide de l'équation (3), se transformera en

$$s_r = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k}^{(q)}\, a_{i,k}^{(r-q)}, \tag{6}$$

q ayant une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, r$. Cette équation, remarquable par sa symétrie et par sa généralité, nous conduira à la démonstration de notre théorème.

Les quantités p_m ont été définies dans le numéro précédent comme les déterminants des quantités

$$\begin{array}{llll}
s_0, & s_1, & s_2, \ldots, & s_{m-1}, \\
s_1, & s_2, & s_3, \ldots, & s_m, \\
s_2, & s_3, & s_4, \ldots, & s_{m+1}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, \ldots, & s_{2m-2}.
\end{array}$$

Or les quantités renfermées dans ce tableau, en y appliquant l'équa-

tion (6), peuvent être représentées sous la forme suivante

$$
\begin{array}{llll}
s_0 = \sum a^{0}_{i,k} a^{0}_{i,k}, & s_1 = \sum a^{0}_{i,k} a^{1}_{i,k}, & s_2 = \sum a^{0}_{i,k} a^{2}_{i,k}, \ldots & s_{m-1} = \sum a^{0}_{i,k} a^{m-1}_{i,k} \\
s_1 = \sum a^{1}_{i,k} a^{0}_{i,k}, & s_2 = \sum a^{1}_{i,k} a^{1}_{i,k}, & s_3 = \sum a^{1}_{i,k} a^{2}_{i,k}, \ldots & s_m = \sum a^{1}_{i,k} a^{m-1}_{i,k} \\
s_2 = \sum a^{2}_{i,k} a^{0}_{i,k}, & s_3 = \sum a^{2}_{i,k} a^{1}_{i,k}, & s_4 = \sum a^{2}_{i,k} a^{2}_{i,k}, \ldots & s_{m+1} = \sum a^{2}_{i,k} a^{m-1}_{i,k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s_{m-1} = \sum a^{(m-1)}_{i,k} a^{0}_{i,k}, & s_m = \sum a^{m-1}_{i,k} a^{1}_{i,k}, & s_{m+1} = \sum a^{m-1}_{i,k} a^{2}_{i,k}, \ldots & s_{2m-2} = \sum a^{m-1}_{i,k} a^{m-1}_{i,k},
\end{array}
$$

les sommes de ce tableau se rapportant à toutes les valeurs de i et de k depuis 1 jusqu'à n inclusivement. En faisant

$$\beta_{t,u} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a^{t}_{i,k} a^{u}_{i,k},$$

on a donc

$$p_m = \sum (\pm \beta_{0,0} \beta_{1,1} \ldots \beta_{m-1,m-1});$$

sous cette forme, p_m rentre dans la forme des déterminants considérés dans la proposition II du n° **2**, les $n.p$ quantités α étant ici remplacées par les $m.n^2$ quantités

$$a^{(0)}_{i,k}, \quad a^{1}_{i,k}, \quad a^{2}_{i,k}, \ldots, \quad a^{m-1}_{i,k}.$$

Nous avons donc, d'après cette proposition,

$$p_m = \mathrm{S}\left[\sum \pm a^{(0)}_{i,k} a^{1}_{i',k'} a^{2}_{i'',k''} \ldots a^{m-1}_{i^{(m-1)},k^{(m-1)}}\right]^2,$$

$i, k; i', k'; i'', k''; \ldots; i^{(m-1)}, k^{(m-1)}$ représentant m systèmes quelconques des deux indices i, k, et la somme S se rapportant à toutes les combinaisons m à m des n^2 systèmes i, k.

Voilà le résultat annoncé au n° **1**, résultat qui peut être énoncé par le théorème suivant :

Théorème. « Soit

$$\Gamma = 0$$

» l'équation du $n^{ième}$ degré en g qui résulte de l'élimination des n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$\begin{aligned}
0 &= (a_{1,1} - g)x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n,\\
0 &= a_{1,2}x_1 + (a_{2,2} - g)x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + (a_{n,n} - g)x_n;
\end{aligned}$$

» soit s_h la somme des puissances $h^{ièmes}$ des racines de cette équation, » et p_m le déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll}
s_0, & s_1, & s_2, \ldots, & s_{m-1},\\
s_1, & s_2, & s_3, \ldots, & s_m,\\
s_2, & s_3, & s_4, \ldots, & s_{m+1},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, \ldots, & s_{2m-2};
\end{array}$$

» de sorte que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les quantités des signes desquelles dépend la réalité des racines de l'équation $\Gamma = 0$; soit, de plus,

$$a'_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\,a_{h,k}, \quad a''_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\,a'_{h,k}, \ldots, \quad a^{(m-1)}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\,a^{(m-2)}_{h,k}.$$

» et formons le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
1 & 0 \ldots & 0; & 0 \quad 1 \ldots \quad 0, \ldots; \quad 0 \quad 0 \ldots \quad 1;\\
a_{1,1} & a_{2,1} \ldots & a_{n,1}; & a_{1,2} \quad a_{2,2} \ldots \quad a_{n,2} \ldots; \quad a_{1,n} \quad a_{2,n} \ldots \quad a_{n,n};\\
a'_{1,1} & a''_{2,1} \ldots & a^{(m-1)}_{n,1}; & a'_{1,2} \quad a'_{2,2} \ldots \quad a'_{n,2} \ldots; \quad a''_{1,n} \quad a''_{2,n} \ldots \quad a''_{n,n};\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a^{(m-1)}_{1,1} & a^{(m-1)}_{2,1} \ldots & a^{(m-1)}_{n,1}; & a^{(m-1)}_{1,2} \quad a^{(m-1)}_{2,2} \ldots \quad a^{(m-1)}_{n,2} \ldots; \quad a^{(m-1)}_{1,n} \quad a^{(m-1)}_{2,n} \ldots \quad a^{(m-1)}_{n,n};
\end{array}$$

» tableau qui consiste en n^2 colonnes verticales chacune de m quan-
» tités; combinons m à m ces n^2 colonnes verticales de toutes les ma-
» nières possibles, et pour chaque combinaison renfermant m^2 quantités
» formons le déterminant : que ces déterminants soient désignés par M,
» M′, M″,... ; cela posé, on aura

$$p_m = M^2 + M'^2 + M''^2 + \ldots. \text{ »}$$

5. Faisons l'application de ce théorème général au cas de $n = 3$, traité par M. Kummer. Posons, pour ce cas,

$$a_{1,1} = A, \qquad a_{2,2} = B, \qquad a_{3,3} = C,$$
$$a_{2,3} = a_{3,2} = D, \quad a_{1,3} = a_{3,1} = E, \quad a_{1,2} = a_{2,1} = F,$$

d'où l'on tire

$$A_1 = a''_{1,1} = A^2 + F^2 + E^2, \quad D_1 = a''_{2,3} = a''_{3,2} = (B + C)D + EF,$$
$$B_1 = a''_{2,2} = F^2 + B^2 + D^2, \quad E_1 = a''_{1,3} = a''_{3,1} = (A + C)E + DF,$$
$$C_1 = a''_{3,3} = E^2 + D^2 + C^2, \quad F_1 = a''_{1,2} = a''_{2,1} = (A + B)F + DE.$$

On aura donc, pour la quantité p_2, le tableau

$$\begin{array}{ccc} 1\ 0\ 0, & 0\ 1\ 0, & 0\ 0\ 1, \\ A\ F\ E, & F\ B\ D, & E\ D\ C; \end{array}$$

et pour la quantité p_3 on formera le tableau

$$\begin{array}{ccc} 1\ 0\ 0, & 0\ 1\ 0, & 0\ 0\ 1, \\ A\ F\ E, & F\ B\ D, & E\ D\ C, \\ A_1 F_1 E_1, & F_1 B_1 D_1, & E_1 D_1 C_1. \end{array}$$

De là on conclut

$$p_2 = (A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2 + 6D^2 + 6E^2 + 6F^2,$$

dans le tableau duquel on tire les carrés qui forment la valeur de p_3; il est évident qu'à chaque quantité de la troisième ligne horizontale, on peut ajouter la quantité correspondante de la seconde ligne multipliée par λ, plus la quantité correspondante de la première ligne multipliée par μ, sans altérer en aucune façon la valeur des déterminants qu'on en forme. En posant

$$\lambda = A + B + C, \quad \mu = BC + AC + AB - D^2 - E^2 - F^2,$$

on trouvera que la troisième ligne horizontale du tableau se change en

$$A'\ F'\ E', \quad F'\ B'\ D', \quad E'\ D'\ C',$$

où

$$A' = BC - D^2, \quad B' = AC - E^2, \quad C' = AB - F^2,$$
$$D' = EF - AD, \quad E' = DF - BE, \quad F' = DE - CF.$$

De là on tire la valeur suivante de p_3 :

$$p_3 = 12(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)$$
$$+ 2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + R^2,$$

ou l'on a

$$M_1 = EF' - FE', \quad M_2 = FD' - DF', \quad M_3 = DE' - ED',$$
$$N_1 = CD' - DC' - (BD' - DB'), \quad P_1 = CE' - EC' - (BE' - EB'),$$
$$Q_1 = CF' - FC' - (BF' - FB'),$$
$$N_2 = AD' - DA' - (CD' - DC'), \quad P_2 = AE' - EA' - (CE' - EC'),$$
$$Q_2 = AF' - FA' - (CF' - FC'),$$
$$N_3 = BD' - DB' - (AD' - DA'), \quad P_3 = BE' - EB' - (AE' - EA'),$$
$$Q_3 = BF' - FB' - (AF' - FA'),$$
$$R = BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA'.$$

En se rappelant les équations identiques connues,

$$FE' + BD' + DC' = 0, \quad EA' + DF' + CE' = 0, \quad AF' + FB' + ED' = 0,$$
$$EF' + DB' + CD' = 0, \quad AE' + FD' + EC' = 0, \quad FA' + BF' + DE' = 0,$$

on prouve aisément que

$$M_1 = -N_1 = N_2 + N_3, \quad M_2 = -P_2 = P_1 + P_3, \quad M_3 = -Q_3 = Q_1 + Q_2;$$

on aura donc

$$2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) = 3M_1^2 + (N_3 - N_2)^2,$$
$$2(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) = 3M_2^2 + (P_1 - P_3)^2,$$
$$2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 3M_3^2 + (Q_2 - Q_1)^2,$$

et, apres cette réduction, la valeur de p_3 prendra la forme suivante;

$$p_3 = 15(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + (N_3 - N_2)^2 + (P_1 - P_3)^2 + (Q_2 - Q_1)^2 + R^2,$$

résultat qui coïncide exactement avec celui de M. Kummer, représenté sous la forme que lui a donnée M. Jacobi dans le *Giornale Arcadico*.

Il est bon de remarquer que la valeur de p_2 n'est pas nécessaire

pour reconnaître la réalité des trois racines; car, d'après le corollaire 1 du théorème énoncé dans le n° 2, dans une équation du troisième degré, dans laquelle la quantité p_3 est positive, la quantité p_2 doit l'être également.

D'après le théorème général que nous avons démontré dans le numéro précédent, il n'y a aucune difficulté de faire pour $n = 4$ et pour les valeurs plus élevées de n également, le calcul des carrés dont la somme forme les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Ainsi, pour le cas de $n = 4$, les quantités p_2, p_3, p_4 sont respectivement représentées par une somme de 12, de 55 et de 135 carrés. Par des considérations analogues à celles qui, pour le cas de $n = 3$, ont réduit de 13 à 7 le nombre des carrés formant la valeur de p_3, on parvient également à rabaisser ces nombres 12, 55 et 135. Je n'entrerai pas dans ces détails, et je me contenterai d'avoir indiqué, pour tous les cas, les opérations nécessaires au calcul des carrés qui forment les valeurs des quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$.

SUR

LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A PLUSIEURS INCONNUES;

PAR J. LIOUVILLE.

Ayant deux équations algébriques à deux inconnues,

$$(1)\qquad f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

on peut, comme on sait, éliminer une des inconnues par la méthode des fonctions symétriques, et former de cette manière, sans aucun facteur étranger, l'équation dont l'autre inconnue dépend. Si l'on a éliminé y, par exemple, l'équation finale dont nous parlons fournira les valeurs de x. Mais comment aura-t-on ensuite les valeurs de y correspondantes, et par conséquent les groupes (x, y) qui vérifient les équations (1)? La méthode des fonctions symétriques contient-elle en soi quelque moyen simple de se compléter et de conduire aux groupes demandés? Cette question curieuse et importante peut être regardée comme un cas particulier de celle qu'Abel a résolue dans le Mémoire intitulé : *Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données* [*]. Abel réussit, en effet, à représenter, à l'aide de fonctions symétriques calculables par les coefficients p_0, q_0, etc., la racine y commune à deux équations :

$$p_0 + p_1 y + \ldots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0,$$
$$q_0 + q_1 y + \ldots + q_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

[*] Voyez les *Annales de Mathématiques* par M. Gergonne, tome XVII, page 204. J'ignore pourquoi ce Mémoire d'Abel n'a pas été compris dans l'édition en deux volumes de ses Œuvres mathématiques publiée par M. Holmboë.

qu'on sait d'avance être compatibles. Pour appliquer ces formules aux équations (1), il suffira donc de supposer que p_0, q_0, etc., sont des fonctions de x, et d'y remplacer successivement x par les diverses racines de l'équation finale obtenue en éliminant y. On aura ainsi la valeur de y qui correspond à chaque racine x. Je dis la valeur de y; car, bien qu'on puisse facilement étendre la méthode d'Abel au cas particulier où plusieurs valeurs de y répondraient à une même racine x, l'auteur a laissé de côté ce cas particulier. Nous l'imiterons en cela, et nous nous en tiendrons au cas général; mais nous suivrons du reste une marche différente pour arriver aux solutions (x, y) des équations (1). Nous introduirons dans nos calculs une indéterminée α, à peu près comme Poisson l'a fait dans son Mémoire sur l'élimination [*].

Posons donc

$$x + \alpha y = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y.$$

Les équations (1) deviendront

$$f(t - \alpha y, y) = 0, \quad F(t - \alpha y, y) = 0;$$

et, en éliminant y, on aura une équation finale en t de la forme

$$\psi(t, \alpha) = 0.$$

Mais en faisant $\alpha = 0$, on a $t = x$; l'équation qui donnera les valeurs de x est donc

$$\psi(x, 0) = 0.$$

A présent, pour trouver la valeur de y qui correspond à chaque racine x, observons que l'équation

$$x + \alpha y = t,$$

différentiée par rapport à α (dont x et y ne dépendent pas, mais dont t est fonction) donne

$$y = \frac{dt}{d\alpha}.$$

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XIe cahier, page 199.

On a d'ailleurs

$$\frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\psi}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = 0.$$

Il en résulte

$$y = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha),$$

et, par suite, en posant $\alpha = 0$:

$$y = \psi_1(x, 0).$$

Telle est l'expression de y en fonction de x. Elle est, comme on voit, très-facile à former dès qu'on connaît $\psi(t, \alpha)$. Le calcul peut d'ailleurs être simplifié en négligeant dans $\psi(t, \alpha)$ ou plutôt en se dispensant de former les termes qui sont multipliés par une puissance de α supérieure à la première; en effet, ces termes n'influent nullement sur les valeurs de x et y. Pour le démontrer, ordonnons $\psi(t, \alpha)$ par rapport aux puissances ascendantes de α, et soit

$$\psi(t, \alpha) = \psi(t) + \alpha\psi_1(t) + \alpha^2\psi_2(t) + \ldots\ldots$$

En posant $\alpha = 0$, d'où $t = x$, l'équation

$$\psi(t, \alpha) = 0$$

nous donnera d'abord

$$\psi(x) = 0,$$

ce qui déterminera x. On a ensuite, en différentiant,

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\psi_1(t) + 2\alpha\psi_2(t) + \ldots}{\psi'(t) + \alpha\psi'_1(t) + \ldots},$$

d'où, pour $\alpha = 0$,

$$\frac{dt}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{\psi_1(x)}{\psi'(x)}.$$

Ainsi les deux premiers termes de $\psi(t, \alpha)$ suffisent pour trouver x et y, et il est inutile de calculer les suivants.

Notre méthode s'étend facilement à un nombre quelconque d'équations contenant un nombre égal d'inconnues. Soient, par exemple, trois inconnues x, y, z, et trois équations

$$2) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

On introduira deux indéterminées α, β, et l'on posera

$$x + \alpha y + \beta z = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y - \beta z.$$

En portant cette valeur de x dans les équations (2), puis éliminant y et z, on aura une équation de la forme

$$\psi(t, \alpha, \beta) = 0.$$

Mais à $\alpha = 0$, $\beta = 0$ répond $t = x$. Donc l'équation qui doit fournir les valeurs de x sera d'abord

$$\psi(x, 0, 0) = 0.$$

De l'équation

$$x + \alpha y + \beta z = t$$

on tirera d'ailleurs

$$y = \frac{dt}{d\alpha}, \quad z = \frac{dt}{d\beta};$$

enfin l'équation

$$\psi(t, \alpha, \beta) = 0$$

donnera

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha, \beta),$$

et

$$\frac{dt}{d\beta} = -\frac{d\psi}{d\beta} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_2(t, \alpha, \beta).$$

En faisant donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$, il viendra

$$y = \psi_1(x, 0, 0), \quad z = \psi_2(x, 0, 0).$$

On aurait pu aussi n'introduire qu'une seule indéterminée α, poser

$$x + \alpha y + \alpha^2 z = t, \quad \text{d'où} \quad x = t - \alpha y - \alpha^2 z,$$

puis, après avoir porté cette valeur de x dans les équations (2), éliminer y et z, ce qui aurait donné un résultat de la forme

$$\psi(t, \alpha) = 0.$$

Alors on aurait eu $t = x$ pour $\alpha = 0$, et, par conséquent, l'équa-

tion en x aurait été

$$\psi(x, 0) = 0.$$

D'un autre côté, on aurait trouvé les formules

$$y + 2\alpha z = \frac{dt}{dx} = -\frac{d\psi}{dx} : \frac{d\psi}{dt} = \psi_1(t, \alpha),$$

et

$$2z = \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{d\psi_1}{dt}\psi_1 = \psi_2(t, \alpha),$$

qui, pour $\alpha = 0$, se réduisent à

$$y = \psi_1(x, 0), \quad 2z = \psi_2(x, 0),$$

et fournissent y et z pour chaque valeur de x, ce qui résout la question proposée.

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que, quel que soit le nombre des équations et des inconnues, il y aura des simplifications de calcul analogues à celles que nous avons indiquées pour le cas de deux équations. Par exemple, quand on introduit deux indéterminées α, β, en posant $x + \alpha y + \beta z = t$, on peut se dispenser de calculer en entier $\psi(t, \alpha, \beta)$; il suffira de former le terme indépendant de α, β, et les deux termes qui sont multipliés soit par α seulement, soit par β seulement: les termes en α^2, $\alpha\beta$, β^2, etc., n'influent en rien sur les valeurs de x, y, z. Mais quand on n'emploie qu'une indéterminée α et qu'on prend $x + \alpha y + \alpha^2 z = t$, il n'est permis de négliger que les termes affectés d'une puissance de α supérieure à la seconde.

Principes d'un nouveau système de moteurs atmosphériques à forces vives, avec ou sans oscillations, avec ou sans soupape;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Etant donnée une colonne liquide en mouvement dans un tuyau de conduite débouchant, par une extrémité, dans un bief supérieur qui reçoit les eaux motrices, et, par l'autre, dans le bief inférieur ou d'aval, si l'on ferme l'extrémité d'amont, il s'exercera une succion en vertu de la force vive de cette colonne, et l'on pourra utiliser la pression de l'atmosphère sur un piston d'une manière analogue à ce qui se présente dans une machine à vapeur à simple effet.

Ce problème ne peut être convenablement résolu par le bélier aspirateur, et je me propose de montrer dans quelles circonstances principales il peut l'être, *sans choc brusque,* au moyen des idées que fournit la nouvelle branche de l'hydraulique, objet de mes recherches, dont j'ai fait déjà beaucoup d'applications. On verra plus loin quels sont les avantages particuliers de ce nouveau système de moteurs.

Les combinaisons que je vais indiquer sont assez simples pour être expliquées sans figures, d'autant plus qu'il ne s'agit ici que d'exposer des principes dont les détails d'application seront développés dans un ouvrage que je prépare sur ces matières.

I.

Moteur à piston sans soupape.

L'origine du tuyau peut être tout simplement bouchée alternativement par le piston, ce qui dispensera de toute espèce de soupape, puisqu'il en tiendra lieu lui-même à l'époque voulue. Quand l'effet de la

succion sera produit, un contre-poids relevera le piston, en refoulant l'eau du bief supérieur qui s'est introduite au-dessus de ce piston pendant la descente. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que l'on n'a plus à s'occuper de la succion, dont la force, à l'époque où elle commence à agir, devra être, en général, bien plus grande que la pression du bief supérieur sur le même piston.

Lorsque le piston sera sorti du tuyau, la colonne liquide en mouvement dans l'intérieur de celui-ci sera graduellement réduite au repos en vertu de la pression de l'eau du bief supérieur, qui fera bientôt naître un mouvement en sens contraire. Alors la force vive s'emmagasinera graduellement dans l'intérieur du tuyau, par suite de l'écoulement de l'eau motrice au bief inférieur. Il n'y aura plus qu'à faire rentrer le piston dans le tuyau pour faire *travailler* l'atmosphère.

Nous avons dit que le piston avait été relevé au moyen d'un contre-poids. Il faut ajouter que ce contre-poids n'ayant plus besoin d'agir, à beaucoup près, avec la même puissance, à partir du moment où le piston, dégagé du tuyau, n'a plus à surmonter que les résistances passives, la résistance du milieu, etc., on laisse plonger ce contre-poids dans un bassin disposé à une hauteur suffisante pour qu'il ne puisse être atteint par les crues de la rivière; on donnera d'ailleurs à cette pièce mobile une densité calculée de manière à lui faire convenablement achever sa course, en venant s'enfoncer au besoin dans un vase particulier, disposé dans son bassin, d'où l'eau, brusquement chassée à la fin de cette course, amortira la percussion comme le ferait un corps mou.

Au moyen de ces précautions, il n'y aura qu'un effort minime à faire pour la rentrée du piston dans le corps de pompe, au-dessus duquel il a été soulevé, seulement de la quantité suffisante pour que l'eau du bief supérieur entre librement par l'extrémité supérieure du tuyau, convenablement évasée. La partie inférieure est évasée en vertu des expériences de Venturi et de M. Eytelwein sur l'écoulement du liquide à la sortie des tuyaux qui ne sont pas très-longs.

La méthode la plus élégante pour faire rentrer le piston consiste à disposer, le long d'une queue inférieure, un boulet ou obstacle quelconque, sur lequel la percussion de l'eau affluente augmentera de plus en plus avec la vitesse de cette eau jusqu'à ce qu'elle entraîne le piston

à l'époque voulue. Il en résulte que, du moins dans le cas où le niveau du bief supérieur serait constant, on pourrait n'avoir qu'une seule pièce mobile dans le système; car, au lieu d'un contre-poids, on pourrait disposer sur la même tige que le boulet, mais au-dessus du piston, qui devrait alors flotter par lui-même, un flotteur particulier qui sortirait de l'eau à l'époque où nous avons dit que le contre-poids devait, au contraire, s'y plonger. Si d'ailleurs je fais mention de ces circonstances, c'est parce qu'il est intéressant de conserver la trace des idées de ce genre à cause de leur simplicité, abstraction faite de leur application. Mais il y a lieu de penser que, dans les applications, le contre-poids sera préférable, et qu'il sera plus économique de faire rentrer le piston dans le tuyau au moyen d'une petite bascule hydraulique dont le travail sera insignifiant.

L'emploi de l'une des dispositions connues sous le nom de *cataracte* sera d'ailleurs d'autant plus commode, que nous n'avons, à cette époque, à nous embarrasser d'aucune oscillation, c'est-à-dire d'aucun mouvement de retour de la colonne, et que peu importe, en général, que l'on ait à chaque période un peu plus ou un peu moins de force vive emmagasinée dans le tuyau, puisqu'elle sera plus ou moins bien utilisée dans tous les cas. Au reste, j'ai donné ailleurs des moyens de régulariser les *cataractes* comme de véritables clepsydres; mais il ne s'agit, dans ce Journal, que d'exposer des principes.

II.

Moteur à piston-soupape.

Le moteur atmosphérique à forces vives, sous la forme que je viens de décrire, a l'avantage d'être d'une simplicité d'exécution qui permet de rendre compte de ses effets à priori avec plus de facilité que sous la forme suivante.

Le piston dans celle-ci est composé d'une soupape d'Armstrong ou d'un piston portant une soupape, et qui ne sort jamais du tuyau. Quand la vitesse voulue est acquise par le liquide dans ce tuyau, cette soupape se ferme en vertu de la percussion de l'eau affluente sur une de ses faces, convenablement disposée: à partir de ce moment la soupape devient piston, et la pression atmosphérique agit sur la résistance

à vanere. Quand la force vive du système est éteinte, la soupape s'ouvre par des moyens connus, et un contre-poids ou un flotteur la releve avant que la colonne liquide ait acquis de haut en bas une vitesse suffisante pour faire éprouver une résistance passive trop forte pendant le retour de cette soupape.

Il est facile de voir que cette disposition du piston, qui peut d'ailleurs être présentée sous diverses formes, a sur la précédente l'avantage de supprimer la plus grande partie du contre-poids et son bassin particulier, mais surtout de supprimer la queue inférieure du piston, et, par suite, de diminuer la profondeur des fondations pour le cas où l'on veut supprimer la cataracte. Le piston saisit la résistance, au moyen de la pression atmosphérique, à l'instant où la soupape se ferme. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur les avantages et les inconvénients de ce point particulier.

III.

Moteur à piston et à soupape cylindrique.

Au lieu de considérer le piston comme faisant alternativement fonction de soupape, je suppose qu'étant d'ailleurs plein, c'est-à-dire sans soupape, il fonctionne dans un corps de pompe particulier, sans en sortir, ce corps de pompe étant alternativement réuni au tuyau d'aspiration par une soupape cylindrique à double siége, dite *de cornwall*, qui fait alternativement de ces deux pièces fixes un seul et même tube.

Le piston sera *aspiré* comme ci-dessus à l'époque où la soupape cylindrique sera fermée. Or, pour voir comment cette soupape peut s'ouvrir d'elle-même, il suffit précisément de voir en vertu de quelle force elle sera maintenue fermée. La colonne liquide, dont le mouvement permet à la pression atmosphérique de faire *travailler* le piston, agit aussi d'une manière analogue sur la soupape cylindrique, parce que l'anneau supérieur de celle-ci dépasse d'une quantité quelconque l'anneau inférieur vers l'intérieur de cette soupape. L'aspiration est donc une cause qui tient la soupape fermée, et qui, vers l'époque de la cessation de son influence, lui permet de s'ouvrir au moyen d'un flotteur ou d'un contre-poids. Nous avons indiqué plus haut comment un piston faisant fonction de soupape pouvait être baissé au moyen de

la percussion de l'eau affluente sur des rebords convenablement disposés : ici cela est encore plus évident parce qu'il n'y a point d'attirail à mouvoir, mais seulement un contre-poids. Il y a des dispositions communes à tout cet ensemble et sur lesquelles il est inutile d'insister.

Ce système de moteur a sur le précédent l'avantage de ne pas avoir de soupape tournante. C'est à l'expérience à décider si cet avantage est essentiel.

Quant à la manière de relever le piston, elle peut être considérée sous deux points de vue. Si le niveau du bief supérieur est constant, le corps de pompe peut être prolongé au-dessus du niveau de ce bief. Alors, au moment où la soupape cylindrique s'ouvre, la pression du bief supérieur agit en même temps *sur* la colonne contenue dans le tuyau et qui résiste par son inertie, ainsi que *sous* le piston qu'elle tend à relever, et qu'elle peut, à la rigueur, relever sans contre-poids. Mais cette considération ayant peu d'importance, nous considérerons principalement le cas le plus général, celui des niveaux variables, et nous plongerons en entier le corps de pompe dans l'eau, ce qui nous permettra de *fonctionner sous la glace*, le piston étant facilement relevé au moyen d'un contre-poids, si la colonne liquide inférieure est assez longue pour résister par son inertie pendant un temps qui peut d'ailleurs être fort court.

Il est clair que l'axe du corps de pompe, et, par suite, celui du piston, au lieu d'être verticaux peuvent être horizontaux ou sous une inclinaison quelconque. Mon but n'étant ici que d'exposer des principes, je n'entrerai pas dans tous les détails. J'indiquerai seulement encore la disposition suivante en supposant l'axe du corps de pompe horizontal. La soupape cylindrique, horizontale aussi, fonctionnant toujours d'une manière analogue, on sait déjà comment le piston sera aspiré. Or il peut revenir sur ses pas sans contre-poids, si sa face opposée est en communication avec une capacité où le niveau du liquide soit inférieur à celui du bief d'aval ; car, lorsque la force vive de la colonne liquide aspirante est éteinte, la pression du bief d'aval suffit pour refouler le piston vers son point de départ, et même pour ouvrir la soupape. Dès que la soupape est entr'ouverte, la pression du bief supérieur achève de l'ouvrir en s'appuyant sur l'inertie de la colonne liquide en aval du piston. On conçoit que cette soupape peut être liée

au piston par un système de déclic analogue à ceux dont j'ai moi-même donné autre part des exemples, de telle sorte qu'étant ramenée à sa place, elle soit abandonnée à elle-même par le piston : elle reviendra ensuite, au moment voulu, se fermer par les moyens susdits. Quant au piston, il est facile de l'arrêter à la fin de sa course rétrograde, sans choc brusque, au moyen du refoulement d'une colonne liquide dans un tuyau recourbé de section convenable, formant la capacité supplémentaire que nous avons supposée derrière le piston.

J'ai pensé qu'une indication succincte de ce système de régulation ne serait pas sans intérêt. Mais, dans les applications en grand, il sera toujours facile de tenir compte des petites difficultés de régulation, au moyen de *cataractes*. Le principe de la disposition précédente est aussi applicable au corps de pompe vertical; mais celle que j'ai indiquée d'abord a l'avantage d'exiger des fondations moins profondes, le piston n'étant pas obligé de descendre au-dessous du niveau du bief inférieur quand il est relevé au moyen d'un contrepoids.

IV

Moteur à flèche oscillante sans soupape

Je suppose maintenant que le piston soit formé d'un cylindre dont les parois s'élèvent toujours au-dessus du niveau du bief supérieur. Il suffit, comme on va voir, de faire osciller verticalement ce cylindre terminé inférieurement par un cône, de manière qu'il vienne alternativement s'engager dans le tuyau fixe.

S'il n'y avait pas de résistances passives, le cylindre, enfoncé à une certaine profondeur au-dessous du niveau d'un réservoir large et profond, remonterait au-dessus, plus haut que ne l'exigerait son poids spécifique si l'état de repos était stable, puis il redescendrait à la même profondeur, et ainsi de suite indéfiniment.

Or, s'il a été engagé une première fois dans le tuyau, et qu'à cette époque il ait, en vertu de sa légèreté spécifique, été lancé de bas en haut par la pression de l'eau du bief inférieur, il sortira avec sa vitesse acquise comme une flèche ou une sorte de bombe chassée par un mortier. Cette vitesse acquise, si elle est suffisante pour compenser la perte

de travail due aux résistances passives qu'il éprouvera dans son double trajet de va-et-vient vertical, lui permettra de venir s'engager à son retour dans la bouche du tuyau d'où nous venons de le voir sortir.

On peut se rendre compte à priori de la possibilité de ces effets au moyen de la disposition suivante : si la masse solide à mouvoir, en un mot l'inertie du système, est suffisamment augmentée au moyen, par exemple, d'un contre-poids, les forces motrices restant les mêmes, on conçoit que le mouvement d'oscillation verticale du cylindre sera beaucoup plus lent, et qu'il en résultera une diminution considérable dans la résistance du milieu liquide. Or le frottement du balancier n'augmentera pas d'une manière assez notable pour détruire cette considération, dont il résulte d'ailleurs un plus grand débit d'eau motrice à chaque période, puisque l'écoulement durera plus longtemps, et, par suite, une plus grande quantité de force vive emmagasinée à chaque période dans le tuyau de conduite. Il est donc évident que cet appareil fonctionnera si les proportions sont bien déterminées par le tâtonnement, et qu'on aura véritablement un moteur à *flèche oscillante*. Il est à peine nécessaire d'ajouter que l'on peut d'ailleurs suspendre le cylindre au haut de sa course pendant un certain temps, et le décrocher au moyen d'une *cataracte*, ou même sans cataracte, par la percussion de l'eau affluente sur une surface disposée dans ce but.

Un des inconvénients de cette forme du moteur, si elle restait dans cet état, serait de ne pouvoir faire commencer l'action de la pression atmosphérique qu'au moment où le piston cylindrique entre dans la bouche du tuyau. Or il y a beaucoup de résistances industrielles qui offrent une inertie considérable à vaincre, ce qui serait ici une cause de percussion. Mais il est juste de remarquer qu'il y a aussi des résistances industrielles; telles sont, par exemple, certains frottements *utiles*, qui ne sont pas dans le même cas. Le système n° 1 du piston toujours plongé sans soupape offrait aussi un inconvénient analogue, mais bien moindre, parce qu'on peut craindre, malgré les considérations suivantes, qu'ici la masse du cylindre et de son attirail ne donne lieu à une percussion d'une espèce qui sera expliquée plus loin, tandis que nous n'avions que la masse d'un piston et de sa tige, le contre-

poids lui-même et son balancier pouvant être disposés de manière à ne pas agir *en bloc* au moment où la résistance est saisie.

Pour achever de concevoir l'action de l'eau dans ce système de flotteur, il faut voir que l'eau du bief supérieur commence à agir pour relever ce flotteur dès le moment où le cône, disposé au bas de cette pièce, cesse de boucher entièrement le tuyau. Cette eau trouve, en effet, un point d'appui sur le mouvement de bas en haut de la colonne liquide, et sur l'inertie de cette même colonne à l'origine du mouvement en sens contraire. Lorsque ensuite le flotteur redescend après avoir achevé sa course ascensionnelle, dès l'instant où il commence à boucher le tuyau, il se produit autour de son cône inférieur une augmentation de vitesse; cela ne peut avoir lieu sans une véritable succion qui l'aide à achever son entrée en augmentant sa vitesse sans action brusque. Ainsi il résulte de ces nouvelles considérations que le flotteur a, pour entrer et pour sortir du corps de pompe, en un mot pour accomplir son espèce de *révolution* verticale, une quantité quelconque de force plus grande que nous ne l'avions dit plus haut. Je n'insisterai cependant pas davantage sur cette forme du moteur, et je passerai à des considérations générales qui, seules, pourront faire sentir les avantages et les inconvénients de ces systèmes principaux, considérés comme expressions diverses du nouveau *moteur atmosphérique*.

Propriétés fondamentales du nouveau système de moteurs.

Les combinaisons de l'*hydrostatique* sont nombreuses et variées, mais elles sont loin d'être aussi nouvelles que celles de l'*hydrodynamique*. Je ne crois donc pas nécessaire de m'étendre sur les divers moyens connus de faire plonger ou émerger un cylindre par des jeux de siphons, etc., dans les cas où l'on néglige la *vitesse acquise*. Il serait facile de varier ainsi en apparence la forme du nouveau moteur dont il s'agit; mais ici, comme pour mes précédentes inventions, je me borne à rassembler en peu de mots les idées fondamentales et à indiquer le reste au lecteur, me réservant à donner les détails d'application dans des recueils spéciaux et dans l'ouvrage que je prépare.

La propriété la plus caractéristique du *moteur hydraulique atmosphérique à forces vives* consiste dans la grande quantité d'eau qu'il peut débiter sous un petit volume, relativement aux machines dans

lesquelles on considère principalement l'action du poids de l'eau, abstraction faite de la vitesse acquise; tels sont les moteurs à colonne d'eau, les flotteurs de Fontana, Bossut, Solages, Thiville, etc. En effet, dans ce nouveau système l'eau coule à plein tuyau avant d'exercer une action immédiatement utile, avec des vitesses dont la moyenne est plus ou moins grande, et que l'on peut même augmenter ou diminuer considérablement si le travail à faire n'est pas toujours le même. Cette observation fait voir immédiatement l'avantage des dispositions pour lesquelles la colonne liquide n'est pas obligée de revenir sur ses pas, ne s'arrête que pendant des instants très-courts, et peut même ne jamais s'arrêter complétement.

Dans les machines où le poids de l'eau agit directement, ou même par succion, comme dans l'ancien moteur de Westgarth par exemple, mais où la très-petite vitesse acquise n'est pas considérée, si la hauteur de la chute varie de quantités notables, la machine s'arrête, comme on sait, à moins qu'on ne change le point d'attache du balancier. Ici l'on peut avoir égard à cette circonstance sans toucher au balancier, puisqu'on est maître d'augmenter la force vive acquise à chaque période. Je dirai plus : comme, en général, la pression atmosphérique sera assez considérable par rapport aux variations de la chute motrice d'une rivière, la machine marchera toujours, même sans l'assistance d'un surveillant; seulement il y aura nécessairement à chaque période une certaine variation dans le travail : par exemple, si c'est une pompe foulante que l'on fait marcher au moyen du moteur, le piston parcourra un chemin plus ou moins grand à chaque période.

Pour bien comprendre comment les choses se passent, il faut se rappeler que c'est la vitesse de l'eau *affluente* dans le tuyau ou aux environs qui détermine la fin de chaque période. Il faudra donc qu'à chaque période il y ait une quantité donnée de force vive emmagasinée dans la colonne liquide. La variation de l'effort à exercer sur la résistance à vaincre ne portera donc que sur la variation de la pression directe provenant de la chute motrice, et non sur la pression atmosphérique dont le travail sera mis en jeu par une même colonne, aspirante en vertu de sa force vive. Si donc la résistance donnée peut encore être surmontée par cette partie de l'effort total, la machine mar-

chera, moins vite il est vrai, mais enfin elle ne s'arrêtera point. Quant au moyen proposé plus haut pour fermer à l'instant voulu le tuyau en vertu de la percussion de l'eau affluente, il est à peine nécessaire d'ajouter que, s'il ne le fait pas fermer assez vite, il est facile de lui donner plus de puissance en faisant agir cette percussion, non plus seulement d'une manière directe, mais au moyen d'un encliquetage. Si, par exemple, on dispose un ressort qui ne cède que sous une pression donnée, l'attirail quelconque à entraîner sera mis en mouvement par une force beaucoup plus considérable que si le ressort n'avait pas résisté un certain temps. Si maintenant on craint que la soupape, quand c'est un système à soupape que l'on emploie, ne vienne frapper trop fortement son siége, il sera toujours facile d'obvier à ce genre d'inconvénient par un modérateur, comme je l'ai déjà indiqué pour d'autres pièces.

Au reste, la régulation se fera toujours, si l'on veut, d'une manière très-économique au moyen d'un petit balancier hydraulique *à cataracte*, du moins lorsqu'un surveillant sera présent pour tenir compte des trop grandes variations dans les hauteurs des niveaux d'amont et d'aval. Or on sait que toutes les machines puissantes ont nécessairement un surveillant, même quand elles peuvent être rigoureusement censées marcher entièrement seules. On peut donc admettre que la même machine fera toujours, à chaque période, la même quantité de travail, tant que la chute motrice restera suffisante pour engendrer la force vive nécessaire; seulement le nombre de périodes diminuera avec la chute motrice dans un même temps donné.

Une autre propriété caractéristique du système consiste en ce que, pour de petites chutes, on se trouve, quant au genre de frottement du piston, dans des circonstances parfaitement analogues à celles des grandes chutes pour les *machines à colonnes d'eau*, qui ne sont employées, comme on sait, que pour des chutes assez considérables. En effet, l'*aspiration*, provenant de la force vive de la colonne liquide en mouvement dans le tuyau, crée en quelque sorte une grande chute, emmagasinée, pour ainsi dire, en vertu de la descente de l'eau motrice. Dans l'ancienne machine à colonne d'eau, le piston parcourt deux fois le chemin de l'eau dépensée, en supposant son diamètre égal à celui du tuyau. Or, si en définitive le frottement est proportionnel

à la pression motrice totale, de quelques parties qu'elle se compose, cependant il y a lieu de penser que les considérations précédentes, sur la modification du frottement et de son chemin, ne seront pas sans utilité, en caractérisant d'ailleurs le système d'une façon toute particulière.

Soit que le piston sorte alternativement du corps de pompe, soit qu'il n'en sorte pas, je propose de lui donner une garniture de cuir, assez ample à la circonférence pour pouvoir au besoin se soulever de bas en haut, comme pour le piston des anciennes pompes décrites par Agricola, et qui, depuis 1823, ont été reproduites sous diverses formes. On sait que, dans ces anciens systèmes, les bords du cuir se repliaient au besoin à l'intérieur du cône, soit pour donner passage à l'eau, soit pour donner passage aux immondices. Mon but, en employant ici quelque chose d'analogue dans les circonstances qui le permettront, est principalement d'avoir à ma disposition une sorte de *corps mou*, afin de diriger sur lui la percussion, ou, si l'on peut s'exprimer ainsi, la *chance de percussion* de la colonne liquide dont je vais parler, et qui n'a d'ailleurs qu'une importance très-secondaire, bien que le phénomène soit encore au nombre de ceux qui caractérisent le système.

Je suppose que la bouche d'amont du tuyau soit fermée très-rapidement, ce qui peut se présenter dans le moteur à piston-soupape n° **2**. La colonne liquide en mouvement dans le tuyau tendra à faire un vide sous le piston, surtout si la masse de celui-ci, jointe à celle de son attirail et de la quantité d'eau quelconque dont il lui faut modifier le mouvement, n'est pas très-petite par rapport à la masse de la colonne aspirante. Ceci exige quelques explications. Quant à l'eau dont nous venons de parler, elle n'est pas sans action dans tous les cas. En effet, au moment où la communication entre le tuyau et le bief d'amont est interrompue par le piston des systèmes n^os^ **1** et **2**, l'eau en mouvement dans ce bief exerce, en vertu même de ce mouvement sur le piston, une action qui n'est pas totalement perdue. Enfin si le piston est déjà doué d'une certaine vitesse de haut en bas, celle du liquide dont il s'agit est nécessairement en partie conservée.

Mais je fais abstraction de ces circonstances pour supposer au piston et à son attirail une masse telle, que leur ensemble, partant

du repos sous la pression atmosphérique et la pression directe du bief supérieur, suive avec un mouvement accéléré la colonne liquide aspirante qui fuit, par hypothèse, avec un mouvement retardé.

Comme il ne s'agit ici que d'une estimation approximative ayant pour but de rassurer sur l'effet d'une percussion, nous pouvons supposer que la masse de cette colonne liquide est toujours assez grande par rapport à celle du piston et de son attirail, afin d'admettre que la vitesse du piston est à peu près uniformément accélérée dans le vide, tandis que celle de la colonne aspirante n'a pas eu le temps de se retarder beaucoup avant d'être rencontrée par le piston. Dans cette hypothèse, il est facile de voir que le piston aura, en vertu des lois du mouvement accéléré dont il s'agit, une vitesse à peu près double de celle de la colonne au moment de leur rencontre, c'est-à-dire que la percussion se fera avec une vitesse *relative* à peu près égale à celle de cette colonne. Or la percussion se reportera sur l'espèce de *corps mou* formé par le piston de cuir dont nous avons parlé, et qui, en se repliant au besoin d'une manière analogue à celle du piston décrit dans Agricola, fera dépenser l'effet de cette percussion en changements de forme du corps flexible et en tourbillons du liquide. On voit d'ailleurs que, pour les formes du moteur qui permettront, soit un piston conique, soit un piston d'un diamètre moindre que le tuyau et d'une certaine forme, ce piston, pénétrant dans le liquide, le fera jaillir autour de lui, en dépensant l'effet de la percussion d'une manière inverse, mais analogue à ce qui se passe quand un corps en mouvement éteint sa vitesse sans choc brusque en pénétrant dans un vase conique, dont il chasse l'eau rapidement autour de lui, et que nous pourrons conserver d'ailleurs ici en partie l'avantage de la propriété particulière à la forme conique du cuir dont nous avons parlé.

Au reste, il est difficile d'admettre à priori qu'on ait à s'occuper, dans l'exécution, d'un vide proprement dit sous le piston, car la bouche du tuyau, en vertu de son évasement, dans le cas même de la suppression de toute soupape, ne sera jamais instantanément fermée; de sorte que la succion, qui s'exercera pendant que cette opération sera en train de se faire, viendra du moins en déduction des effets dont je viens de parler, et qu'il était cependant indispensable d'indiquer dans une simple exposition de principes.

Quant à la forme du moteur n° 4, il se présentera probablement un effet de ce genre, même assez important, parce qu'on a supposé qu'il pourrait être nécessaire de donner une masse considérable au flotteur. Aussi c'est une raison de plus pour indiquer simplement cette forme, comme une de celles dont il est intéressant de conserver la trace dans une exposition purement scientifique. Au reste on pourra, en général, obvier à ce genre d'inconvénients en faisant soulever au piston un flotteur qui, plongé pendant une certaine partie de sa course, sortira de l'eau assez à temps pour réduire sensiblement au repos le système solide mobile, si l'on veut qu'il accomplisse sa descente sous l'action de toute la pression atmosphérique, et vienne éteindre sa vitesse sur la surface de la colonne liquide, à l'instant où elle se réduit elle-même au repos.

Mais revenons au cas général véritablement applicable, celui où nous savons d'avance que les effets dont il s'agit ne sont pas bien importants, surtout si une partie assez considérable de la pression atmosphérique agit sur le piston, c'est-à-dire si la résistance à vaincre n'est pas trop grande relativement à l'action de la pression atmosphérique. Or, ici, il se présente un genre d'idées tout nouveau. Comment agira la pression atmosphérique sans qu'il y ait aucun vide proprement dit sous le piston?

Il est commode, pour mieux se représenter comment les choses se passent, de supposer qu'au lieu de l'atmosphère, on ait à considérer deux réservoirs de niveaux plus élevés que ne le sont, aux deux extrémités du tuyau, les niveaux des biefs supérieur et inférieur. En considérant les choses ainsi, on rentre tout naturellement dans le cas ordinaire des colonnes liquides éteignant leur mouvement en vertu de l'action des réservoirs communiquants.

En effet, sur la bouche d'aval, la pression de l'atmosphère agit en entier comme résistance à vaincre, tandis que, sur la bouche d'amont, elle est en partie contre-balancée par la résistance industrielle du travail à faire. Or nous considérons les vitesses à partir du moment où le piston a un mouvement commun avec la colonne liquide. Les choses se passent donc comme si le réservoir, qui, par hypothèse, tient lieu de la pression atmosphérique du côté d'amont, était diminué de hauteur pour tenir compte de la résistance industrielle. En définitive, il nous reste à considérer tout simplement, en général, le mouve-

ment retardé d'une colonne liquide entre deux réservoirs en communication. Or, comme cela rentre tout à fait dans mes recherches approuvées par M. Coriolis et dont il a même retrouvé les résultats par des moyens analytiques, il n'est pas nécessaire d'entrer ici dans plus de détails, puisque nous n'avons plus à considérer qu'un cas particulier de mes études précédentes sur cette matière. Il suffit de bien voir comment la force vive est directement employée sans percussion, sans solution de continuité, en repoussant la pression atmosphérique qui agit sur le bief d'aval, et en s'éteignant graduellement comme le mouvement d'un pendule, mais avec cette particularité caractéristique, qu'il n'est pas nécessaire que le liquide revienne sur ses pas, comme dans le moteur hydraulique à flotteur oscillant, de mon invention, décrit dans le tome IV de ce Journal, page 243, et que j'ai depuis essayé en grand avec succès.

L'avantage particulier du moteur que je rappelle est de n'avoir pas de piston, de remplacer le frottement d'un piston par le frottement d'une colonne liquide. Or cette propriété paraît être essentielle pour les chutes petites et peu abondantes en liquide moteur, parce qu'il semble difficile, en général, dans ce cas, d'établir un piston moteur sans qu'il y ait un peu de jeu, à moins de donner lieu à un frottement relativement considérable. Mon premier moteur hydraulique conservera donc son avantage dans beaucoup de circonstances. Mais, en vertu des principes développés ci-dessus, mon nouveau système aura souvent sur le premier des avantages essentiels, auxquels il faut ajouter celui de ne pas exiger, en général, des fondations aussi profondes. Par cette raison, les considérations relatives à la profondeur des fondations m'ont fait seulement présenter, comme développement scientifique, le second moyen de régulation du moteur aspirant n° 3, pour lequel il fallait que le piston descendît au-dessous du niveau du bief inférieur, tandis que, en général, il ne sera pas nécessaire de le faire descendre aussi bas par l'autre moyen de régulation. On conçoit même que la bouche d'amont du tuyau d'aspiration peut, en général, être disposée aussi près du niveau du bief supérieur que cela sera compatible avec la libre introduction du liquide.

J'ai publié dans ce Journal diverses expériences sur les frottements des colonnes liquides en oscillation dans les tuyaux de conduite, et je

reviendrai encore sur ce sujet. Il me suffit en ce moment de remarquer que, pour les systèmes de mouvements variables où l'eau ne revient point sur ses pas, le travail résistant en frottement est nécessairement, toutes choses égales d'ailleurs, moindre que dans les systèmes en oscillation proprement dite. Si donc nous avons ici un frottement de piston, il résulte de cette circonstance une certaine compensation qu'il était nécessaire d'indiquer, tout en reconnaissant que l'expérience seule pourra déterminer le degré d'utilité relative que chacun de mes systèmes aura dans des circonstances données.

Les roues motrices à piston et les chapelets moteurs ou élévatoires, essayés avec succès en Angleterre et en France depuis un siècle, offrent des exemples variés des formes à donner aux pistons qui entrent alternativement dans des corps de pompe courbes ou rectilignes, et qui, à certaines époques, doivent se modifier pour traverser le liquide en éprouvant le moins de résistance possible. Il suffit, dans cette Note, de remarquer la presque identité d'effet à produire. Ces systèmes sont d'ailleurs trop variés peut-être pour être discutés ici.

Quant aux dimensions à donner au tuyau de conduite, les bases du calcul exigeraient sans doute un plus grand nombre de données expérimentales, si l'on voulait embrasser l'ensemble des systèmes précédents; mais il est un cas général intéressant à considérer, parce qu'il se présente non-seulement dans une partie de ces appareils, mais aussi dans d'autres systèmes que je présenterai séparément. Je veux parler des circonstances pour lesquelles le nombre de *périodes* de la machine est à peu près en raison inverse de la longueur du tuyau de conduite dans certaines limites, et où l'on supposera que la régulation dépense une même quantité de travail à chaque période dans un temps d'ailleurs très-court. Ceci exige quelques développements.

Faisons pour un moment abstraction des résistances passives ou pertes de force vive occasionnées par l'écoulement, sous une chute motrice constante, le débit nécessaire pour engendrer une vitesse donnée dans un tuyau de conduite plongé dans le bief inférieur, sera à peu près proportionnel à la longueur développée de ce tuyau, toutes choses égales d'ailleurs. Il en sera de même, en général, à peu près ici du temps pendant lequel cette vitesse sera engendrée. Mais cela ne sera pas clair si l'on considère le frottement du tuyau de conduite. On ne

sait pas bien comment le frottement varie avec la longueur du tuyau, quand cette longueur est petite. Cependant, surtout si les résistances passives ne sont pas trop grandes, dans certaines limites on pourra négliger la considération précédente, pour un genre d'appréciation où il ne peut être évidemment question que de rassurer sur la longueur du tuyau de conduite. Si les frottements augmentent la durée relative de l'écoulement à chaque période, ils diminuent le nombre des périodes dans un temps donné. En définitive, on va voir que l'effet utile ne varie pas très-sensiblement pour des différences notables dans les dimensions cherchées, et cela suffira pour rassurer, dans le genre de recherche dont il s'agit, les personnes qui ont l'habitude de ces déterminations approximatives.

Je dis que, dans l'hypothèse ci-dessus, il faut déterminer la longueur du tuyau de conduite de manière que le travail en frottement qui en résulte soit à peu près égal, à chaque période, au travail perdu par la régulation, et, en définitive, par ce qui arrive de tout spécial à chaque changement de période [*].

On sait à priori que le tuyau doit avoir une longueur égale à un certain nombre de fois son diamètre, parce qu'il résulte de mes précédentes recherches que cela est indispensable pour tous les systèmes de machine où l'on emploie la vitesse acquise de l'eau dans un tube. Il est facile de voir ici que, si le tuyau était trop court, l'effet de l'appareil se dépenserait principalement, soit en régulation proprement dite, soit en ce qui s'y rapporte à chaque période; nous savons d'ailleurs, d'après les conditions supposées ci-dessus, que la masse du piston et de son attirail doit être petite par rapport à celle du liquide en mouvement dans le tuyau de conduite, sur la longueur duquel il s'agit seulement de rassurer à priori. Quant aux pertes de force vive provenant des phénomènes dus aux vitesses du liquide aux extrémités et au coude, nous ne nous en occuperons point dans la comparaison dont il s'agit, parce que nous supposerons, dans tous

---

[*] Il est facile de voir que cela se démontre immédiatement par le calcul différentiel; mais dans toutes les questions de mécanique appliquée, il est intéressant d'obtenir les résultats par les moyens les plus élémentaires, quand les démonstrations ne perdent rien de leur simplicité. Je reviendrai d'ailleurs ultérieurement sur ces matières.

les cas, la moyenne de ces vitesses à peu près la même pour toutes les longueurs de tuyau que nous aurons à considérer.

Cela posé, soit c la perte de travail due au frottement de l'eau dans le tuyau de conduite; en supposant que la perte de travail provenant du changement de période soit la même pour chaque période, la perte totale sera $2c$, plus la perte due à la vitesse aux extrémités, au coude, et, en un mot, aux causes purement *locales*, dont nous avons dit que, dans cette comparaison, nous n'avions point à nous occuper.

Si l'une de ces quantités c est multipliée par $1+k$, nous admettons que l'autre est divisée par $1+k$. Voyons ce qui en résulte.

Nous avons, au lieu de $2c$,

$$\frac{c}{1+k} + c(1+k) = \frac{c + c(1+k)^2}{1+k};$$

or on a

$$2c = \frac{2c(1+k)}{1+k};$$

la perte est donc changée, quant au frottement et à la régulation, dans le rapport

$$\frac{c + c(1+k)^2}{2c(1+k)} = \frac{2c + 2kc + k^2c}{2c + 2kc}.$$

Les deux premiers termes du numérateur de la dernière fraction étant identiques à ceux du dénominateur, la perte de travail due au frottement et à la régulation augmente, en définitive, de

$$\frac{k^2}{2k+2}.$$

On voit que cette augmentation n'est pas très-rapide relativement aux variations que l'on peut faire éprouver à l'une ou à l'autre des deux parties de la perte de travail considéré. Si l'une, par exemple, est doublée, l'autre restant à peu près la même, cette augmentation n'est que d'un quart en sus; il faudrait qu'elle fût à peu près quadruple, pour que cette augmentation totale fût égale à $2c$. Mais nous avons vu que cette dernière quantité n'était elle-même qu'une partie du travail résistant total, dans laquelle n'entre point la perte aux extré-

mites, et sur les causes purement *locales* de pertes de force vive telle que le coude. On voit donc que, en définitive, les augmentations de travail résistant total ne sont pas même aussi rapides que je viens de le dire, quand on s'écarte des conditions nécessaires au maximum d'effet, d'autant plus qu'il y a encore d'autres résistances que l'on peut mettre de côté dans la détermination dont il s'agit. Ainsi le travail en frottement du piston peut, au moins dans beaucoup de cas, être considéré comme proportionnel à l'effet produit.

Les considérations précédentes peuvent bien suffire pour rassurer sur la longueur du tuyau de conduite, et montrer sur quelles bases doivent être établis les calculs dont ce nouveau système de moteurs sera ultérieurement l'objet; mais l'expérience seule peut donner les valeurs numériques de ses effets, qui doivent être analogues à ceux des machines à colonne d'eau sous de grandes chutes, tout en permettant d'utiliser les chutes petites, variables et jouissant d'une grande abondance d'eau.

Conclusions.

On a depuis longtemps proposé des appareils nombreux et variés pour obtenir, au moyen d'une chute d'eau, un mouvement alternatif par des combinaisons ingénieuses appartenant, à proprement parler, à l'hydrostatique. J'en ai moi-même présenté quelques-uns à la Société Philomathique, en prévenant que je n'y attachais pas beaucoup d'importance, et que la partie véritablement nouvelle de l'hydraulique reposait sur l'étude des effets peu connus de la vitesse acquise des liquides.

Le 26 janvier 1839, j'ai présenté un moteur hydraulique à flotteur oscillant, décrit dans le tome IV de ce Journal, ayant l'avantage d'offrir au liquide les issues les plus larges à son entrée et à sa sortie, en supprimant d'ailleurs toute espèce de frottement de piston, et qui peut débiter des masses d'eau assez grandes sous un volume médiocre. Ce système, sur lequel j'ai fait beaucoup d'expériences et qui a été approuvé par l'Institut, conservera ses avantages pour les chutes assez faibles et qui ne sont pas très-puissantes.

Mais pour les chutes qui, sans être fort élevées, seront très-variables

et disposeront de quantités d'eau considérables, le *moteur atmosphérique à forces vives* sera, en général, préférable sous la forme spécialement étudiée dans cette Note, surtout quand on voudra fonctionner sous la glace.

Il est à remarquer que ce nouveau système n'est pas nécessairement à oscillations; il permet d'utiliser le mouvement varié et, même à la rigueur, non interrompu d'une colonne liquide alimentée par les eaux motrices. Cette propriété a, entre autres avantages, celui de ne pas exiger des ingénieurs aussi habiles pour une exécution en grand: mais il n'est pas aussi facile à priori de déterminer les effets des petits modèles, à cause de l'emploi des pistons.

J'ai fait, sur ce nouvel ensemble de machines, diverses communications à la Société Philomathique, depuis le commencement de 1844. Elles sont, jusqu'à un certain point, aux anciens moteurs hydrauliques à pression directe du poids de l'eau, ce que les turbines sont aux roues mues par le poids de l'eau, en ce sens qu'elles utilisent la vitesse acquise du liquide et jouissent, comme les turbines, de la propriété de fonctionner sous la glace.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. J.-H. JELLETT (DE DUBLIN).

« ... Ayant vu dans votre Journal (septembre 1846) le précis d'un Mémoire sur la quadrature des surfaces du second degré, par M. Lebesgue, je crois devoir rappeler un Mémoire sur le même sujet, que j'ai fait imprimer, il y a plus d'un an, dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal* (tome I, page 57, décembre 1845).

» On y trouvera que j'ai employé, dans la question des quadratures, les courbes que M. Lebesgue appelle *parallèles*, et que, par ce moyen, j'ai résolu cette question, tant pour les surfaces douées d'un centre, que pour les surfaces dépourvues de centre. On trouvera aussi que j'ai considéré le cas où il existe, entre les angles que M. Lebesgue appelle i, i', i'', les relations

$$\frac{\operatorname{tang} i}{a} = \frac{\operatorname{tang} i'}{b} = \frac{\operatorname{tang} i''}{c},$$

et que j'ai donné une équation entre les trois différences des zones correspondantes. Quant à l'expression de la différence entre deux zones, on peut la déduire, comme M. Roberts me l'a fait remarquer peu après la publication de mon Mémoire, des équations que j'ai posées. Mais, comme M. Lebesgue l'a donnée le premier, on doit sans doute lui attribuer cette découverte.

» Avant de quitter le problème de quadrature, je vais en donner une application assez remarquable au calcul de l'attraction d'un ellipsoïde.

» Soient α, β, γ les coordonnées du point attiré, a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde attirant, et A, B, C les composantes de l'attraction de ce corps. Soit S la surface totale de l'ellipsoïde réciproque, c'est-à-

dire de l'ellipsoïde dont les demi-axes a', b', c' vérifient les relations $aa' = 1$, $bb' = 1$, $cc' = 1$, et posons

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{d.\mathrm{S}a}{da} = \mathrm{P}a^2, \\[2ex] \dfrac{d.\mathrm{S}b}{db} = \mathrm{Q}b^2, \\[2ex] \dfrac{d.\mathrm{S}c}{dc} = \mathrm{R}c^2. \end{cases}$$

Je dis que les composantes A, B, C de l'attraction de l'ellipsoïde seront données par les formules

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \mu f\rho.b^2.c^2.\alpha.(\mathrm{Q} + \mathrm{R} - \mathrm{P}), \\ \mathrm{B} = \mu f\rho.a^2.c^2.\beta.(\mathrm{R} + \mathrm{P} - \mathrm{Q}), \\ \mathrm{C} = \mu f\rho.a^2.b^2.\gamma.(\mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R}). \end{cases}$$

En effet, a', b', c' étant les demi-axes de l'ellipsoïde réciproque, nous aurons (*voir* page 6 de mon Mémoire)

$$\mathrm{S} = 2\pi a'^2.b'^2.c'^2.\left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(b'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,(a'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(b'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,(a'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\},$$

ou, en vertu des équations $a' = \frac{1}{a}$, $b' = \frac{1}{b}$, $c' = \frac{1}{c}$,

$$\mathrm{S} = 2\pi c^2.\left\{ \begin{aligned} &\frac{b}{a}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \frac{a}{b}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\}.$$

Mais si l'on pose, dans la première des intégrales,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{c}.\operatorname{tang}\varphi,$$

et, dans la seconde,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a}{c}.\operatorname{tang}\varphi,$$

on voit facilement que les limites ne se changent pas, et l'expression devient

$$S = \frac{2\pi}{c}\cdot\left\{\frac{1}{a}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}} + \frac{1}{b}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\right\}.$$

En différentiant sous le signe $\int$, et comparant la valeur de $\frac{d.Sc}{dc}$ qu'on obtient avec les valeurs connues des composantes A, B, C (Poisson, *Mécanique*, tome I, page 190), nous aurons

$$\frac{d.Sc}{dc} = \frac{1}{2\mu f\rho}\cdot\left(\frac{A}{b^2.\alpha} + \frac{B}{a^2.\beta}\right);$$

sans nouveau calcul, on voit que

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \dfrac{d.Sb}{db} = \dfrac{1}{2\mu f\rho}\cdot\left(\dfrac{C}{a^2.\gamma} + \dfrac{A}{c^2.\alpha}\right); \\[2ex] \dfrac{d.Sa}{da} = \dfrac{1}{2\mu f\rho}\cdot\left(\dfrac{B}{c^2.\beta} + \dfrac{C}{b^2.\gamma}\right). \end{cases}$$

En tirant des équations (III) les valeurs de A, B, C, on tombe, en vertu des équations (I), sur les équations (II). Ainsi la proposition est démontrée. On voit donc que le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde ne dépend que de la quadrature de l'ellipsoïde réciproque.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ

DANS LA THÉORIE DES RÉSIDUS QUADRATIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXIV.)

Pour démontrer la *loi de réciprocité* entre deux nombres premiers impairs p et q, dans la théorie des résidus quadratiques, on peut partir de la formule élémentaire connue, et d'ailleurs facile à vérifier,

$$\frac{A^p - B^p}{A - B} = (A\rho - B\rho^{-1})(A\rho^2 - B\rho^{-2})\ldots(A\rho^{p-1} - B\rho^{-p+1}),$$

où ρ désigne une racine imaginaire de l'équation $\rho^p = 1$. En posant $B = A$, on en déduit aisément

$$p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\rho - \rho^{-1})^2(\rho^2 - \rho^{-2})^2\ldots\left(\rho^{\frac{p-1}{2}} - \rho^{-\frac{p-1}{2}}\right)^2.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{q-1}{2}$, et omettant les multiples de q, on trouve ensuite, d'après une notation de Legendre,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\,\Pi\,\frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}},$$

le signe de multiplication Π s'étendant aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ de α. Or on démontre sans peine que

$$\Pi\,\frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}} = \left(\frac{q}{p}\right);$$

il suffit, par exemple, de se rappeler le lemme de M. Gauss, relatif aux produits αq réduits à leurs résidus minima, positifs ou négatifs, par rapport au module p. En effet, soit μ le nombre de ceux de ces

résidus qui portent le signe $-$: M. Gauss prouve que

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

et, d'un autre côté, il est évident que

$$\Pi \frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}} = (-1)^{\mu}.$$

Donc

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

ce qu'il fallait démontrer. On peut aussi se passer du lemme de M. Gauss, et arriver au même résultat, sans compliquer la démonstration, en décomposant chaque facteur du produit Π à l'aide des racines de l'équation $r^q = 1$. Je me bornerai ici à cette indication générale, me réservant de revenir sur ce sujet dans une autre occasion avec tous les développements convenables; je rapprocherai alors l'analyse précédente (considérée sous les diverses formes dont elle est susceptible) des démonstrations déjà connues qui peuvent avoir avec elle quelque analogie.

De la vie de Descartes, et de sa méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

Discours prononcé à Berlin, le 3 janvier 1846. (Traduit de l'allemand.)

Messieurs,

Il y a eu dans l'histoire de l'Europe, à peu près vers l'an 1000 de l'ère chrétienne, une nuit profonde, durant laquelle le genre humain avait presque perdu jusqu'au souvenir des arts et des sciences. La dernière étincelle des lumières qu'avait répandues le paganisme était éteinte, et rien n'annonçait encore le jour nouveau. Ce qui restait de civilisation au monde ne se trouvait que chez les Sarrasins: c'était à leurs universités qu'allait s'instruire, sous un nom emprunté, un pape ami de la science; et c'en était assez pour qu'il parût un vrai prodige aux yeux de l'Occident étonné. Enfin, après que la chrétienté eut assez longtemps imploré les reliques des martyrs, elle se précipita vers la tombe du Sauveur; et elle y apprit, pour la seconde fois, que ce tombeau était vide et que le Christ était ressuscité. Elle aussi se releva; elle se tourna de nouveau vers les intérêts et l'activité de la vie; une énergie nouvelle anima le commerce et l'industrie; les villes fleurirent; une libre bourgeoisie s'établit; Cimabue retrouva l'art oublié de la peinture, et Dante, la poésie. Alors de grands et audacieux esprits, comme Abeilard et saint Thomas-d'Aquin, tentèrent d'introduire la logique d'Aristote dans la doctrine catholique; et de là sortit la philosophie scholastique. Mais si l'Église prenait les sciences sous sa protection, elle demandait, pour les formes que les sciences avaient revêtues, la même soumission sans bornes qu'elle exigeait pour ses propres dogmes. De là vint que la scholastique ne délivra pas l'esprit humain, mais qu'elle l'enchaîna pour plusieurs siècles, et l'empêcha bien longtemps de

croire qu'il fût possible de cultiver la science avec pleine indépendance. Enfin l'aurore parut; et l'humanité s'enhardit à user de ses facultés pour se faire, dans le domaine de la libre pensée, une connaissance positive des choses de la nature.

On désigne, dans l'histoire, l'époque où éclata ce nouveau jour, sous le nom de Renaissance ou résurrection des sciences. Au seuil de ces temps, nous voyons apparaître, au-dessus de tous les autres, René Descartes, qui conçut le dessein gigantesque de refaire par la base la science en toutes choses, et de soumettre à un nouvel examen tout ce qui jusque-là s'était appuyé sur l'autorité. Permettez-moi, messieurs, de vous entretenir aujourd'hui de cet homme extraordinaire et de l'histoire de son dessein, qui n'est pas moins qu'un grand événement dans les annales du monde.

Né en 1596, d'une vieille famille noble de Touraine, élevé au collége des Jésuites à la Fleche, il se trouve, à dix-huit ans, dégoûté des sciences qui ne le satisfont pas, malgré les soins assidus qu'il leur donne; et il prend la résolution de les quitter pour acquérir, dans toutes les choses de la vie, une connaissance plus sûre et plus claire. Avec d'autres jeunes gentilshommes, à Paris, il se livre durant quelque temps aux plaisirs de son âge et de sa position, et particulièrement au jeu. Mais, encore moins satisfait, il échappe à ses amis; et, dans une maison retirée du faubourg Saint-Germain, il se consacre, pendant deux années de la plus profonde retraite, aux méditations mathématiques. Enfin découvert, et voyant l'impossibilité de se soustraire au tourbillon de la société parisienne, il résolut d'étudier le monde sur un plus grand théâtre. Dans ce temps agité par la guerre, le baudrier de soldat lui sert de passe-port. D'abord il se rend à Bréda, en Hollande, pour apprendre, sous le prince Maurice, le métier de la guerre. Le prince ayant conclu un armistice de deux ans avec Spinola, Descartes se rend à Francfort pour assister au magnifique spectacle du couronnement de l'empereur Ferdinand II; puis il entre comme volontaire dans les troupes que l'électeur de Bavière levait contre la Boheme. Il commence la campagne en prenant ses quartiers d'hiver dans un petit village du duché de Neubourg, sur le Danube. Là, dans une retraite absolue, ce jeune homme de vingt-deux ans reconnaît la nécessité, s'il veut conquérir la vérité, de rejeter toutes les idées qui lui viennent du dehors, de repousser toutes les connaissances qu'il a reçues

de l'autorité, de détruire le monde entier de ses notions intellectuelles et morales et de le reconstruire plus splendide par la puissance de la raison accordée à l'homme, fils de la terre. Ce n'est pas une audace imprudente d'un orgueil téméraire. Il sent toute la difficulté de s'isoler ainsi de soi-même; et, dans une humble prière, il implore, pour cette pénible entreprise, l'appui de la sainte Vierge, et il lui promet un pèlerinage à Notre-Dame de Lorette. Alors, dans la paix de son âme, regardant comme son devoir de remettre en question tout ce qui appartient au domaine de la raison, il se réjouissait de pouvoir s'appuyer sans examen sur les vérités et les traditions religieuses.

Au printemps de 1620, le duc de Bavière conduisit ses troupes en Souabe, où Descartes profita de cette occasion pour visiter, à Ulm, l'illustre mathématicien J. Faulhaber, qui fut fort étonné de trouver dans un jeune soldat une science mathématique qui résolvait en se jouant ses plus difficiles problèmes. En septembre, il allait d'Ulm à Vienne avec l'envoyé français. Là, apprenant que son général, le duc de Bavière, a conduit ses troupes en Bohême, il retourne au camp et prend part à la fameuse bataille de Prague, après laquelle il entre dans la ville avec les vainqueurs. Ainsi son premier fait d'armes était dirigé contre le père de la princesse qui devint plus tard sa première et sa plus studieuse élève en philosophie et en mathématiques. Après avoir passé l'hiver dans la Bohême méridionale à poursuivre avec un zèle persévérant le vaste plan qu'il avait formé, il suit, au printemps de 1621, le général autrichien Bucquoy, en Hongrie, dans sa campagne contre le célèbre prince de Transylvanie, Béthlen Gabor; et il assiste au siége heureux de Presbourg et de Thyrnau. Mais la malheureuse affaire de Neuhausel, où succomba Bucquoy, le dégoûta de la guerre. Le lendemain de la levée du siége, il revint à Vienne avec plusieurs autres officiers français et wallons qui se trouvaient à l'armée; et comme, en France, la guerre contre les huguenots avait recommencé et que la peste sévissait à Paris, il prend la résolution de visiter le nord de l'Europe qui était en paix. Il revient en Moravie, va de là en Silésie, traverse toute la Pologne dont l'étendue était alors considérable, les côtes de la Baltique, la Poméranie, la Marche de Brandebourg, le Holstein, et s'embarque pour la Frise. Dans une traversée de Embden à l'Ost-Frise, il est presque assassiné par les bateliers qui ne voient avec lui qu'un seul serviteur; il revient en Hollande où il séjourne quelque

temps; et, en mars 1622, il retourne à Rennes, auprès de son père. Probablement, dans ces voyages, il a touché Kœnisberg et Berlin. Il passe un an auprès de sa famille, indécis sur le choix d'un genre de vie qui pût répondre à sa vocation et s'accommoder avec ses plans scientifiques. Revenu à Paris, où, après une peste de trois ans, on commençait à respirer un air plus pur, on l'y prit pour un rose-croix, bien qu'il n'eût jamais réussi, dans ses voyages, à découvrir la moindre trace de cette société invisible, vantée par tant de livres de ce temps. Il passait pour un des trente-six envoyés que son chef mystérieux avait répartis dans l'Europe entière, et avec qui l'on n'avait que les relations invisibles de la volonté et de la pensée. Après avoir aliéné la majeure partie des biens qui lui étaient échus du côté de sa mère, en Poitou, afin d'acheter à prix d'argent une charge importante, il résolut, avant de s'enchaîner ainsi, de visiter l'Italie. Il se rend à Venise par Bâle, Zurich, les Grisons et le Tyrol. Il y assiste au mariage du doge avec la mer. Il remplit le vœu qu'il avait fait jadis à Neubourg d'aller à Notre-Dame de Lorette. De là il passe en Piémont pour acheter, ainsi qu'il l'avait promis à son père, une charge d'intendant près de l'armée française, qui, sous le commandement du vieux connétable de Lesdiguières, se mettait en mouvement pour marcher, avec les Piémontais, contre Gênes et les Espagnols. Mais l'acquisition de cette charge ayant manqué, il part pour Rome, où se célébrait un jubilé de vingt-cinq ans; et il trouve, dans cette circonstance, l'occasion rare d'étudier les mœurs des diverses nations que cette fête réunissait, ce qui le force à renoncer à son premier plan de visiter la Sicile et l'Espagne. Il revint ensuite à Florence, où il ne vit pas Galilée, avec qui, cependant, il devait partager l'honneur d'avoir régénéré les sciences. Il assiste à la prise de Pavie par les Français et aux exploits fameux du duc de Savoie. Revenu à Turin et de là à Lyon, dans sa patrie, on lui offre la charge de lieutenant général à Châtellerault. Mais il ne peut renoncer à l'habitude qu'il a déjà prise de consacrer sa vie entière à ses recherches scientifiques. Il passe trois années, à Paris, dans la retraite et avec la plus grande simplicité qu'il pût adopter sans affectation. Nous pouvons donc nous représenter le philosophe revêtu d'un habit de taffetas gris, étoffe alors fort nouvelle, avec un chapeau à plumes, l'écharpe et l'épée, dont il ne pouvait, comme gentilhomme, se dispenser. Tantôt il s'applique aux spéculations mathématiques les plus

abstraites; tantôt il fait des expériences de physique où il acquiert une grande habileté, surtout dans le polissage des verres; tantôt il étudie profondément la mécanique, où il découvre le principe des vitesses virtuelles qui régit encore aujourd'hui toute cette matière. Puis quand il voit à combien peu de gens il peut communiquer des travaux de ce genre, il les abandonne pour se livrer à une étude qui lui semble la plus haute de toutes, celle de l'homme. Mais il trouve que moins d'esprits encore connaissent l'homme que la géométrie; et il revient toujours de plus en plus en lui-même. Déjà sa réputation lui rend impossible la solitude qu'il désire. La foule des lettrés et des savants qui veulent le connaître et l'entretenir fait de sa maison une académie. En vain il veut se cacher dans la partie la plus éloignée de la ville; un serviteur que l'on découvre le trahit. De dépit il quitte Paris, en août 1628, et se rend au siége de la Rochelle que le roi conduisait en personne; et, à cette occasion, il visite la fameuse digue du cardinal de Richelieu. Après la campagne victorieuse du roi, il revient à Paris.

Grâce à son activité, que n'avait pas même interrompue le bruit des camps, il avait déjà recueilli beaucoup de matériaux sans avoir encore rien donné au public. On doit rendre au clergé catholique de ce temps la justice de dire qu'il cultivait et aimait passionnément les sciences; ce clergé formait un louable contraste avec les protestants fanatiques dont les cris avaient fait disparaître les sciences en Allemagne. Le monde doit donc peut-être à deux cardinaux, au cardinal de Bérulle et au nonce du pape cardinal de Bagné, la jouissance des fruits que Descartes laissait depuis longtemps mûrir. Dans les soirées qui se tenaient chez le nonce, un M. de Chandoux [*] parla des principes d'une nouvelle philosophie dont l'exposition spirituelle et élégante lui attira de toutes parts les plus vifs applaudissements. Comme Descartes se taisait, et qu'on le pressait de dire sa pensée, il loua le courage de l'homme qui osait briser les chaînes de la scholastique; mais il fit remarquer quel pouvoir a la vraisemblance pour se mettre à la place de la vérité. Si l'on veut, ajoutait-il, comme le font en général les gens éclairés, se contenter de la vraisemblance, on court risque

[*] Ce M. de Chandoux se livra plus tard, comme tant d'autres durant les guerres civiles de France, à la fabrication de la fausse monnaie, et il finit par être pendu en place de Grève.

de prendre le faux pour le vrai sur la foi de principes apparents, et réciproquement, de se méprendre sur le vrai en le croyant faux. Pour preuves de ces remarques, il demanda à la société qu'on lui proposât une assertion généralement tenue pour incontestable, et il se chargeait de démontrer qu'elle était fausse, par douze arguments plus plausibles les uns que les autres. Ensuite il prit une proposition regardée comme parfaitement fausse, et il avança douze arguments plausibles pour démontrer à son auditoire qu'elle était parfaitement juste. On lui demanda s'il n'y avait aucun moyen de se garantir des faux principes; et il répondit en désignant sa méthode tirée du sein des mathématiques. Dans plusieurs conversations intimes, il avait enthousiasmé le cardinal de Bérulle pour cette méthode et ses applications, qui tendent à l'amélioration du bien-être matériel de la société; car alors il cherchait à accroître, par le perfectionnement de la mécanique, l'effet du travail de l'homme; et cette pensée est devenue aujourd'hui une réalité qui gouverne le monde.

Le pieux cardinal usa de son autorité morale, et il rendit Descartes responsable devant Dieu du tort qu'il faisait à l'humanité en lui dérobant le fruit de ses travaux; il lui refusa, s'il persistait, l'appui du ciel. Descartes se décida donc à terminer du mieux qu'il pourrait son ouvrage, à le publier; et, pour se consacrer tout entier à cette grande entreprise, il résolut de se soustraire à la société de Paris. Il se retire en Hollande, dont le climat plus froid lui convient. Il vécut plus de vingt ans dans ce pays sans se fixer définitivement nulle part. Il y est errant comme les Israélites dans le désert, transportant son domicile d'un lieu à un autre, pour un temps plus ou moins long, dans les villages, dans les hôtels, dans les faubourgs les plus retirés des grandes villes, caché à tous, et cependant en commerce très-actif avec les esprits les plus distingués de son temps, et entretenant ces relations par l'intermédiaire de son vieil ami, le P. Mersenne, à Paris, son ancien camarade à la Flèche, et qui, seul, connaissait sa retraite. Le parloir du cloître des Minimes, sur la place Royale, était le centre des discussions les plus savantes : là Mersenne communiquait les réponses de l'oracle que l'on avait demandées par son intermédiaire, et il recevait en retour ou des questions nouvelles ou des objections.

Retiré en Hollande, Descartes s'y consacre avec un redoublement de zèle aux expériences d'optique, de chimie et de physique, qu'il en-

tremêle à des recherches d'anatomie et de médecine à des observations d'astronomie et à des spéculations métaphysiques. Le phénomène des deux soleils le conduisit à étudier la météorologie entière, et particulièrement l'arc-en-ciel. Dans un petit voyage qu'il fit en Angleterre, il eut l'occasion d'observer, à Londres, l'aiguille aimantée; il voulait comprendre toutes ses recherches dans un livre qu'il intitulait *le Monde*, et dans lequel il s'efforçait d'expliquer et d'éclaircir la nécessité de toute la création. Pour se mettre à l'abri des objections théologiques, il rechercha la forme, qu'indépendamment du monde réel, dont il faisait une complète abstraction, aurait dû prendre un monde dans lequel Dieu laisserait agir les lois naturelles de la matière abandonnée au désordre du chaos. Il donna d'abord une description de cette matière, en ne lui accordant que les qualités les plus simples. Ensuite il expliqua les lois de la nature, et démontra que nécessairement, si Dieu avait créé plusieurs mondes, ces lois devraient être les mêmes pour tous sans exception. Il fit voir ensuite comment ce chaos informe devait devenir un ciel avec un soleil et des étoiles fixes, des planètes et des comètes. Il exposa la nécessité et la nature de la lumière du Soleil et des étoiles fixes, comment elle parcourt en un instant les espaces immenses des cieux, et comment les planètes doivent la réfléchir. Il décrivit la substance, la situation diverse, le mouvement et les propriétés spéciales des corps célestes, de façon à ce qu'on pût reconnaître qu'il n'y a rien dans le monde qui ne soit comme il doit être. Ensuite il descendit sur la terre : il dit comment ses diverses parties doivent tendre vers son centre; comment la position de la terre, relativement au soleil et à la lune, produit le flux et le reflux, le grand courant qu'on remarque sous les tropiques de l'est à l'ouest, et les vents alizés; comment, d'après les lois de la nature, se forment les montagnes, les sources, les mers, les rivières, les métaux dans les flancs des montagnes; comment se produisent tous les corps composés; comment se développe le monde des plantes. Puis il passe à l'organisation des animaux, à l'homme; mais il reconnaît qu'il lui manque encore, pour comprendre à fond les lois de cet organisme, bien des notions chimiques et anatomiques. Cependant, de toutes ces transformations de la matière, l'âme pensante ne peut sortir; et il faut, pour la créer, une nouvelle intervention de Dieu. Descartes veut terminer son ouvrage en exposant quelle est l'essence de l'esprit.

La hardiesse de cette entreprise nous étonne. Échappé des prisons de la scholastique, l'esprit, qui s'est retrouvé, boit à longs traits l'air divin de la libre science; il veut d'un pas rapide traverser en sa joie la carrière infinie du savoir; et, comme le but dernier de toute connaissance reste encore obscur pour lui dans un très-lointain horizon, il croit déjà qu'il peut l'atteindre, et il s'élance dans sa fragile nacelle.

Le 17 février 1600, Jordano Bruno avait été brûlé vif à Rome, sur la place de Flore, en face du théâtre de Pompée, où ses juges étaient plus tremblants que lui. Le 9 février 1619, Vanini était étranglé, à Toulouse, après qu'on lui eut arraché la langue avec des tenailles; et son corps était réduit en cendres. Campanella avait été enfoui dans un cachot, et la torture extraordinaire lui avait été infligée sept fois, dont une entre autres avait duré quarante heures de suite. Mais rien, à ce qu'il paraît, ne fit autant d'impression sur Descartes qu'une nouvelle qu'il reçut au moment où il revisait pour la dernière fois son *Monde*, afin de l'envoyer au P. Mersenne qui l'attendait impatiemment. Il apprit que Galilée, dont la gloire remplissait l'Europe, était, malgré l'amitié et la profonde estime que le grand-duc de Toscane avait pour lui, livré à l'inquisition, et qu'il avait dû abjurer à genoux, comme une hérésie, la doctrine qui met la terre en mouvement autour du soleil immobile. Alors il s'éleva dans l'âme de Descartes une douloureuse anxiété qu'il ne parvint jamais à dompter tout à fait. Il était convaincu de la vérité du système de Copernic comme de sa propre existence; mais il n'était pas moins convaincu de l'infaillibilité du pape. Dans cette situation critique, il se résout cependant à imprimer son ouvrage. Ce qui pouvait alors n'avoir été dans Copernic qu'une vue encore incertaine du génie a été confirmé pleinement depuis par les travaux accumulés de deux siècles; et une libre investigation a conquis bien des connaissances qui alors ne pouvaient même pas être soupçonnées. Dans des temps plus heureux, où l'on ne poursuit plus le génie par les traits d'une censure qui va jusqu'au bûcher, il nous est permis de croire au système du monde de ce noble esprit, de l'illustre investigateur que nous appelons avec orgueil notre compatriote, à ce système qui nous indemnise largement de toutes les erreurs passées.

Descartes avait pris la résolution de ne publier aucun de ses ouvrages de son vivant; mais ses amis parvinrent à l'ébranler, et, dans l'année 1637, parut à Leyde son premier grand ouvrage pour lequel

il recevait de France, gouvernée à cette époque par l'illustre cardinal fondateur de l'Académie française, un très-honorable privilége qui lui permettait de faire imprimer en France ou hors de France, non-seulement cet ouvrage, mais encore tous ceux qu'il pourrait écrire à l'avenir. Cette protection forme un heureux contraste avec les persécutions qu'il avait à souffrir à l'Université d'Utrecht, de la part des théologiens protestants qui maudissaient ses doctrines comme athées et dangereuses pour l'État, et contre lesquels il ne trouvait d'appui que dans la sagesse du prince Maurice d'Orange. Peu d'années auparavant, les théologiens protestants de l'Université de Tubingue en chassaient notre grand Képler, et lui refusaient la permission de publier ses ouvrages astronomiques, que les jésuites d'Inspruck devaient faire imprimer à leurs frais. Ils l'excluaient de la communion, lui qui peut être regardé comme le martyr de la foi protestante, qu'il soutint énergiquement à la cour de l'Empereur, parce que, uniquement fidèle à la Confession d'Augsbourg, il ne voulait pas jurer les articles du concordat et maudire les calvinistes; ils lui interdisaient, comme laïc, la lecture de la Bible; et ils allaient presque jusqu'à brûler sa mère comme sorcière, et Képler ne pouvait l'arracher de leurs mains que par son plaidoyer audacieux devant les juges, et par sa haute position de mathématicien de l'Empereur.

Le livre de Descartes renfermait quatre ouvrages : le Traité de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. Il voulait, dans ces trois derniers ouvrages, donner un spécimen de sa Méthode appliquée à un sujet purement physique, à un sujet purement mathématique et à un sujet mixte. Sa Géométrie a changé la face des sciences mathématiques; elle a délivré la géométrie de la domination des figures, qui ne donnaient que des idées particulières, et en a fait un objet de calcul général. Nous trouvons, dans sa Dioptrique, les premiers traits de cette théorie de la lumière à laquelle les physiciens sont revenus de nos jours, et par laquelle seule ils peuvent expliquer les lois merveilleuses de la réfraction simple et double, de la formation des couleurs, je veux dire la théorie des ondulations, qui suppose non qu'une matière sortie du corps lumineux se meut jusqu'à notre œil, mais qu'un éther propre à la lumière éprouve des vibrations. Mais ici, messieurs, je vous

demanderai la permission de vous entretenir quelques instants de plus de sa Méthode : c'est le nom qu'on donne habituellement au premier des quatre ouvrages que je viens de rappeler, dans lequel il nous fait la description de son projet, et qui, par son style simple et noble, est en même temps un monument de la langue et de la littérature française que rien n'a surpassé.

« Le bon sens, dit-il, en commençant sa Méthode, est la chose du monde la mieux partagée; car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux mêmes qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose, n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils n'en ont. » En quoi Descartes ne veut pas soutenir que tous se trompent; mais cela montre, suivant lui, que la raison est naturellement égale en tous les hommes, et que la diversité de nos opinions vient seulement de ce que nous conduisons nos pensées par diverses voies et ne considérons pas les mêmes choses. Mais il croit avoir eu le bonheur de s'être rencontré, dès sa jeunesse, en certains chemins qui l'ont conduit à une sûre méthode, et lui ont donné les moyens d'élever peu à peu sa connaissance au plus haut point auquel la portée de son esprit et la courte durée de la vie humaine lui permettent d'atteindre. Aussi, pour savoir par l'opinion publique s'il ne se trompe point, il veut faire voir les chemins qu'il a suivis, et représenter sa vie entière comme en un tableau. Son ouvrage ne renfermera point des préceptes généraux que chacun doive suivre; il ne le propose que comme une histoire, ou, si l'on aime mieux, comme une fable, où chacun pourra prendre ce qui lui semblera convenable pour lui-même.

« J'ai été nourri aux lettres dès mon enfance, continue-t-il [*]; et comme on me persuadait que, par leur moyen, on pouvait acquérir une connaissance claire et assurée de tout ce qui est utile à la vie, j'avais un extrême désir de les apprendre. Mais sitôt que j'eus achevé tout ce cours d'études savantes, je me trouvai embarrassé de tant de doutes et d'erreurs, que je me parus seulement plus ignorant qu'auparavant. Et néanmoins, j'étais en l'une des plus célèbres écoles de l'Europe où je pensais qu'il devait y avoir de savants hommes, s'il y

[*] Quoique Descartes semble ici reprendre directement la parole, ce n'est pas cependant une simple citation qu'a faite M. Jacobi : il a abrégé et parfois modifié un peu le texte. (*Note du traducteur.*)

en avait en aucun endroit de la terre. J'y avais appris tout ce qu'on y pouvait apprendre; et, en outre, j'avais parcouru tous les livres traitant les matières les plus difficiles et les plus mystérieuses que j'avais pu me procurer. On me comptait parmi les meilleurs écoliers, bien qu'il y en eût déjà entre eux quelques-uns qu'on destinât à remplir les places de nos maîtres. Enfin notre siècle me semblait aussi florissant et aussi fertile en bons esprits qu'ait été aucun des précédents : ce qui me faisait prendre la liberté de juger par moi de tous les autres, et de penser qu'il n'y avait aucune doctrine dans le monde qui fût telle qu'on m'avait auparavant fait espérer.

» Je ne laissais pas toutefois d'estimer les exercices auxquels on se livre dans les écoles. Je savais que les langues qu'on y apprend sont nécessaires pour l'intelligence des livres anciens, que la gentillesse des fables réveille l'esprit, que les actions mémorables des histoires le relevent, et qu'étant lues avec discrétion, elles aident à former le jugement; que la lecture de tous les bons livres est comme une conversation avec les plus honnêtes gens des siècles passés, et même une conversation étudiée, en laquelle ils ne nous découvrent que les meilleures de leurs pensées. Je ne méconnaissais pas la force de l'éloquence, la beauté de la poésie; ni, dans les mathématiques, des inventions très-utiles qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes. Je savais que les écrits qui traitent des mœurs contiennent plusieurs enseignements et plusieurs exhortations à la vertu qui sont fort utiles, que la théologie enseigne à gagner le ciel, que la philosophie donne moyen de parler vraisemblablement de toutes choses et se faire admirer des moins savants, que la jurisprudence et la médecine apportent des honneurs et des richesses à ceux qui les cultivent; et enfin qu'il est bon de les avoir toutes examinées, même les plus superstitieuses et les plus fausses (l'astrologie et l'alchimie), afin de connaître leur juste valeur et se garder d'en être trompé.

» Mais je croyais avoir déjà donné assez de temps aux langues et même à la lecture des livres anciens; car c'est quasi le même de converser avec ceux des autres siècles que de voyager. Lorsqu'on emploie trop de temps en voyage, on devient enfin étranger en son pays; et, lorsqu'on est trop curieux des choses qui se pratiquaient aux siècles passés, on demeure ordinairement fort ignorant de celles qui se pratiquent

en celui-ci. J'estimais fort l'éloquence et j'étais amoureux de la poésie: mais je pensais que l'une et l'autre étaient des dons de l'esprit plutôt que des fruits de l'étude. Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons; mais je m'étonnais de ce que, leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti dessus de plus ferme et de plus solide. Comme, au contraire, je comparais les écrits des anciens païens à des palais fort superbes et fort magnifiques, qui n'étaient bâtis que sur du sable et sur de la boue. Ils élevent fort haut les vertus et les font paraître estimables parmi toutes les choses qui sont au monde; mais ils n'enseignent pas assez à les connaître; et souvent ce qu'ils appellent d'un si beau nom n'est qu'une insensibilité, ou un orgueil, ou un désespoir, ou un parricide. Je révérais notre théologie, et prétendais autant qu'aucun autre à gagner le ciel; mais ayant appris comme chose très-assurée que le chemin n'en est pas moins ouvert aux plus ignorants qu'aux plus doctes, et que les vérités révélées qui y conduisent sont au-dessus de notre intelligence, je n'eusse osé les soumettre à la faiblesse de mes raisonnements. Je ne dirai rien de la philosophie, sinon que, voyant qu'elle a été cultivée par les plus excellents esprits qui aient vécu depuis plusieurs siècles, et que, néanmoins, il ne s'y trouve encore aucune chose dont on ne dispute, et, par conséquent, qui ne soit douteuse, je n'avais point assez de présomption pour espérer d'y rencontrer mieux que les autres; et que, considérant combien il peut y avoir de diverses opinions, touchant une même matière, qui soient soutenues par des gens doctes, sans qu'il y en puisse avoir jamais plus d'une seule qui soit vraie, je réputais presque pour faux tout ce qui n'était que vraisemblable: puis, pour les autres sciences, d'autant qu'elles empruntent leurs principes de la philosophie, je jugeais qu'on ne pouvait rien avoir bâti qui fût solide sur des fondements si peu fermes; et ni l'honneur ni le gain qu'elles promettent n'étaient suffisants pour me convier à les apprendre: car je ne me sentais point, grâce à Dieu, de condition qui m'obligeât à faire un métier de la science, pour le soulagement de ma fortune; et, quoique je ne fisse pas profession de mépriser la gloire en cynique, je faisais néanmoins fort peu d'état de celle que je n'espérais point pouvoir acquérir qu'à faux titre.

» C'est pourquoi sitôt que l'âge me permit de sortir de la sujétion de

mes précepteurs, je quittai entièrement l'étude des lettres; et, me résolvant de ne chercher plus d'autre science que celle qui se pourrait trouver en moi-même, ou bien dans le grand livre du monde, j'employai le reste de ma jeunesse à voyager, à voir des cours et des armées, à fréquenter des gens de diverses humeurs et conditions, à recueillir diverses expériences, et à m'étudier moi-même dans les rencontres que la fortune me proposait. Il est vrai que pendant que je ne faisais que considérer les mœurs des autres hommes, je remarquais quasi autant de diversité que j'avais fait auparavant entre les opinions des philosophes, en sorte que j'apprenais à ne rien croire trop fermement de ce qui ne m'avait été persuadé que par l'exemple et par la coutume. Et ainsi je me délivrai peu à peu de beaucoup d'erreurs. Mais après que j'eus employé quelques années à étudier ainsi dans le livre du monde, je pris un jour la résolution d'étudier aussi en moi-même, et d'employer toutes les forces de mon esprit à choisir les chemins que je devais suivre; ce qui me réussit beaucoup mieux, ce me semble, que si je ne me fusse jamais éloigné ni de mon pays ni de mes livres.

» J'étais alors en Allemagne, où l'occasion des guerres qui n'y sont pas encore finies m'avait appelé, et comme je retournais du couronnement de l'Empereur vers l'armée, le commencement de l'hiver m'arrêta en un quartier où, ne trouvant aucune conversation qui me divertît, et n'ayant d'ailleurs par bonheur aucuns soins ni passions qui me troublassent, j'avais tout le loisir de m'entretenir de mes pensées; entre lesquelles l'une des premières fut que je m'avisai de considérer que souvent il n'y a pas tant de perfections dans les ouvrages composés de plusieurs pièces et faits de la main de divers maîtres, qu'en ceux auxquels la main d'un seul a travaillé. Notre science me parut comme un ouvrage de ce genre; je pensai que, dans notre enfance, il nous a fallu d'abord être gouvernés par nos appétits et nos précepteurs, qui étaient souvent contraires les uns aux autres, et qui, ni les uns ni les autres, ne nous conseillaient peut-être pas le meilleur. Il est presque impossible que nos jugements soient si purs ni si solides qu'ils auraient été si nous avions eu l'usage entier de notre raison dès le point de notre naissance, et que nous n'eussions jamais été conduits que par elle. Je crus donc que je ne pouvais mieux faire que d'entreprendre une bonne fois d'ôter de ma créance toutes les opinions que j'avais reçues jusqu'alors, afin d'y en remettre par après ou

d'autres meilleures, ou bien les mêmes, quand je les aurais ajustées au niveau de la raison. Bien que je remarquasse en ceci diverses difficultés, elles n'étaient point toutefois sans remède, ni comparables à celles qui se trouvent en la réformation des moindres choses qui touchent le public. Ces grands corps sont trop malaisés à relever étant abattus, ou même à retenir étant ébranlés, et leurs chutes ne peuvent être que très-rudes. Puis, pour leurs imperfections, l'usage les a sans doute fort adoucies; et, enfin, elles sont quasi toujours plus supportables que ne serait leur changement. Aussi, je ne saurais aucunement approuver ces humeurs brouillonnes et inquiètes, qui, n'étant appelées ni par leur naissance ni par leur fortune au maniement des affaires publiques, ne laissent pas toujours d'y faire, en idée, quelque nouvelle réformation; et si je pensais qu'il y eût la moindre chose en cet écrit par laquelle on me pût soupçonner de cette folie, je serais très-marri de souffrir qu'il fût publié. Jamais mon dessein ne s'est étendu plus avant que de tâcher de réformer mes propres pensées et de bâtir dans un fond qui est tout à moi. Que, si mon ouvrage m'ayant assez plu, je vous en fais voir ici le modèle, ce n'est pas pour cela que je veuille conseiller à personne de l'imiter. Ceux que Dieu a mieux partagés de ses grâces auront peut-être des desseins plus relevés: mais je crains bien que celui-ci ne soit déjà trop hardi pour plusieurs. Et le monde n'est quasi composé que de deux sortes d'esprits auxquels il ne convient aucunement, à savoir: de ceux qui, se croyant plus habiles qu'ils ne sont, ne se peuvent empêcher de précipiter leurs jugements, ni avoir assez de patience pour conduire par ordre toutes leurs pensées, d'où vient que, s'ils avaient une fois pris la résolution de s'écarter du chemin commun, ils demeureraient égarés toute leur vie; puis de ceux qui, ayant assez de raison et de modestie pour juger qu'ils sont moins capables de distinguer le vrai d'avec le faux que quelques autres, doivent bien plutôt se contenter de suivre les opinions des autres qu'en chercher eux-mêmes de meilleures. Et, pour moi, j'aurais été sans doute du nombre de ces derniers: mais, par suite de la grande diversité de croyances et de mœurs que mes études et mes voyages m'avaient appris à connaître, je ne savais de quel côté me tourner, et je me trouvai comme contraint de me conduire moi-même.

« Mais, comme un homme qui marche seul et dans les ténèbres, je me résolus d'aller si lentement et d'user de tant de circonspection en

toutes choses, que, si je n'avançais que fort peu, je me garderais bien au moins de tomber. Même je ne voulais point commencer à rejeter tout à fait mes anciennes opinions, que je n'eusse auparavant employé assez de temps à faire le projet de l'ouvrage que j'entreprenais, et à chercher la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes les choses dont mon esprit serait capable. Et comme la multitude des lois fournit souvent des excuses aux vices, en sorte qu'un État est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées; ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants :

» Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle, c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute;

» Le deuxième, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre;

» Le troisième, de conduire par ordre mes pensées en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degré, jusqu'à la connaissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres;

» Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je pusse être assuré de ne rien omettre. »

Tels sont les fondements de la logique cartésienne, les règles très-simples de la méthode d'après laquelle il a entrepris de réformer les sciences tout entières. Mais, comme un homme qui veut rebâtir sa maison doit chercher, en attendant, un toit pour s'abriter, il se forma, pour cet intervalle de temps, afin que l'indécision de ses opinions, suspendue jusqu'à ce qu'il eût reconstruit le nouvel édifice de la science, n'influât pas sur ses actions, une morale provisoire qui ne consistait également qu'en trois ou quatre maximes.

La première maxime était d'obéir aux lois et aux coutumes de son pays, de demeurer fidèle à sa religion, et de se conduire en toutes

choses par l'opinion des gens les plus sages qu'il pourrait rencontrer et les plus éloignés de tout extrême. Et afin de connaître la véritable opinion de ces sages, il regarda plus à ce qu'ils faisaient qu'à ce qu'ils disaient, non-seulement parce qu'à cause de la corruption des mœurs peu de gens disent ce qu'ils pensent réellement, mais aussi parce que plusieurs l'ignorent eux-mêmes.

Sa deuxième maxime fut d'être aussi résolu que possible dans toutes ses actions, quand bien même l'opinion qui servirait de fondement à sa conduite serait douteuse.

La troisième maxime était de se vaincre soi-même, de ne pas combattre la fortune, et de penser à changer ses propres désirs plutôt que le cours des choses; de croire que rien ne nous appartient et n'est en notre pouvoir que nos pensées, et de considérer les biens qui ne nous manquent pas par notre faute, comme aussi inaccessibles ou aussi peu regrettables que la possession de la Chine ou du Mexique. Alors nous ne souhaiterions pas plus la santé quand nous sommes malades, ou la liberté quand nous sommes prisonniers, que nous ne souhaiterions d'avoir des corps de diamant ou des ailes comme les oiseaux. Mais Descartes comprend qu'il faut une longue pratique et une application répétée pour s'habituer à considérer toutes les choses d'un tel point de vue; et il croit avoir trouvé, selon lui, le secret de ces anciens sages qui savaient se soustraire à l'empire du destin et qui, malgré les douleurs et la misère, étaient plus riches, plus libres, plus forts que les autres hommes et disputaient de félicité avec les dieux mêmes.

Pour conclusion de cette morale, il examine les professions des autres hommes, et il ne trouve rien de mieux à faire que de rester fidèle à la sienne, et de consacrer sa vie entière à la culture de sa raison et à la recherche de la vérité, que sa Méthode lui donne le moyen de découvrir, parce que rien n'est comparable au bonheur que lui assurent les progrès qu'il fait chaque jour dans la science, et qu'il doit à sa Méthode; et, comme c'est une loi de la nature que notre volonté recherche ou fuie ce que la raison lui présente comme bon ou comme mauvais, il est persuadé qu'avec la connaissance profonde et exacte des choses, il acquerra tous les biens et toutes les vertus: et cette conviction, cette espérance, le remplissent du contentement le plus pur et de la plus haute félicité.

Après avoir mis de côté ces diverses matières, comme autant d'ar-

ticles de foi tout à fait inébranlables, il crut pouvoir se délivrer de toutes ses autres opinions sans exception; mais, pour élever le nouvel édifice, il voulut attendre un âge un peu plus mûr. Jusqu'à ce moment, il veut consacrer son temps à la seule science qui a des principes et des preuves certaines, les mathématiques; et par là il exerce son esprit à s'appliquer à la vérité seule, et à ne pas se contenter de principes purement plausibles. Il gagne une connaissance plus profonde des phénomènes de la nature, en appliquant les mathématiques à la physique, en faisant des observations et des expériences; il se perfectionne d'autant plus dans la pratique de sa Méthode, et il repousse toujours davantage les anciens préjugés et les vieilles opinions. puis, quand il a atteint l'âge mûr, pressé, par de pieux cardinaux, comme nous l'avons vu, de publier son système et ses découvertes, devoir sacré qu'on lui impose, il est arrivé enfin à poser la base de la nouvelle philosophie. Mais, comme il a détruit le monde entier de ses idées antérieures, tout chancelle; il ne sent plus le sol sous ses pieds : dans cette mer de doute et d'ignorance, où trouvera-t-il la première proposition, l'absolue certitude, qui soit la base de son édifice? Doit-on s'étonner qu'un homme qui a consacré son être entier à la pensée, ne trouve qu'une seule chose inébranlable, plus sûre que sa propre existence, ou qui, du moins, rend seule son existence certaine, à savoir qu'il pense? Ainsi donc, il pose pour premier principe de sa philosophie :

« Je pense, donc je suis : *cogito, ergo sum.* »

Ce mot a été le point de départ de la nouvelle philosophie; c'est l'inscription du drapeau sous lequel il pousse la science à marcher en avant. L'homme sent alors ce qu'est son essence; les nuages de la scholastique sont déchirés; le soleil de la pensée se lève sur un nouveau monde, où nous voyageons encore aujourd'hui. Ce n'est pas une insurrection aveugle et violente contre l'État et la religion; c'est la tranquille assurance d'un esprit qui a conscience de lui-même, et qui peut résoudre dans l'État et la religion, et avec tous deux, tous les problèmes qu'y trouve l'esprit humain. La modération pleine de sagesse, jointe à une sorte d'enthousiasme, c'est surtout ce qui distingue Descartes, et Rome elle-même n'a placé ses écrits dans l'*Index*, qu'avec une addition très-atténuante (*donec corrigantur*, 22 nov. 1663).

Je n'ai pas l'intention de dérouler ici, devant vous, le système complet que Descartes a développé dans les dernières parties de sa Méthode, et plus tard dans ses Principes. Je ne veux que dire quelques mots sur les deux princesses avec lesquelles Descartes a eu des relations, qui continuèrent jusqu'à la fin de sa vie.

Dans le village de la Haye, qui peut être comparé aux plus jolies villes de l'Europe, on voyait alors trois cours remarquables. Deux mille nobles sous les armes, avec leurs ceintures et leurs baudriers de buffles, avec leurs écharpes oranges, avec leurs énormes bottes à canons et avec leurs sabres, entouraient le prince d'Orange. Couverts de velours noir, avec leurs larges fraises, leurs barbes carrées, on voyait les députés aux états généraux et les bourgmestres, qui représentaient la force de l'aristocratie bourgeoise. La reine douairière de Bohême, avec ses cinq filles, formait la troisième cour, où les dames du pays se réunissaient chaque jour, et où la société élégante venait offrir ses hommages à l'esprit et à la beauté des princesses. A deux milles de là, à Eindegeest, dans un petit village placé près de Leyde, sur les bords de la mer, vivait, depuis l'automne de 1641, Descartes, qui, avec les années, était devenu plus accessible. La plus âgée des princesses, Élisabeth, était un prodige d'instruction. Après avoir assez longtemps étudié les belles-lettres, et avoir acquis la connaissance pratique d'un grand nombre de langues (elle en avait appris six, comme ses sœurs, de la reine leur mère), elle s'était appliquée à des choses plus graves, aux mathématiques et à la physique.

Mais tout ce qu'elle avait appris lui parut bien insuffisant et très-faible, quand les ouvrages de Descartes tombèrent entre ses mains. Les conversations du burgrave de Dohna, qui était lié avec elle, lui donnèrent le désir de connaître personnellement le philosophe. Elle l'invita à se rendre auprès d'elle, et elle se fit son écolière zélée. Il pouvait lui communiquer ses pensées les plus profondes, ses spéculations métaphysiques les plus sublimes, ses recherches les plus abstraites de géométrie; et, dans la préface aux Principes, qu'il lui a dédiés, il déclare que, seule parmi tous ses disciples, elle peut comprendre complétement ses écrits [*]. Par amour pour la philosophie de Descartes,

[*] C'est ainsi qu'à l'aide de la géométrie analytique, créée par son maître, elle a traité le problème : Trouver un cercle qui touche trois cercles donnés.

elle accepta la main du roi de Pologne, Ladislas IV. Quand son plus jeune frère, Philippe, emporté par la jalousie, eut tué un M. d'Épinay, sur le marché de la Haye, en plein jour, elle fut bannie par sa mère, qui la soupçonnait de complicité; un commerce de lettres, avec Descartes, remplaça les instructions orales : mais, malheureusement, nous ne possédons pas les lettres de la princesse. Jusqu'à la paix de Westphalie, elle vécut à Crossen et à Berlin, chez ses parents de Brandebourg, puis à Heidelberg, auprès de son frère Charles-Louis, qui recouvra son palatinat par suite de la paix.

Quand la femme de ce palatin, liée d'amitié avec la princesse, eut, sous le prétexte d'une chasse, et grâce à des relais préparés à l'avance, fui loin de son mari, avec qui elle était brouillée, et qu'elle se fut retirée à Cassel, chez son frère le landgrave, la princesse Élisabeth se retira aussi dans la même ville. Enfin, dans un âge avancé, elle reçut, quoique calviniste, la direction de l'abbaye luthérienne de Heesvorden, qui était située dans le comté de Ravensberg, et dont le produit s'élevait, annuellement, à 20000 thalers; ce fut seulement alors qu'elle jouit, pour la première fois de sa vie, d'une existence indépendante et exempte de soucis. Elle fit de cette abbaye une académie de philosophie, qui fut, jusqu'à sa mort, une des plus célèbres académies cartésiennes. Catholique, calviniste, luthérien, socinien, déiste, tous y étaient accueillis sans distinction de religion, pourvu qu'ils s'occupassent de philosophie. Cette princesse mourut au mois de mars de l'an 1680, à l'âge de soixante et un ans.

Un autre prodige non moins remarquable, dans ce temps-là, c'était Christine, reine de Suède. Cette jeune princesse, à peine âgée de dix-neuf ans, étudiait Tacite tous les jours, apprenait le grec et s'occupait sérieusement des sciences; elle était très-habile dans tous les exercices du corps : aucun des seigneurs de sa cour ne tirait aussi bien qu'elle un lièvre à la course; elle excellait dans l'art de l'équitation, et dans les grandes chasses elle restait volontiers dix heures à cheval; son corps était endurci au froid et au chaud : elle ne portait ni bonnet ni voile, mais seulement un chapeau orné de plumes, qui l'abritait contre les rigueurs de la saison; elle ne passait jamais plus d'un quart d'heure à sa toilette; un peigne et quelques nœuds de rubans formaient toute sa coiffure. Sa nourriture était simple, et cinq heures seulement étaient

données par elle au sommeil. A toutes ces qualités, elle joignait le talent de porter avec dignité une des plus puissantes couronnes de l'Europe; elle suppléait à son inexpérience par sa haute intelligence, qui l'aidait à pénétrer les affaires les plus difficiles, et à les décider; son esprit supérieur dominait son conseil à un tel point, que les hommes qui avaient vieilli dans la politique étaient même parfois étonnés de la condescendance qu'ils montraient pour elle. Les ambassadeurs étrangers ne traitaient plus avec les ministres comme autrefois; ils traitaient directement avec la reine. Dès qu'elle connut les écrits de Descartes, elle désira vivement recevoir de lui personnellement des leçons de philosophie; mais comme il tardait à se rendre auprès d'elle, malgré sa pressante invitation, elle envoya, au printemps de l'an 1649, l'amiral Flemming en Hollande, avec un bâtiment, et il devait se mettre tout à la disposition du philosophe. Descartes ne résista pas plus longtemps : en octobre de la même année, il se rendit à Stockholm; et, malgré les rigueurs de l'hiver, la reine recevait tous les matins, à cinq heures, dans son cabinet, les leçons du philosophe. Pour se l'attacher, elle s'occupait de lui assurer un domaine héréditaire dans ses États de Breme ou de Poméranie, lorsqu'il mourut au commencement de février de l'année suivante, après une maladie de quelques jours, causée par le climat rigoureux de la Suède, auquel il n'était pas habitué. Dix-sept ans après sa mort, époque où Christine avait déjà depuis longtemps déposé la couronne, les cendres du philosophe furent envoyées en France et placées dans l'église de Sainte-Geneviève, aujourd'hui le Panthéon. Il est souvent plus commode de posséder les cendres des grands hommes, que de les posséder eux-mêmes de leur vivant.

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX D'UN CORPS,

PAR M. R. LOBATTO,

Professeur d'analyse et de mecanique a l'Académie royale de Delft.

On sait que les axes principaux passant par un point quelconque d'un corps ont la propriété de rendre nulles les trois intégrales $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$, étendues à la masse entière du corps. Mais il faut demontrer qu'il existe en chaque point un tel système d'axes. Les géometres ont employé pour cela différentes méthodes, dont la plus simple ramene la détermination des axes demandés à une question résolue antérieurement, celle des trois axes de figure d'un ellipsoide. Nous nous proposons de traiter ici le problème d'une maniere directe, sans recourir à la théorie des surfaces du second degré: c'est ce qu'ont fait, du reste, la plupart des auteurs de Traités de mecanique, et en particulier Poisson; mais la marche de nos calculs parait plus facile et plus rapide.

Désignons par p, q, r les cosinus des angles compris entre une droite quelconque passant par l'origine, et les directions des axes rectangulaires des x, y, z. Le moment d'inertie pris par rapport à cette droite aura évidemment pour valeur

$$\int [x^2 + y^2 + z^2 - (px + qy + rz)^2]\, dm,$$

ou bien

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - (\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 + 2\mathcal{D}pq + 2\mathcal{E}pr + 2\mathcal{F}qr),$$

en faisant, pour abréger,

$$\int x^2 dm = \mathcal{A}, \quad \int y^2 dm = \mathcal{B}, \quad \int z^2 dm = \mathcal{C},$$
$$\int xydm = \mathcal{D}, \quad \int xzdm = \mathcal{E}, \quad \int yzdm = \mathcal{F}.$$

Prenons maintenant un second système de coordonnées rectangulaires x', y', z' de même origine, et pour lequel les quantités p, q, r, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ se changent en p', q', r', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$. Si ces nouveaux axes forment un système d'axes principaux, les trois intégrales $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ disparaîtront, et la valeur précédente du moment d'inertie se réduira à

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' - (\mathfrak{A}'p'^2 + \mathfrak{B}'q'^2 + \mathfrak{C}'r'^2).$$

Or, puisqu'on a évidemment

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}',$$

il résultera, des deux valeurs du même moment, l'équation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 + 2\mathfrak{D}pq + 2\mathfrak{E}pr + 2\mathfrak{F}qr \\ &= \mathfrak{A}'p'^2 + \mathfrak{B}'q'^2 + \mathfrak{C}'r'^2. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit seulement de démontrer qu'on pourra toujours obtenir un système de coordonnées x', y', z' propre à vérifier l'équation (1). A cet effet, soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des neuf angles formés par les nouveaux axes des x', y', z' avec ceux des x, y, z. Les six variables p, q, r, p', q', r' seront liées entre elles par les équations linéaires

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} p' &= pa + qb + rc, & p &= p'a + q'a' + r'a'', \\ q' &= pa' + qb' + rc', & q &= p'b + q'b' + r'b'', \\ r' &= pa'' + qb'' + rc'', & r &= p'c + q'c' + q'c''. \end{aligned}\right.$$

Désignons le premier membre de l'équation (1) par $\varphi(p, q, r)$, et le second par $\varphi'(p', q', r')$. Le calcul aux différentielles partielles fournira directement, en vertu des équations (A), les relations suivantes :

$$(2)\qquad \frac{d\varphi'}{dp'} = a\frac{d\varphi}{dp} + b\frac{d\varphi}{dq} + c\frac{d\varphi}{dr},$$

$$(3)\qquad \frac{d\varphi'}{dq'} = a'\frac{d\varphi}{dp} + b'\frac{d\varphi}{dq} + c'\frac{d\varphi}{dr},$$

$$(4)\qquad \frac{d\varphi}{dr'} = a''\frac{d\varphi}{dp} + b''\frac{d\varphi}{dq} + c''\frac{d\varphi}{dr}.$$

Si l'on différentie la fonction φ par rapport à chacune des trois variables

p, q, r, on en tirera

$$\frac{d\varphi}{dp} = 2(\mathcal{A}p + \mathcal{D}q + \mathcal{E}r),$$
$$\frac{d\varphi}{dq} = 2(\mathcal{B}q + \mathcal{D}p + \mathcal{F}r),$$
$$\frac{d\varphi}{dr} = 2(\mathcal{C}r + \mathcal{E}p + \mathcal{F}q);$$

et puisque la fonction φ' donne, en ayant égard aux équations (A),

$$\frac{d\varphi'}{dp'} = 2\mathcal{A}'p' = 2\mathcal{A}'(pa + qb + rc),$$

il viendra, après avoir substitué ces valeurs dans l'équation (2),

$$\mathrm{A}'(pa + pb + rc) = \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{A}a + \mathcal{D}b + \mathcal{E}c)\,p \\ + (\mathcal{D}a + \mathcal{B}b + \mathcal{F}c)\,q \\ + (\mathcal{E}a + \mathcal{F}b + \mathcal{C}c)\,r. \end{array}\right.$$

Cette nouvelle relation étant indépendante des valeurs particulières des variables p, q, r, on aura nécessairement les trois équations

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}'a' = \mathcal{A}a + \mathcal{D}b + \mathcal{E}c, \\ \mathcal{A}'b \;= \mathcal{D}a + \mathcal{B}b + \mathcal{F}c, \\ \mathcal{A}'c \;= \mathcal{E}a + \mathcal{F}b + \mathcal{C}c, \end{array}\right.$$

qui, jointes à l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

suffisent pour déterminer les quatre quantités $\mathcal{A}'$, a, b, c.

Mais on pourra parvenir ainsi qu'il suit à une équation qui donnera directement la valeur de $\mathcal{A}'$.

Pour cela, écrivons les équations (B) sous la forme suivante, m et n exprimant les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$:

$$\text{(B')} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}' = \mathcal{A} = \mathcal{D}m + \mathcal{E}n, \\ (\mathcal{A}' - \mathcal{B})m = \mathcal{D} + \mathcal{F}n, \\ (\mathcal{A}' - \mathcal{C})n = \mathcal{E} + \mathcal{F}m. \end{array}\right.$$

Résolvant les deux dernières équations par rapport à m et n, on en

déduira sans peine

$$(5)\qquad m = \frac{(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C})\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{F}}{(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}) - \mathfrak{F}^2},$$

$$(6)\qquad n = \frac{(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B})\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{F}}{(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}) - \mathfrak{F}^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la première des équations (B′), il viendra

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}) \\ - \left[(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})\mathfrak{F}^2 + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B})\mathfrak{E}^2 + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{C})\mathfrak{D}^2\right] - 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F} = 0, \end{array} \right.$$

équation du troisième degré qui, ayant toujours au moins une racine réelle, indique d'abord l'existence de l'axe des x', un des axes principaux. En effet, les valeurs de m, n données par les équations (5) et (6) seront alors également réelles; et il en sera de même des quantités

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \qquad b = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \qquad c = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

qui fixent la direction de l'axe des x'.

En opérant d'une manière analogue sur les équations (3) et (4), on parviendra à deux systèmes d'équations parfaitement semblables à celui (B), et d'où l'on déduira, par conséquent, deux équations finales du troisième degré qui ne différeront de l'équation (7) que par les inconnues B′, C′. Ces deux dernières quantités en représenteront ainsi les deux autres racines qui seront réelles; car si celles-ci étaient imaginaires, les valeurs de a, b, c, a', b', c',..., qui y répondraient, le seraient également, et l'on s'assurera facilement qu'elles ne pourraient vérifier les relations qui existent entre ces neuf quantités [*].

L'existence des axes principaux est donc non-seulement prouvée, mais on voit en même temps qu'il ne pourra exister généralement qu'un seul système passant par un point quelconque.

---

[*] Voyez la *Mécanique analytique*, 2e édition, tome II, page 251.

Le mode de démonstration dont Lagrange se sert, dans le passage auquel nous renvoyons, a été, depuis, souvent employé d'une manière plus générale, mais pour un usage semblable, par d'autres auteurs qui auraient pu citer la *Mécanique analytique*.

(J. Liouville.)

NOTE

SUR LE PROBLÈME DES TAUTOCRONES;

PAR M. J. BERTRAND.

Le problème des tautochrones, résolu d'abord par Huygens et Newton pour le cas d'un point situé dans le vide ou dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse, le fut ensuite par Euler [*] et Jean Bernoulli, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, et par Fontaine, en ajoutant même un terme proportionnel à la simple vitesse. Dans les *Mémoires de Berlin* pour 1765, Lagrange se proposa la question plus générale de déterminer quelle est la force nécessaire pour produire le tautochronisme en considérant cette force comme une fonction quelconque de la vitesse et de la position du mobile. La formule à l'aide de laquelle Lagrange résout ce problème parut assez importante à d'Alembert pour qu'il en cherchât une démonstration qui se trouve dans les *Mémoires de Berlin* à la suite de celle de Lagrange. Lagrange lui-même est revenu sur cette formule dans les *Mémoires de Berlin* pour 1770, et la présente, je crois, comme beaucoup plus générale qu'elle ne l'est en effet :

« Ayant, dit-il, envisagé la question des tautochrones sous un point » de vue un peu plus général qu'on ne l'avait fait avant moi, je suis

[*] Euler est le premier géomètre qui ait cherché les tautochrones dans un milieu dont la résistance est une fonction de la vitesse autre que la première puissance; son premier travail, sur ce sujet, date de 1726 (*Actes de Leipsig*). La solution qu'il donne est défectueuse, comme il l'a reconnu lui-même quelques années plus tard en traitant de nouveau la même question dans le tome IV des *Commentaires de Saint-Pétersbourg* (1729). Le Mémoire de Jean Bernoulli, imprimé dans le Recueil de l'Académie de Paris pour 1730, est postérieur d'une année, quoiqu'il paraisse composé antérieurement à la publication de celui d'Euler.

» parvenu à une formule générale et très-simple qui renferme non-
» seulement tous les résultats déjà connus, mais encore une infinité
» d'autres.... Mon travail n'a pas été jugé si favorablement par
» M. Fontaine, qui vient de m'attaquer dans le volume de l'Académie
» de Paris pour 1768. Je m'attendais avec raison à trouver dans ce
» Mémoire des objections solides et dignes de cet illustre adversaire;
» mais j'ai été bien surpris de n'y voir que quelques expressions peu
» obligeantes, sans aucune raison, bonne ou mauvaise. Comme la
» seule lecture de son Mémoire et du mien peut suffire à me mettre à
» couvert de ses critiques, je les passerai entièrement sous silence. »

Et, en effet, Lagrange, dans ce nouveau Mémoire, ne répond nullement aux objections faites par Fontaine, qui, il faut le dire, étaient formulées d'une manière obscure et sans développement, mais dont la plus importante au moins me paraît très-fondée. Je me propose de faire voir, dans cette Note, que loin de donner la solution générale du problème qu'il s'était proposé, Lagrange n'en a traité qu'un cas très-particulier, et que, si l'on cherche à appliquer sa formule à la recherche de la courbe tautochrone pour une loi donnée de la résistance du milieu, elle ne pourra servir que dans le cas traité antérieurement par Euler et Jean Bernoulli. Ainsi on ne peut pas regarder comme générale la démonstration que Lagrange a donnée du théorème suivant qu'il déduit de sa solution :

« Toute courbe qui est tautochrone dans une hypothèse quel-
» conque de force et de résistance, l'est encore si l'on suppose la ré-
» sistance augmentée d'un terme proportionnel à la vitesse. »

I.

Le problème que se propose Lagrange dans le Mémoire de 1765 est énoncé par lui dans les termes suivants :

« Quelque profonde et quelque ingénieuse que soit la théorie des
» tautochrones, elle laisse beaucoup à désirer. Lorsqu'il n'y a point
» de résistance, et que, par conséquent, la force accélératrice est
» indépendante de la vitesse, on sait depuis longtemps que cette
» force doit être proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir. Mais
» quelle est, en général, la force nécessaire pour produire le tauto-

» chronisme, en la regardant comme une fonction quelconque de
» l'espace et de la vitesse? Voilà le problème qu'il faut résoudre
» pour avoir une théorie générale et complète des tautochrones.
» M'étant occupé de ce problème, voici la solution que j'en ai trou-
» vée, qui est, ce me semble, générale et nouvelle. »

On peut remarquer que le problème, énoncé de cette manière, est essentiellement indéterminé, et que la solution devrait renfermer une fonction arbitraire de deux variables.

Considérons, en effet, une fonction arbitraire du temps t et d'une ligne a, et supposons que cette fonction $\varphi(t, a)$ satisfasse à la double condition $\varphi = 0$ pour $t = t_1$ et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ pour $t = 0$; il est évident qu'en représentant le mouvement rectiligne d'un point par la formule

$$x = \varphi(t, a), \tag{1}$$

les différents mobiles dont le mouvement serait défini par cette formule dans laquelle on donnerait à a toutes les valeurs possibles, parviendraient dans le même temps au point pour lequel on a

$$x = 0.$$

Or la force nécessaire pour produire un pareil mouvement peut s'exprimer facilement au moyen de la position et de la vitesse : on a, en effet, en désignant cette force par p et la vitesse par v,

$$v = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2}$$

$$p = \frac{d^2\varphi}{dt^2}; \tag{3}$$

et si, entre les trois formules (1), (2) et (3), on élimine t et a, on aura la solution la plus générale du problème proposé par Lagrange.

J'ajouterai que cette élimination, fût-elle même possible sous une forme simple, n'avancerait pas beaucoup la solution de la question des tautochrones, qui exigerait que l'on pût déterminer la manière dont la force doit varier avec la position, lorsque la résistance du milieu est donnée en fonction de la vitesse.

II.

La solution que je viens d'indiquer en quelques mots contient une fonction arbitraire de deux variables; celle de Lagrange contient seulement deux fonctions arbitraires d'une seule variable: aussi n'est-elle pas, à beaucoup près, aussi générale qu'on a semblé le croire. Je commencerai par en donner une démonstration qui me semble beaucoup plus simple que celles qui avaient été proposées par d'Alembert et Lagrange lui-même.

Soit

$$P = \psi(x, v) \tag{1}$$

une force accélératrice sous l'influence de laquelle un mobile, parcourant une droite donnée en partant sans vitesse d'un point de cette droite, ait un mouvement tel, que sa distance à l'extrémité soit exprimée par une certaine fonction du temps, en sorte que l'on ait

$$x = \varphi(t);$$

si l'on voulait que x fût exprimé par la formule

$$x = m\varphi(t),$$

m étant une constante, il suffirait de rendre la force m fois plus grande à chaque instant, et, comme la vitesse augmenterait dans le même rapport, il faudrait, pour que la force fût représentée par la formule (1), que l'on eût

$$mp = \psi(mx, mv),$$

et, par suite, d'après la théorie des fonctions homogènes,

$$p = x\psi\left(\frac{v}{x}\right); \tag{2}$$

c'est là une première formule, qui donne une solution particulière du problème des tautochrones. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que, tout en renfermant une fonction arbitraire, cette formule ne pourrait résoudre le problème que dans un très-petit nombre de cas. Supposons, en effet, que l'on demande la force nécessaire pour produire le tautochronisme dans un milieu qui résiste suivant une fonc-

tion de la vitesse; il faudra chercher à déterminer la fonction ψ de telle façon que

$$p = x\psi\left(\frac{v}{x}\right) = F(x) - f(v),$$

ce qui exige

$$\frac{d^2 p}{dx\,dv} = 0;$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\psi''\left(\frac{v}{x}\right) = 0,$$

en sorte que

$$\psi\left(\frac{v}{x}\right) = A + B\frac{v}{x}$$

et

$$p = Av + Bx;$$

c'est la solution connue de Newton, et la formule (2) ne peut en donner d'autres.

III.

Pour déduire de cette formule (2) le résultat de Lagrange, posons

$$x = \theta(u),$$

et cherchons ce que doit devenir la force p, pour que la distance du mobile à l'origine, au bout du temps t, soit u et non plus x. Il est évident qu'il y aura encore tautochronisme, pourvu que l'on ait $\theta(u) = 0$ pour $u = 0$; or la vitesse v_1 du nouveau mobile sera

$$v_1 = \frac{du}{dt} = \frac{v}{\left(\frac{d\theta}{du}\right)},$$

et, en différentiant, nous aurons, pour la force capable de produire le mouvement,

$$F = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{v^2\frac{d^2\theta}{du^2}}{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^3}.$$

En remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par sa valeur $x\psi\left(\frac{v}{x}\right)$, et v par $v_1\frac{d\theta}{du}$, il vient

$$F = \frac{\theta(u)\psi\left[\frac{\theta(u)}{\frac{d\theta}{du}}v_1\right]}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{v_1^2\frac{d^2\theta}{du^2}}{\frac{d\theta}{du}};$$

nous ferons coïncider cette formule avec celle de Lagrange, en posant

$$\frac{\frac{d\theta}{du}}{\theta} = \frac{1}{\xi},$$

d'où l'on tire sans difficulté, par la simple différentiation,

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\theta} - \frac{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2}{\theta^2} = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d\xi}{du},$$

et, en multipliant par $\xi = \frac{\theta}{\frac{d\theta}{du}}$,

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\frac{d\theta}{du}} - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du};$$

ce qui met la valeur de F sous la forme

$$F = \xi\varphi\left(\frac{v_1}{\xi}\right) - \frac{v_1^2}{\xi}\frac{d\xi}{du} + \frac{v_1^2}{\xi}.$$

Mettons v_1^2 en facteur, et posons

$$1 + \varphi\left(\frac{v_1}{\xi}\right)\frac{\xi}{v_1} = \varpi\left(\frac{v_1}{\xi}\right),$$

il vient

$$(3) \qquad F = v_1^2\left[\frac{\varpi\left(\frac{v_1}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du}\right];$$

ξ désigne ici une fonction quelconque de a.

IV.

La formule que nous venons d'obtenir est précisément celle de La-

grange; cherchons maintenant suivant quelle fonction de la vitesse doit varier la résistance du milieu, pour que cette formule puisse être appliquée. On verra, comme plus haut, que, pour cela, on doit avoir

$$\frac{d^2 F}{du\,dv} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, puisque ξ est fonction de u,

$$\frac{d^2 F}{dv\,d\xi} = 0;$$

remarquons que l'on peut poser

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du} = \chi(\xi),$$

$$\frac{v}{\xi}\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) = f\frac{v}{\xi},$$

en sorte que l'expression de F devient

$$F = vf\left(\frac{v}{\xi}\right) - v^2\chi(\xi),$$

et la dérivée seconde

$$\frac{d^2 F}{dv\,d\xi} = -\left[\frac{2v}{\xi^2}f'\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{v}{\xi}f''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 2v\chi'(\xi)\right],$$

ou, en égalant à zéro après avoir supprimé le facteur $2v$ et multiplié par ξ^2,

$$0 = 2f'\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{v}{\xi}f''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 2\xi^2\chi'(\xi),$$

ou, en posant $\frac{v}{\xi} = z$,

$$2f'(z) + z\,f''(z) = -2\xi^2\chi'(\xi),$$

z et ξ pouvant être considérés comme variables indépendantes, cette équation exige évidemment que l'on ait

$$2f'(z) + zf''(z) = m,$$

$$2\xi^2\chi'(\xi) = -m,$$

m étant une constante. La première de ces équations nous donne

$$zf = \frac{mz^2}{2} + bz + c, \qquad f = \frac{mz}{2} + b + \frac{c}{z}.$$

et la seconde

$$\chi(\xi) = \frac{m}{2\xi} + c';$$

d'où l'on conclut

$$F = v\left(\frac{m}{2}\frac{v}{\xi} + b + \frac{c\xi}{v}\right) - \frac{mv^2}{2\xi} - c'v^2,$$

ou, en réduisant,

$$F = bv - c'v^2 + c\xi.$$

Or nous avons fait

$$\chi(\xi) = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du},$$

donc

$$\frac{m}{2\xi} + c' = \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du}.$$

$$du = \frac{\xi}{\frac{m}{2} + c'\xi},$$

$$u = \frac{1}{c'} lk\left(\frac{m}{2} + c'\xi\right).$$

$$kc'\xi = e^{c'u} - \frac{km}{2}.$$

On déterminera k par la condition $\xi = 0$ pour $u = 0$.

En sorte que la fonction F se compose d'un terme fonction de la vitesse et de la forme $bv - c'v^2$, et d'un terme fonction de la position du mobile, représenté par la valeur de $c\xi$; c'est-à-dire que la seule loi de résistance du milieu dans laquelle la formule de Lagrange puisse servir à déterminer la force, est précisément celle à laquelle s'appliquait la méthode de Fontaine [*].

---

[*] Il n'a été question, dans cet article, que du mouvement en ligne droite; mais on sait qu'un mouvement curviligne quelconque peut être assimilé à un mouvement rectiligne, pourvu que l'on remplace la force accélératrice par sa composante, suivant la tangente à la trajectoire.

NOTE

SUR QUELQUES POINTS

DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DES SURFACES;

PAR M. B. AMIOT.

§ I.

Monge, dans son *Application de l'Analyse à la Théorie des Surfaces et des Courbes* (*voyez* 3e édition, § XIX), démontre que : *La surface de la sphère est la seule qui jouisse de la propriété d'avoir pour chacun de ses points les centres de ses deux courbures réunis, et dont l'aire ne soit pas nulle.* Pour cela, il exprime que l'équation du deuxième degré

$$(1)\quad \begin{cases} R^2(rt-s^2)+R\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r] \\ \qquad\qquad +(1+p^2+q^2)^2=0, \end{cases}$$

entre les rayons de courbure principaux en un même point d'une surface quelconque, a ses deux racines égales et de même signe. Il obtient ainsi l'équation aux différences partielles secondes de la surface cherchée

$$(2)\quad [(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)=0.$$

Pour intégrer cette équation, Monge distingue deux cas :

1°. Le cas particulier où l'on aurait les trois équations de condition :

$$(1+q^2)s-pqt=0,\quad (1+p^2)s-pqr=0,\quad (1+q^2)r-(1+p^2)t=0,$$

dont l'une quelconque est une conséquence des deux autres ;

2°. Le cas général, c'est-à-dire celui où l'on suppose que les diffe-

rences partielles p, q, r, s et t ne satisfont pas à deux au moins des relations précédentes.

Or, le cas général rentre dans le cas particulier, puisque l'équation (2) *se décompose nécessairement* dans les deux suivantes :

$$(3)\qquad r(q^2+1)-t(p^2+1)=0 \quad \text{et} \quad s(p^2+1)-pqr=0.$$

Pour le démontrer plus simplement qu'on ne le fait d'ordinaire, je pose

$$r(q^2+1)-t(p^2+1)=X \quad \text{et} \quad s(p^2+1)-pqr=Y:$$

d'où je déduis

$$t=\frac{r(q^2+1)-X}{p^2+1} \quad \text{et} \quad s=\frac{Y+pqr}{p^2+1}.$$

En portant ces deux valeurs de s et t dans l'équation (2), et nommant V le premier membre, on a

$$\begin{aligned}V(1+p^2)^2=&[2r(1+p^2+q^2)-2pqY-(1+p^2)X]^2\\&-4(1+p^2+q^2)[r^2(1+p^2+q^2)-rX(p^2+1)-Y^2-2pqrY]:\end{aligned}$$

d'où, en développant et réduisant, on déduit aisément

$$V(1+p^2)=X^2+4Y^2+(pX+2qY)^2.$$

Par conséquent, V ne peut être égal à zéro sans que l'on ait

$$X=0,\quad Y=0,$$

et réciproquement; l'équation (2) équivaut donc au système des deux équations (3). Telle est la véritable explication de ce que M. Charles Dupin appelle *une espèce de paradoxe* (voyez *Développements de Géométrie*, page 129), à savoir : *Comment la coexistence des deux équations* (3) *ne dit rien de plus particulier que l'existence de la seule équation* (2) *entre les mêmes variables.*

Les équations (3) peuvent se mettre sous la forme connue

$$\frac{r}{p^2+1}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{q^2+1},$$

ou bien sous la suivante :

$$\frac{d\left(\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}=0,\qquad \frac{d\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}=0,$$

et conduisent à l'intégrale générale

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2.$$

(*Voyez* Traité de Monge, déjà cité, page 175.)

Par conséquent, la sphère est la seule surface représentée par l'équation (2), et il devient inutile d'intégrer cette équation elle-même, puisqu'elle ne peut rien dire de plus que les deux équations (3), dans lesquelles elle se décompose nécessairement.

§ II.

L'équation générale des deux lignes de courbure qui se croisent en chaque point d'une surface quelconque

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[s(1+q^2)-pqt]+\frac{dy}{dx}[r(1+q^2)-t(1+p^2)]\\&\qquad\qquad+rpq-s(1+q^2)=0\end{aligned}\right.$$

devient

$$(5)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2[pqX+Y(q^2+1)]+\frac{dy}{dx}(p^2+1)X-(p^2+1)Y=0,$$

lorsqu'on y remplace s et t par leurs valeurs en X et Y employées au paragraphe précédent. On déduit, de l'équation (5),

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{X(p^2+1)\pm\sqrt{(p^2+1)[X^2+4Y^2+(pX+2qY)^2]}}{Y(q^2+1)+pqX};$$

ce qui montre, comme on le sait d'ailleurs, que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation (4) sont toujours réelles, et que le radical qu'elles renferment est identique avec celui qui affecte les valeurs des deux rayons de courbures principaux, fournies par l'équation (1).

Les ombilics d'une surface quelconque étant définis par la condition qu'en chaque point de cette espèce la surface est susceptible d'être osculée par une sphère, ou, ce qui revient au même, a ses rayons de courbure principaux égaux et de même signe, on voit que les ombilics d'une surface quelconque sont déterminés par les deux équations (3),

jointes à celle de la surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Observons d'abord que si les deux équations (3) sont distinctes et compatibles avec celle de la surface, celle-ci n'admet que des points *ombilicaux isolés*. Mais si les deux équations (3) sont conséquences l'une de l'autre, il ne reste plus alors qu'une seule équation qui, jointe à celle de la surface, détermine généralement une *ligne* de points ombilicaux. Dans tous les cas en chaque point ombilical, l'équation des lignes de courbure devient indéterminée, puisque les coordonnées d'un tel point satisfont toujours aux deux équations

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Il peut arriver, toutefois, que les lignes de courbure de la surface qui passent par un ombilic soient en nombre infini ou bien en nombre limité. De là résulte entre les points ombilicaux une distinction essentielle sur laquelle nous allons donner quelques développements.

§ III.

Pour cela supposons que, dans l'équation (4), on ait remplacé p, q, r, s et t par leurs valeurs en x, y, z déduites de l'équation de la surface; admettons, en outre, qu'on ait éliminé z au moyen de la même équation: alors l'équation générale des lignes de courbure sera de la forme

$$(6) \qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions de x et de y seulement.

Cela posé, pour les valeurs $x = x_1$, $y = y_1$, déduites des équations

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Mais faisons

$$y = y_1 + \delta y \quad \text{et} \quad x = x_1 + \delta x, \quad \text{avec} \quad \delta y = y'\delta x,$$

ce qui revient à passer, sur la surface, de l'ombilic à un point infiniment voisin en suivant une direction déterminée par $y' = \frac{dy}{dx}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6), on obtient

$$(7)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy}y'\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}y'\right) + \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{dy}y' = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation soit déterminée quand on y fait $x = x_1$ et $y = y_1$. On aura deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, fonctions de y', qui déterminent les directions des deux lignes de courbure de la surface pour le point infiniment voisin de l'ombilic où l'on s'est placé. Pour que l'une de ces deux lignes de courbure passe par l'ombilic, il faut et il suffit que l'une des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, fournies par l'équation (7), soit égale à celle de y' qui détermine la direction suivie sur la surface. Cela posé, faisons $y' = \frac{dy}{dx}$ dans l'équation (7), et supposons qu'elle devienne identique; c'est que son premier membre est divisible par $\frac{dy}{dx} - y'$, et, par conséquent, quelle que soit la direction suivant laquelle on s'éloigne de l'ombilic, on suit toujours une ligne de courbure de la surface. Donc, *dans ce cas, il passe par l'ombilic une infinité de lignes de courbure.*

Supposons, en second lieu, que, par l'hypothèse $y' = \frac{dy}{dx}$, l'équation (7) ne devienne point identique et soit généralement de la forme

$$(8)\qquad Py'^3 + Qy'^2 + Ry' + S = 0.$$

Chaque valeur réelle de y' qu'elle fournira, donnera une direction suivant laquelle on peut marcher sur la surface, à partir de l'ombilic, en suivant une ligne de courbure. Donc *le nombre des racines réelles de l'équation* (8) *indique combien il passe de lignes de courbure à l'ombilic considéré.*

Supposons ensuite que l'équation (7) devienne elle-même indéterminée, quel que soit y', quand on y fait $x = x_1$ et $y = y_1$; en y faisant de nouveau

$$x = x_1 + \delta x \quad \text{et} \quad y = y_1 + \delta y, \quad \text{avec} \quad \delta y = y'\,\delta x,$$

on obtient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[\frac{d^2A}{dx^2}+2\frac{d^2A}{dx\,dy}y'+\frac{d^2A}{dy^2}y'^2\right]+\frac{dy}{dx}\left[\frac{d^2B}{dx^2}+2\frac{d^2B}{dx\,dy}y'+\frac{d^2B}{dy^2}y'^2\right]\\ &\qquad+\left[\frac{d^2C}{dx^2}+2\frac{d^2C}{dx\,dy}y'+\frac{d^2C}{dy^2}y'^2\right]=0,\end{aligned}\right.$$

équation à laquelle on peut appliquer le raisonnement que nous venons de faire sur l'équation (8). Nous remarquerons seulement que si l'équation (9), qui devient du quatrième degré par l'hypothèse $\frac{dy}{dx}=y'$, avait ses quatre racines imaginaires, il ne pourrait passer à l'ombilic aucune ligne de courbure de la surface.

Si l'équation (9) était elle-même indéterminée, on y ferait encore $x=x_1+\delta x$, $y=y_1+\delta y$, et ainsi de suite.

§ IV.

Appliquons cette théorie générale à l'ellipsoïde. On trouve pour l'équation des lignes de courbure,

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2(b^2-c^2)xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\\ &+[b^2(a^2-c^2)x^2-a^2(b^2-c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)]\frac{dy}{dx}\\ &+b^2(a^2-c^2)xy=0.\end{aligned}\right.$$

et pour les équations des ombilics,

$$b^2(a^2-c^2)xy=0,\quad b^2(a^2-c^2)x^2-a^2(b^2-c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)=0.$$

Soient

$$y=0\quad\text{et}\quad x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}};$$

ce qui suppose $a>b$ et $b>c$, pour que la valeur correspondante de z soit réelle.

En différentiant l'équation (C), on trouve

$$(C')\quad \left\{\begin{aligned} &a^2(b^2-c^2)(xy'+y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[b^2(a^2-c^2)2x-a^2(b^2-c^2)2yy']\frac{dy}{dx}\\ &\qquad-b^2(a^2-c^2)(xy'+y)=0,\end{aligned}\right.$$

équation qui, pour

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

devient

$$a^2(b^2 - c^2)y'\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2b^2(a^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - b^2(a^2 - c^2)y' = 0,$$

et pour

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

on a

$$a^2(b^2 - c^2)y'^3 + b^2(a^2 - c^2)y' = 0,$$

équation qui n'admet que la seule racine réelle $y' = 0$. Donc la section de l'ellipsoïde par le plan principal du plus grand et du plus petit axe est la seule direction des lignes de courbure passant par les ombilics lorsque l'ellipsoïde n'est pas de révolution.

Mais supposons $a^2 = b^2$ avec $xy = 0$; on a alors, pour déterminer les ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0,$$

et l'équation (C′) est elle-même indéterminée. En la différentiant de nouveau, on trouve

$$(\mathrm{C}'')\quad \left\{\begin{aligned} &a^2y'(b^2 - c^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[b^2(a^2 - c^2) - a^2y'^2(b^2 - c^2)\right]\frac{dy}{dx} \\ &\qquad - b^2y'(a^2 - c^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$\left[a^2(b^2 - c^2)y'\frac{dy}{dx} + b^2(a^2 - c^2)\right]\left(\frac{dy}{dx} - y'\right) = 0.$$

On voit qu'elle est vérifiée par $\frac{dy}{dx} = y'$, quel que soit y'. Donc il passe par chaque ombilic une infinité de lignes de courbure.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. KUMMER A M. LIOUVILLE.

« Breslau, le 28 avril 1847.

.. Engagé par mon ami M. Lejeune-Dirichlet, je prends la liberté de vous envoyer quelques exemplaires d'une Dissertation que j'ai écrite, il y a trois ans, à l'occasion du jubilé séculaire de l'Université de Kœnigsberg, et d'une autre Dissertation d'un de mes amis et disciples, M. Kronecker, jeune géomètre distingué. Dans ces Mémoires, que je vous prie d'accepter en signe de ma profonde estime, vous trouverez des développements sur quelques points de la théorie des nombres complexes composés des racines de l'unité, c'est-à-dire de l'équation $r^n = 1$, qui ont été récemment le sujet de quelques discussions au sein de votre illustre Académie, à l'occasion de l'essai d'une Démonstration du théorème de Fermat, proposé par M. Lamé. Quant à la proposition élémentaire pour ces nombres complexes, *qu'un nombre complexe composé ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière*, que vous regrettez très-justement dans cette démonstration défectueuse en outre en quelques autres points, je puis vous assurer *qu'elle n'a pas lieu généralement* tant qu'il s'agit de nombres complexes de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-1}$, mais qu'on peut la sauver en introduisant un nouveau genre de nombres complexes que j'ai appelé *nombre complexe idéal*. Les résultats de mes recherches sur cette matière ont été communiqués à l'Académie de Berlin et imprimés dans les Comptes rendus (mars 1846); un Mémoire sur le même sujet paraîtra bientôt dans le Journal de M. Crelle. Les applications de cette théorie à la démonstration du théorème de Fermat m'ont occupé depuis longtemps, et j'ai réussi à faire dépendre l'impossibilité de l'équation $x^n - y^n = z^n$ de deux propriétés du nombre premier n, en sorte qu'il ne reste plus qu'à rechercher si elles appartiennent à tous les nombres premiers. Dans le cas où ces résultats vous paraîtraient dignes de quelque attention, vous les trouverez exposés dans le Compte rendu de l'Académie de Berlin de ce mois. »

Note de M. Liouville. — Le Mémoire de M. Kummer, dont il est d'abord question dans cette Lettre, et qui porte la date de 1844, est écrit en latin, sous ce titre : *De numeris complexis qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant.* Celui de M. Kronecker, qui y fait suite et qui est intitulé : *De unitatibus complexis*, traite spécialement des diviseurs complexes du nombre 1; il a paru en 1845, et l'auteur annonce qu'il reprendra la question avec plus de détails dans le Journal de M. Crelle. Le Mémoire de M. Kummer offrant beaucoup d'intérêt et ne paraissant pas avoir été jusqu'ici connu en France, nous le donnerons en entier dans un prochain cahier, à la suite d'un travail de M. Lamé, sur le même sujet, qui est imprimé depuis quelque temps déjà. On devra consulter, en outre, le Journal de M. Crelle, les Comptes rendus de l'Académie de Berlin, et enfin ceux de notre Académie des Sciences qui contiennent des recherches étendues de M. Cauchy. Nous n'avons pas à examiner ici en quoi les auteurs que nous citons s'accordent ou diffèrent, ni quels sont les droits de chacun à l'antériorité de telle ou telle découverte. C'est au temps à fixer la valeur de leurs travaux et à mettre toute chose à sa place.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉSOLUTION, EN NOMBRES COMPLEXES, DE L'ÉQUATION

$$A^5 + B^5 + C^5 = 0;$$

PAR M. G. LAMÉ.

Ce Mémoire se compose de deux parties : la première rappelle les propriétés connues des nombres complexes, relatifs à l'exposant 5, et en signale de nouvelles; la seconde traite directement l'équation proposée, et démontre son impossibilité.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

Les nombres complexes, dont il s'agit ici, sont de la forme

$$(1) \qquad A = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_4 r^4 = A(r);$$

les coefficients α_i étant des nombres entiers, et r une des quatre racines imaginaires de l'équation

$$r^5 = 1,$$

ou de celle-ci

$$(2) \qquad \varphi(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 = 0.$$

On sait que l'une des racines étant r, les trois autres sont r^2, r^3, r^4, et qu'en posant

$$(3) \qquad z_1 = r + r^4 = r + \frac{1}{r}, \quad z_2 = r^2 + r^3 = r^2 + \frac{1}{r^2},$$

z_1 et z_2 sont les racines réelles de l'équation

$$z^2 + z - 1 = 0, \tag{4}$$

d'où résultent les relations

$$z_1 + z_2 = -1, \quad z_1 z_2 = -1, \quad z_1^2 + z_2^2 = 3. \tag{5}$$

Lorsque $\alpha_4 = \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_2$, le nombre complexe A se réduit à la forme

$$A = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2; \tag{6}$$

il est alors réel.

On peut augmenter ou diminuer d'un même nombre entier m les cinq coefficients de A, (1), sans pour cela en changer la valeur : car cette transformation revient à augmenter ou à diminuer A de $m\varphi(r)$, quantité qui est nulle par l'équation (2). On peut augmenter ou diminuer d'un même nombre entier m les trois coefficients de $\mathcal{A}$, (6), ce qui revient à mettre à la suite de $\mathcal{A}$, $\pm m(1 + z_1 + z_2)$, quantité qui est nulle par la première des relations (5).

Si l'on multiplie successivement le nombre A par r, r^2, r^3, r^4, et si l'on réduit les puissances de r, en remplaçant r^5, r^6, r^7, r^8 par leurs égales 1, r, r^2, r^3, on obtient la série de cinq nombres complexes $[A, Ar, Ar^2, Ar^3, Ar^4]$, que l'on désignera par $[A, A', A'', A''', A^{\text{IV}}]$. Ces nombres, que M. Dirichlet appelle *associés* de A, ont tous la même puissance cinquième, car

$$(Ar^t)^5 = A^5 r^{5t} = A^5.$$

Lorsqu'on substitue successivement dans $A(r)$, r^2, r^3, r^4 à r, en réduisant les puissances de r, on obtient la série de quatre nombres complexes $[A(r), A(r^2), A(r^3), A(r^4)]$, que l'on désignera par $[A_1, A_2, A_3, A_4]$. Ces nombres, que M. Dirichlet appelle *conjugués* de A, ont des puissances cinquièmes différentes. Chacun d'eux a ses associés, ce qui fait en tout vingt nombres, tous déduits du même nombre A, et qui jouissent de propriétés remarquables. Pour l'intelligence de ce qui va suivre, il convient de placer ici les valeurs de ces vingt nombres complexes :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
A_1 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_4 r^4, & A_4 = \alpha_0 + \alpha_4 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_2 r^3 + \alpha_1 r^4, \\
A'_1 = \alpha_4 + \alpha_0 r + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^3 + \alpha_3 r^4, & A'_4 = \alpha_1 + \alpha_0 r + \alpha_4 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_2 r^4, \\
A''_1 = \alpha_3 + \alpha_4 r + \alpha_0 r^2 + \alpha_1 r^3 + \alpha_2 r^4, & A''_4 = \alpha_2 + \alpha_1 r + \alpha_0 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_3 r^4, \\
A'''_1 = \alpha_2 + \alpha_3 r + \alpha_4 r^2 + \alpha_0 r^3 + \alpha_1 r^4, & A'''_4 = \alpha_3 + \alpha_2 r + \alpha_1 r^2 + \alpha_0 r^3 + \alpha_4 r^4, \\
A^{\text{iv}}_1 = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_0 r^4, & A^{\text{iv}}_4 = \alpha_4 + \alpha_3 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_1 r^3 + \alpha_0 r^4. \\
 & \\
A_2 = \alpha_0 + \alpha_3 r + \alpha_1 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_2 r^4, & A_3 = \alpha_0 + \alpha_2 r + \alpha_4 r^2 + \alpha_1 r^3 + \alpha_3 r^4, \\
A'_2 = \alpha_2 + \alpha_0 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_1 r^3 + \alpha_4 r^4, & A'_3 = \alpha_3 + \alpha_0 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_1 r^4, \\
A''_2 = \alpha_4 + \alpha_2 r + \alpha_0 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_1 r^4, & A''_3 = \alpha_1 + \alpha_3 r + \alpha_0 r^2 + \alpha_2 r^3 + \alpha_4 r^4, \\
A'''_2 = \alpha_1 + \alpha_4 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_0 r^3 + \alpha_3 r^4, & A'''_3 = \alpha_4 + \alpha_1 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_0 r^3 + \alpha_2 r^4, \\
A^{\text{iv}}_2 = \alpha_3 + \alpha_1 r + \alpha_4 r^2 + \alpha_2 r^3 + \alpha_0 r^4, & A^{\text{iv}}_3 = \alpha_2 + \alpha_4 r + \alpha_1 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_0 r^4.
\end{array}
\right.
$$

Les conjugués de A étant $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, ceux de A' sont $[A'_1, A''_2, A'''_3, A^{\text{iv}}_4]$, ceux de A'', $[A''_1, A^{\text{iv}}_2, A'_3, A'''_4]$, ceux de A''' $[A'''_1, A'_2, A^{\text{iv}}_3, A''_4]$, ceux de A^{iv}, $[A^{\text{iv}}_1, A''_2, A'''_3, A'_4]$. Si l'on substitue successivement r^2, r^3, r^4 à r, dans A_2, on retrouve respectivement A_3, A_4, A_3; si, dans A_3, on retrouve A_4, A_3, A_2; si, dans A_4, on retrouve A_3, A_2, A_4.

§ II.

Lorsqu'on substitue r^2 ou r^3, à r, dans les nombres complexes réels z_1 et z_2, z_1 se change en z_2, et réciproquement; quand on y substitue r^4 à r, ces nombres restent les mêmes. Ainsi les quatre conjugués de z_1 sont $[z_1, z_2, z_2, z_1]$, ceux de z_2, $[z_2, z_1, z_1, z_2]$. D'après cela, les quatre conjugués de tout nombre complexe réel, ou de la forme (6), sont égaux deux à deux; on a

$$
(8)\quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_4 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_1.
$$

On peut donc n'admettre que deux conjugués pour tout nombre complexe réel; on les désignera par $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Le produit de ces deux conjugués est toujours un nombre entier, positif ou négatif; en effet, on a

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = (a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2)(a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_1) \\
= a_0^2 + (a_1 + a_2) a_0 (z_1 + z_2) + (a_1^2 + a_2^2) z_1 z_2 + a_1 a_2 (z_1^2 + z_2^2).
\end{array}
\right.
$$

ou, d'après les relations (5),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 A_2 &= a_0^2 - (a_1 + a_2) a_0 - a_1^2 - a_2^2 - 3 a_1 a_2 \\ &= \left(a_0 - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

ce qui donne une valeur entière, puisque a_0, a_1, a_2 sont des entiers.

Dans le cas général où A est imaginaire, les sommes $A(r) + A(r^4)$ ou $A_1 + A_4$, et $A(r^2) + A(r^3)$ ou $A_2 + A_3$, se reproduisant l'une l'autre, ou restant les mêmes, quand on y substitue r^2, r^3, r^4 à r, sont des nombres complexes de la forme (6); le tableau (7) donne, en effet,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 + A_4 &= 2\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_4) z_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) z_2, \\ A_2 + A_3 &= 2\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_4) z_2 + (\alpha_2 + \alpha_3) z_1; \end{aligned}\right.$$

le produit de ces deux sommes est donc un nombre entier, positif ou négatif, qui est

$$(12)\quad (A_1 + A_4)(A_2 + A_3) = \left(2\alpha_0 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3}{2}\right)^2.$$

Si l'on ajoute les équations (11), on trouve, en faisant usage de la première relation (5),

$$(13)\quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 5\alpha_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4);$$

ainsi la somme des quatre conjugués de tout nombre complexe A est un nombre entier : on reconnaîtra facilement, par le tableau (7), que la somme de ses cinq associés est toujours nulle.

Les produits $A(r)A(r^4)$ ou $A_1 A_4$, $A(r^2)A(r^3)$ ou $A_2 A_3$, se reproduisant l'un l'autre, ou restant les mêmes, quand on y substitue r^2, r^3, r^4 à r, sont encore des nombres complexes de la forme (6) : le tableau (7) donne, en effet,

$$(14)\quad A_1 A_4 = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2, \quad A_2 A_3 = b_0 + b_1 z_2 + b_2 z_1,$$

en posant, pour simplifier,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 &= b_0, \\ \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_0 &= b_1, \\ \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_0 + \alpha_4\alpha_1 &= b_2. \end{aligned}\right.$$

Parmi les quatre nombres $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, on peut appeler *conjugués directs* ceux dont le produit donne un nombre complexe réel de la forme (6): A_1, A_4 sont deux conjugués directs, ainsi que A_2, A_3; A_1, A_2 sont deux conjugués indirects.

Le produit $A_1 A_2 A_3 A_4$ est un nombre entier, car on a, en multipliant les deux valeurs (14),

$$(16)\qquad A_1 A_2 A_3 A_4 = b_0^2 - (b_1 + b_2)b_0 - b_1^2 - b_2^2 + 3b_1 b_2;$$

on peut appeler ce produit entier, *norme* de A, expression introduite par M. Gauss, et le désigner par le symbole $\mathfrak{N}(A)$; on peut écrire

$$(17)\qquad \mathfrak{N}(A) = \left(b_0 - \frac{b_1 + b_2}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2.$$

Cette norme est essentiellement positive : en effet, l'équation du quatrième degré, qui a pour racines les quatre conjugués $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, et qu'il est facile de composer, a pour dernier terme $\mathfrak{N}(A)$, son second membre étant zéro. Si A est imaginaire, les conjugués $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ le sont aussi; l'équation aux conjugués a toutes ses racines imaginaires, son dernier terme est donc essentiellement positif. Si A est réel, les conjugués sont réels et égaux deux à deux, savoir, $A_1 = A_4$, $A_3 = A_2$; l'équation aux conjugués a ses racines réelles, égales deux à deux, son premier membre est un carré, et son dernier terme est encore positif.

Ainsi tout nombre complexe réel A_1 de la forme (6), qui, multiplié par son unique conjugué A_2, donne un produit entier négatif (10), ne peut pas être le produit (14) de deux nombres complexes imaginaires conjugués $A_1 A_4$ ou $A_2 A_3$. Un tel nombre ne peut être décomposé en deux facteurs de la forme (1), qu'à l'aide de coefficients compliqués d'imaginaires; il doit être considéré, dans ce Mémoire, comme un nombre complexe simple, ayant quatre conjugués, égaux deux à deux, et dont la norme est alors positive.

Par exemple, z_1 et z_2 (3) sont des nombres complexes simples, puisque $z_1 z_2 = -1$; il en est de même de $(3 + 2z_1)$, qui donne

$$(3 + 2z_1)(3 + 2z_2) = -1;$$

la norme de ces deux nombres est l'unité : elle est égale à $z_1^2 z_2^2$ dans le

premier exemple, et à $(3+2z_1)^2(3+2z_2)^2$ dans le second. Le nombre $(3+2z_1)$ est d'ailleurs égal à $-z_2^3$; et, en général, tout nombre complexe dont la norme est l'unité, qui représente un des facteurs du premier membre de l'équation

$$x^2 - 5y^2 = \pm 1,$$

et qui est de la forme $(3+2z_1)^t$ ou $(3+2z_2)^t$, est égal à $(-1)^t z_2^{3t}$ ou à $-1)^t z_1^{3t}$, et s'exprime par une puissance de z_1 ou de z_2. Une puissance quelconque de r a pour norme l'unité, car les quatre conjugués $[r^t, r^{2t}, r^{3t}, r^{4t}]$ donnent pour produit $r^{10t}=1$. Les nombres conjugués $[(1+r), (1+r^2), (1+r^3), (1+r^4)]$ ont aussi pour norme l'unité, car

$$1+r = r^3(r^2+r^3) = r^3 z_2,$$

et la norme de chaque facteur r^3 et z_2 est 1; chacun de ces nombres, ou l'une de leurs puissances, se réduit donc aussi à une puissance de r, multipliée par une puissance de z_1 ou de z_2. Il résulte de ce rapprochement, que le produit $r^h z^i_{1 \text{ ou } 2}$ représente généralement tous les sous-facteurs de l'unité, ou tous les nombres complexes dont la norme est 1.

La forme générale (17) de $\mathfrak{N}(A)$ jouit d'une symétrie remarquable. On vérifie aisément qu'elle reste la même, ou qu'elle conserve la même valeur, lorsqu'on change les coefficients de A_1 en ceux d'un quelconque de ses conjugués, et lorsqu'on augmente ou diminue d'un même nombre, soit ces coefficients eux-mêmes, soit leurs indices, en ayant soin de réduire ceux de ces indices qui surpassent 5, ou ceux qui lui sont inférieurs. C'est-à-dire que les vingt nombres du tableau (7) ont la même norme, et que cette norme n'est pas affectée par toutes les transformations qu'on peut faire subir à l'expression (1) du nombre complexe A. On peut donner à l'un quelconque des vingt nombres du tableau (7), le nom de *sous-facteur* de $\mathfrak{N}(A)$.

§ III.

Lorsqu'on multiplie l'un par l'autre deux nombres complexes

$$(18)\quad \begin{cases} A = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \alpha_4 r^4, \\ B = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \beta_4 r^4, \end{cases}$$

on obtient d'abord un polynôme du huitième degré en r, qui est

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)r + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)r^2 + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)r^3 \\ &+ (\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0)r^4 + (\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1)r \\ &+ (\alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2)r^6 + (\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)r^7 + \alpha_4\beta_4 r^8; \end{aligned}\right.$$

puis, observant que $r^5 = 1$, $r^6 = r$, $r^7 = r^2$, $r^8 = r^3$, on réunit les coefficients des quatre derniers termes aux coefficients des quatre premiers, ce qui donne le polynôme du quatrième degré :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1) \\ &+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_2)r \\ &+ (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)r^2 \\ &+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_4\beta_4)r^3 \\ &+ (\alpha_0\beta_4 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_0)r^4; \end{aligned}\right.$$

enfin, dans le but de simplifier cette nouvelle expression du produit obtenu, on retranche de ce polynôme celui-ci $(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$ (lequel est nul d'après la définition de r), multiplié par un entier convenable m; et l'on a ainsi un nombre complexe C de la forme

$$(21)\qquad C = \gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \gamma_3 r^3 + \gamma_4 r^4,$$

qui est l'expression définitive du produit de A par B.

D'après cela, et dans un ordre inverse, veut-on savoir si le nombre C (21) est divisible par A, ou s'il peut être le résultat de la multiplication de A par un autre nombre complexe B de même espèce? on ajoutera un nombre entier indéterminé m à tous les coefficients de C, lequel prendra la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(\gamma_0 + m) + (\gamma_1 + m)r + (\gamma_2 + m)r^2 \\ &+ (\gamma_3 + m)r^3 + (\gamma_4 + m)r^4, \end{aligned}\right.$$

de valeur identique à celle (21), et qui devra reproduire la forme (20) du produit cherché, pour une certaine valeur de m; puis, retranchant des quatre premiers coefficients du polynôme (22), des nombres entiers différents et indéterminés a_0, a_1, a_2, a_3, pour les ajouter ensuite, respectivement multipliés par r^5, r^6, r^7, r^8, on obtiendra la nouvelle

forme

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma_0 - m - a_0) + (\gamma_1 + m - a_1)r + (\gamma_2 + m - a_2)r^2 \\ \gamma_3 - m - a_3)r^3 + (\gamma_4 + m)r^4 + a_0 r^5 + a_1 r^6 + a_2 r^7 + a_3 r^8. \end{array}\right.$$

encore de même valeur que C (21), et qui devra reproduire la forme (19) du produit cherché, pour certaines valeurs entières de a_0, a_1, a_2, a_3.

Alors, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ étant entiers et numériquement connus; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ étant, au contraire, indéterminés; s'il est possible d'identifier les deux polynômes du huitième degré (23) et (19) par des valeurs entières de toutes les indéterminées $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, m, a_0, a_1, a_2, a_3$, on pourra affirmer que C (21) est divisible par A; c'est-à-dire qu'il sera le résultat transformé du produit de A par un autre polynôme B, pour les coefficients duquel l'identification aura fourni des valeurs entieres. Si, au contraire, les deux polynômes ne peuvent être rendus identiques par aucun système de valeurs entières des indéterminées introduites, on pourra dire, d'une manière certaine, que C *n'est pas divisible par* A; c'est-à-dire qu'il ne peut être le résultat transformé du produit de A par un nombre complexe de même espèce, ayant des coefficients entiers.

C'est ainsi qu'il faut entendre la divisibilité des nombres complexes. On voit que cette propriété repose sur la possibilité de l'identification de deux polynômes du huitième degré, quelle que soit d'ailleurs la lettre ou la quantité r, dont les diverses puissances constituent ces polynômes.

Tout nombre complexe A, dont la norme est N, ne peut être divisé par un sous-facteur a_1 d'un nombre premier n autre que l'unité, qui ne diviserait pas N: car, si l'on avait

$$A_1 = a_1 B_1,$$

il en resulterait

$$A_2 = a_2 B_2, \quad A_3 = a_3 B_3, \quad A_4 = a_4 B_4,$$

et, en multipliant,

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 . B_1 B_2 B_3 B_4,$$

c'est-à-dire,

$$\mathfrak{N}(A_1) = \mathfrak{N}(a_1) \cdot \mathfrak{N}(B_1), \quad \text{ou} \quad N = n \cdot \mathfrak{N}(B_1),$$

équation absurde, puisque n ne divise pas N, et que B étant, par hypothèse, un quotient complexe à coefficients entiers, sa norme serait un nombre entier.

Soit $\mathfrak{N}(A) = N$, et N un nombre premier; si A est décomposable en deux facteurs complexes B et C, l'un de ces facteurs aura pour norme N, l'autre aura pour norme l'unité. En effet, si l'on a

$$A_1 = B_1 C_1,$$

on en conclura

$$\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(B) \cdot \mathfrak{N}(C) = N;$$

or $\mathfrak{N}(B)$ et $\mathfrak{N}(C)$ sont des nombres entiers, leur produit devant être un nombre premier N, l'un de ces facteurs est N, et l'autre 1.

§ IV.

Lorsque A et B sont deux nombres complexes, ayant pour norme un même nombre premier N, A est divisible par un des conjugués de B. En effet, on peut admettre que le polynôme algébrique, au moyen duquel s'exprime B, ne soit pas décomposable en deux facteurs rationnels, puisque, s'il l'était, l'un de ces facteurs ayant pour norme l'unité, on prendrait l'autre facteur pour B. Les équations

$$\mathfrak{N}(A) = N, \quad \mathfrak{N}(B) = N$$

expriment uniquement l'égalité des deux produits $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, quand on a égard à la définition de r, et quand tous les calculs sont effectués. On peut donc poser

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = B_1 B_2 B_3 B_4, \tag{24}$$

avant d'entreprendre ces calculs. Supposons que, ne faisant subir aucune transformation aux polynômes du quatrième degré B_1, B_2, B_3, B_4, et regardant r comme une lettre indéterminée, on effectue leur multiplication; le produit du second membre de l'équation (24) sera un polynôme P du seizième degré en r. Mettons chacun des polynômes, facteurs du premier membre, sous la forme (23); les nombres m, a_0,

a_1, a_2, a_3 étant différents pour chaque facteur. Dans le produit effectué du premier membre ainsi transformé, on peut regarder r comme une quantité indéterminée; ce produit sera un polynôme M du trente-deuxième degré, qui se réduira à P, quand on introduira la condition que r soit une racine de l'équation (2). On peut toujours composer un polynôme Q, du seizième degré en r, contenant un grand nombre d'indéterminées, qui satisfasse à la condition de devenir égal à l'unité lorsque r vérifie l'équation (2); en effet, $\varphi(r)$ étant le premier membre de cette équation, et $\psi(r)$ un polynôme complet du douzième degré, dont les treize coefficients soient indéterminés, on prendra

$$Q = 1 + \varphi(r)\psi(r).$$

Cela posé, le polynôme M et le produit PQ, qui sont déjà identiques pour les quatre valeurs de r, racines imaginaires de l'équation (2), pourront être identifiés à l'aide des indéterminées introduites, lesquelles sont au nombre de trente-trois. Mise sous cette forme, l'équation

$$(25) \qquad A_1 A_2 A_3 A_4 = B_1 B_2 B_3 B_4 [1 + \varphi(r)\psi(r)]$$

peut être regardée comme une identité en r; alors le polynôme B, indécomposable en facteurs rationnels, devra diviser l'un des facteurs du premier membre. Soit

$$A_3 = B_1 R_1,$$

on en conclura

$$A_1 = B_2 R_2, \quad A_4 = B_3 R_3, \quad A_3 = B_4 R_4,$$

et, par l'équation (24),

$$\mathfrak{N}(R_1) = 1.$$

Ainsi A_1, A_2, A_3, A_4 sont respectivement divisibles par les quatre conjugués de B, et les quotients sont des nombres complexes dont la norme est l'unité.

Ainsi, lorsque les nombres complexes A et B ont tous deux pour norme un nombre premier N, autre que l'unité, un des conjugués de B doit diviser A. Et l'on peut dire que, réciproquement, B est divisible par l'un des conjugués de A : en effet, si l'on trouve, comme

ci-dessus,

$$A_1 = B_3 R_3,$$

et, comme conséquence,

$$A_3 = B_1 R_1,$$

puisque $R_1 R_2 R_3 R_4 = 1$ nécessairement, on en conclura

$$R_2 R_3 R_4 A_3 = B_1,$$

c'est-à-dire que B_1 sera égal à A_3 multiplié par $R_2 R_3 R_4$, multiplicateur complexe dont la norme est 1.

De ce qui précède, il résulte que si un nombre complexe C est divisible par un des conjugués de A, diviseur complexe qui a pour norme le nombre premier N, il sera aussi divisible par l'un des conjugués de tout autre diviseur complexe B, qui aurait la même norme N que A : en effet, si l'on trouve

$$C_1 = D_1 A_k,$$

comme A_k est nécessairement divisible par l'un des conjugués de B, on doit avoir

$$A_k = R_1 B_l, \quad \text{d'où} \quad C_1 = D_1 R_1 B_l,$$

R_1 ayant d'ailleurs pour norme l'unité. Donc C_1 est divisible par B_l, ou par l'un des conjugués de B, s'il l'est par A_k, ou par l'un des conjugués de A.

Inversement, si C n'est pas divisible par l'un des conjugués de B, sous-facteur du nombre premier N, il ne pourra l'être par aucun des conjugués de A, autre sous-facteur du même nombre premier N. Si l'on essaye de diviser C par B_1, par B_2, par B_3, par B_4, et que l'on ne réussisse, dans aucune de ces quatre épreuves, à obtenir pour quotient un nombre complexe entier, on pourra affirmer que $\mathfrak{N}(C)$ ne contient pas le facteur premier N.

§ V.

Soit toujours $\mathfrak{N}(B) = \mathfrak{N}(A) = N$, et N un nombre premier; A_1 est divisible par l'un des conjugués de B, soit par B_3 : peut-il l'être par un

autre conjugué de B_1 par B_2 par exemple? Soit $A_1 = R_1 B_1 = P_1 B_2$; R_1 et P_1 sont nécessairement des nombres complexes dont la norme est l'unité. De l'équation

$$R_1 B_3 = P_1 B_2$$

on conclura, en multipliant par $R_2 R_3 R_4$, et faisant $R_2 R_3 R_4 P_1 = Q_1$,

$$B_3 = Q_1 B_2.$$

Si l'on change, dans cette dernière équation, r en r^4, elle devient

$$B_2 = Q_4 R_3;$$

d'où résulte, par la multiplication,

$$B_3 B_2 = Q_1 Q_4 B_2 B_3,$$

et, en divisant par $B_3 B_2$,

$$Q_1 Q_4 = 1;$$

or on a

$$R_2 R_3 R_4 P_1 = Q_1,$$

d'où, en changeant r en r^4,

$$R_3 R_2 R_1 P_4 = Q_4;$$

multipliant et réduisant, il vient

$$R_2 R_3 P_1 P_4 = 1.$$

On reconnaît facilement que cette équation ne peut être satisfaite que si $P_1 = \pm R_1$, ce qui donnera

$$B_3 = B_2, \quad \text{ou} \quad B_3 - B_2 = 0.$$

Soient prises pour B_1, B_2, B_3 les expressions A_1, A_2, A_3 du tableau (7).

1°. Si $B_2 = B_3$, il faudra que l'on ait, en supprimant α_0 dans les deux membres, et divisant par r,

$$\alpha_3 + \alpha_1 r + \alpha_4 r^2 + \alpha_2 r^3 = \alpha_2 + \alpha_4 r + \alpha_1 r^2 + \alpha_3 r^3;$$

or cette équation ne peut subsister, à moins que les coefficients des mêmes puissances de r ne soient respectivement égaux dans les deux membres, car r ne peut être racine d'une équation du troisième degré;

donc il faut que $\alpha_3 = \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1$: alors

$$B_1 = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = B_4, \quad B_2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_2 + \alpha_2 z_1 = B$$

et

$$B_1 B_2 = B_3 B_4 = n,$$

n étant un entier. On aurait donc

$$B_1 B_2 B_3 B_4 = \mathfrak{N}(B) = N = n^2;$$

ce qui ne peut être, puisque N est un nombre premier, et non pas un carré.

2°. Si $B_3 + B_2 = 0$, on aura

$$2\alpha_0 + (\alpha_3 + \alpha_2) z_1 + (\alpha_4 + \alpha_1) z_2 = 0,$$

ce qui exige que

$$\alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_1 = 2\alpha_0;$$

de là on tire

$$\alpha_3 = 2\alpha_0 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 2\alpha_0 - \alpha_1,$$

et B_1 devient successivement

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_0 (1 + 2r^3 + 2r^4) + \alpha_1 (r - r^4) + \alpha_2 (r^2 - r^4) \\ &= \alpha_0 (1 - r - r^2 + r^3 + r^4) + \alpha_1 (r - r^4) + \alpha_2 (r^2 - r^4) \\ &= (1 - r)[(\alpha_1 - \alpha_0)(r + r^2 + r^3) + (\alpha_2 - \alpha_0) r^2]. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que B_1 est décomposable en deux facteurs, dont l'un, $(1 - r)$, a pour norme 5; car

$$(1 - r)(1 - r^4) = 2 - z_1, \quad (1 - r^2)(1 - r^3) = 2 - z_2,$$
$$(2 - z_1)(2 - z_2) = 4 - 2(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 5.$$

Or on a vu que si B_1 était décomposable en deux facteurs, l'un de ces facteurs devait avoir pour norme N, et l'autre l'unité; donc il faudra que $N = 5$, et que le second facteur ait pour norme 1.

Ainsi, excepté lorsque la norme est 5, si A_1 est divisible par B_3, il ne peut l'être par son conjugué direct B_2, et réciproquement. Il faut voir, en outre, si l'on peut avoir

$$A_1 = B_1 B_4 = P_1 B_2.$$

ou si A peut être divisible par deux conjugués indirects de B. On aurait

$$R_1 B_1 = P_1 B_2,$$

d'où, changeant r en r^3,

$$R_3 B_3 = P_3 B_1;$$

de ces deux équations on déduit

$$B_1 = R_2 R_3 R_4 P_1 B_2 = P_1 P_2 P_4 R_3 B_3,$$

c'est-à-dire que B_3 et B_2, respectivement multipliés par deux coefficients complexes ayant pour norme l'unité, pourraient donner des produits égaux; ce qui vient d'être démontré impossible, lorsque N n'est pas 5.

Donc si $\pi(A) = \pi(B) = N$, N étant un nombre premier autre que 5, A sera divisible par un des conjugués de B et ne sera divisible par aucun des trois autres; et A pouvant être précisément un des conjugués de B, cette proposition démontre que les quatre sous-facteurs conjugués d'un nombre premier autre que 5 *sont premiers entre eux*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que des sous-facteurs de l'unité.

L'exception relative à l'exposant 5 est caractéristique : 5 est le seul des nombres, pouvant servir de normes, dont les quatre sous-facteurs conjugués ne sont pas premiers entre eux. On peut prendre pour ces sous-facteurs

$$26 \qquad 1 - r = \lambda_1, \quad 1 - r^2 = \lambda_2, \quad 1 - r^3 = \lambda_3, \quad 1 - r^4 = \lambda_4,$$

et l'on reconnaît aisément que l'un quelconque de ces quatre conjugués reproduit les trois autres, lorsqu'on le multiplie par des sous-facteurs de l'unité : en effet, on a identiquement

$$27 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -r^2 z_1 \lambda_2 = r^4 z_1 \lambda_3 = -r\lambda_4, \\ r^3 z_2 \lambda_1 = \lambda_2 = -r^2 \lambda_3 = -r^4 z_2 \lambda_4, \\ -rz_2 \lambda_1 = -r^2 \lambda_2 = \lambda_3 = r^2 z_2 \lambda_4, \\ -r^4 \lambda_1 = rz_1 \lambda_2 = -r^3 z_1 \lambda_3 = \lambda_4; \end{array} \right.$$

et puisque $5 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$, on trouve, en multipliant les quatre membres

de ces équations qui occupent le même rang vertical,

$$(28) \qquad 5 = r^3 z_2^2 \lambda_1^4 = r z_1^2 \lambda_2^4 = r^4 z_1^2 \lambda_3^4 = r^2 z_2^2 \lambda_4^4 .$$

c'est-à-dire que 5 est égal à la quatrième puissance d'un de ses sous-facteurs, multiplié par un coefficient complexe dont la norme est 1; tandis que toute norme première, autre que 5, est égale au produit de quatre sous-facteurs conjugués et premiers entre eux. D'après cela, 5 n'a réellement qu'un seul sous-facteur; on peut adopter $\lambda_1 = 1 - i$. 5 sera divisible par sa quatrième puissance, et non par une puissance supérieure; car on a

$$5 = r^3 z_2^2 \lambda_1^4 ,$$

et ni r, ni z_2 ne sont divisibles par λ_1.

§ VI.

Lorsque A a pour norme le produit de deux nombres premiers différents m et n, dont on connaît deux sous-facteurs respectifs a et b, A est divisible par un des conjugués de a, ensuite par un des conjugués de b, et le quotient définitif a pour norme l'unité. De l'équation

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 . b_1 b_2 b_3 b_4$$

on peut conclure, par une méthode semblable à celle du § IV, que a_1 doit diviser l'un des facteurs du premier membre. Soit $A_2 = a_1 B_1$, il en résultera

$$A_4 = a_2 B_2 , \quad A_1 = a_3 B_3 , \quad A_3 = a_4 B_4 .$$

et, en substituant,

$$B_1 B_2 B_3 B_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 ;$$

donc b_1 doit diviser un des conjugués de B. Soit $B_1 = b_1 R_1$, on en conclura

$$B_3 = b_2 R_2 , \quad B_2 = b_3 R_3 , \quad B_1 = b_4 R_4 ,$$

et, en substituant,

$$\mathfrak{N}(R_1) = 1 ;$$

on aura donc

$$A_1 = a_3 b_2 R_2 .$$

c'est-à-dire que A sera divisible par l'un des conjugués de a, ensuite par l'un des conjugués de b, et que le quotient définitif aura pour norme l'unité.

Lorsque la norme N de A contient comme facteur un nombre premier u élevé à la puissance i, A est successivement divisible i fois par un des sous-facteurs conjugués de u. Soit N′ le quotient de N par u^i, a un sous-facteur de u, B un sous-facteur de N′, on aura

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = a_1^i a_2^i a_3^i a_4^i \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 ;$$

a_1 diviseur complexe du second membre doit diviser le premier, et conséquemment l'un des quatre facteurs qui le composent ; soit $A_1 = a_1 R_1$, on en conclura

$$A_1 = A_2 R_2, \quad A_3 = A_4 R_3, \quad A_2 = a_4 R_4,$$

et, en substituant,

$$R_1 R_2 R_3 R_4 = a_1^{i-1} a_2^{i-1} a_3^{i-1} a_4^{i-1} \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4,$$

il faudra encore que l'un des facteurs du premier membre soit divisible par a_1, etc.

Si la norme N de A, décomposée en ses facteurs premiers, est le produit $u^{\alpha}.u'^{\beta}.u''^{\gamma}\ldots$, de l'unité, par α fois u, dont un sous facteur est a, par β fois u', dont un des sous-facteurs est b, par γ fois u'', dont un des sous-facteurs est c.... A sera le produit d'un sous-facteur de l'unité, par α sous-facteurs égaux à un ou à plusieurs des conjugués de a, par β sous-facteurs égaux à un ou à plusieurs des conjugués de b, par γ sous-facteurs égaux à un ou à plusieurs des conjugués de c.... Ainsi, pour décomposer ce nombre A en ses facteurs premiers, on essayera successivement α fois la division par les conjugués de a, et l'on réussira à toutes les fois (si $n = 5$, $a = \lambda_1$, on pourra diviser de suite A par λ_1^{α}); ensuite on procédera aux β divisions par les conjugués de b, aux γ divisions par les conjugués de c, ... : le quotient définitif aura pour norme l'unité. De là, et de ce qu'un nombre complexe ne peut être divisible par un sous-facteur d'un nombre premier qui ne divise pas sa norme, on conclura aisément qu'un nombre complexe ne peut être réductible que d'une seule manière en ses facteurs premiers.

Quand il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur D, entre

deux nombres complexes A et B, il faut calculer d'abord $\pi(A)$ et $\pi(B)$. Si ces deux normes sont premières entre elles, les nombres complexes A et B sont premiers entre eux, et D ne pouvant avoir pour norme que l'unité, tout calcul ultérieur est inutile. Si $\pi(A)$ et $\pi(B)$ ont un plus grand commun diviseur N, il faut dégager, dans A et dans B, tous les sous-facteurs conjugués des nombres premiers qui divisent N, et ceux-là seulement; il est facile ensuite de composer D. Si N est divisible par 5^t, λ_1 est un facteur de D, et il est inutile de s'occuper des facteurs λ_1 dans les opérations à effectuer sur A et B.

§ VII.

La somme de deux cinquièmes puissances $(A^5 + B^5)$ est divisible par $(A + B)$; mais cette somme pouvant s'écrire ainsi : $[A^5 - (Br^4)^5]$, sera aussi divisible par $(A + Br^4)$; la somme $(A^5 + B^5)$ est donc divisible par $A + B$, $A + Br$, $A + Br^2$, $A + Br^3$, $A + Br^4$: d'ailleurs elle est égale au produit de ces cinq facteurs. En effet, si l'on représente par r^0, r', r'', r''', r^{IV} les cinq racines de l'équation

$$r^5 - 1 = 0,$$

et si l'on désigne par S_k la somme des produits k à k de ces racines, le produit dont il s'agit peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&(A + Br^0)(A + Br')(A + Br'')(A + Br''')(A + Br^{\text{IV}})\\ &= A^5 + S_1 BA^4 + S_2 B^2A^3 + S_3 B^3A^2 + S_4 B^4 A + S_5 B^5 = A^5 + B^5;\end{aligned}$$

car, d'après l'équation

$$r^5 - 1 = 0,$$

on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0, \quad S_5 = 1.$$

On a donc, généralement,

$$(29)\quad A^5 + B^5 = (A + B)(A + Br)(A + Br^2)(A + Br^3)(A + Br^4),$$

quels que soient les nombres A et B, entiers ou complexes.

Lorsque A et B sont des nombres entiers, le premier membre de l'équation (29) et le premier facteur du second membre le sont aussi :

les quatre derniers facteurs sont complexes et conjugués; leur norme est $\left|\frac{A^2+B^2}{A+B}\right|$. L'équation (29) ayant encore lieu lorsque B est négatif, on peut poser, généralement,

$$(30)\qquad \frac{A^2 \pm B^2}{A \pm B} = \mathfrak{N}(A \pm Br);$$

ou, inversement, si l'on désigne par le symbole $sf(N)$ un sous-facteur complexe dont la norme est N, on pourra écrire

$$(30\ bis)\qquad A \pm Br = sf\left(\frac{A^2 \pm B^2}{A+B}\right).$$

En donnant dans ces formules à A et B des valeurs entières, on a immédiatement les sous-facteurs complexes de nombres premiers ou composés, sur lesquels on peut vérifier les propriétés relatives à la divisibilité des nombres complexes. Lorsqu'on prend $A = B = 1$, l'équation (30 *bis*) donne

$$1 + r = sf(1), \quad 1 - r = sf(5).$$

Voici quelques autres exemples :

(1)	$2 + r = sf(11)$,	(6)	$5 + 2r = sf(11.41)$,
(2)	$2 - r = sf(31)$,	(7)	$4 - r = sf(11.31)$,
(3)	$3 + r = sf(61)$,	(8)	$9 - r = sf(11^2.61)$,
(4)	$4 + r = sf(5.41)$,	(9)	$5 - 4r = sf(11.191)$,
(5)	$3 - r = sf(11^2)$,	(10)	$7 + r = sf(11.191)$.

Les trois premiers donnent les sous-facteurs des nombres premiers 11, 31, 61. Du quatrième on déduit, en essayant la division de $(4+r)$ par un sous-facteur de 5,

$$(4 + r) = (1 - r^2)(2 + r^2 - r^3);$$

on a donc

$$2 + r^2 - r^3 = sf(41).$$

D'après le cinquième exemple, $(3 - r)$ doit être divisible deux fois par un sous-facteur de 11; si l'on essaye successivement la division de $(3 - r)$ par les conjugués de $(2 + r)$, elle réussit pour $(2 + r^2)$, et l'on

trouve

$$(3-r)=(2-r^2)(1-r-r^2);$$

donc $(1-r-r^2)$ est aussi un sous-facteur de 11, ce qui se vérifie; on a d'ailleurs

$$(2+r^2)=(1+r^2)(1-r-r^2), \quad \text{d'où} \quad (3-r)=(1+r^2)(1-r-r^2)^2.$$

D'après le sixième exemple, $(5+2r)$ doit être divisible par un des sous-facteurs de 11, ensuite par un des sous-facteurs de 41, et le quotient définitif doit avoir pour norme l'unité. Les épreuves de division donnent, en effet,

$$5+2r=(2+r)(2+r^2-r^3)(1+r).$$

Le septième exemple est facile à vérifier, car

$$(2+r)=sf(11), \quad (2-r)=sf(31);$$

donc

$$(2+r)(2-r)=4-r^2=sf(11.31),$$

et aussi

$$4-r=sf(11.31).$$

De même pour le huitième exemple, car

$$3-r=sf(11^2), \quad 3+r=sf(61);$$

donc

$$9-r^2=sf(11^2.61),$$

et aussi

$$(9-r)=sf(11^2.61).$$

Le neuvième et le dixième exemple donnent, pour sous-facteurs de (11.191), les deux nombres complexes $(5-4r)$ et $(7+r)$. Les essais de division rendent compte de cette coïncidence; on trouve

$$5-4r)=(2+r)(4+2r^3+r^4), \quad \text{d'où} \quad (4+2r^3+r^4)=sf(191);$$

et ensuite

$$(7+r)=(1-r^3)(2+r^3)(4+2r^3+r^4).$$

Ainsi, $(5-4r)$ et $(7+r)$ sont divisibles par le même sous-facteur de 191, mais par deux sous-facteurs différents de 11.

Toute norme non divisible par 5, et décomposable en quatre sous-facteurs conjugués de la forme (11), est nécessairement un nombre de la forme $(5i+1)$. En effet, d'après l'équation (17), le nombre complexe A (1) a pour norme $\left\{\left[b_0 - \frac{1}{2}(b_1+b_2)\right]^2 - 5\left[\frac{1}{2}(b_1-b_2)\right]^2\right\}$, b_0, b_1, b_2 ayant les valeurs (15); désignant par a la somme $(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ des coefficients de A, on aura

$$b_0 = a^2 - 2(b_1+b_2),$$

et, conséquemment,

$$(31) \qquad \mathfrak{N}(A) = \left[a^2 - 5\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\right]^2 - 5\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2.$$

Si a est un multiple de 5, $\mathfrak{N}(A)$ sera divisible par 5, et A par λ_1, ou par l'un des sous-facteurs de 5. Si $\mathfrak{N}(A)$ n'est pas divisible par 5, a sera premier avec 5; et, employant la notation de M. Gauss, on aura

$$\mathfrak{N}(A) = a^4 \equiv 1 \pmod{5},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{N}(A) = 5i+1.$$

Cette propriété a été signalée par M. Jacobi (Tome VIII de ce Journal, page 171).

La norme de tout nombre complexe A (1) divise une infinité de nombres entiers de la forme $\left(\frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}\right)$. En effet, il est toujours possible, et cela d'une infinité de manières, de trouver un nombre complexe B (18), qui, multipliant A, donne un produit (20) dont trois coefficients soient nuls; car ce problème conduit à trois équations du premier degré entre les cinq coefficients de B, et l'on trouve, par une analyse facile, mais longue, des valeurs entières, et cependant encore très-indéterminées, de ces cinq coefficients, qui vérifient les trois équations posées. On aura alors

$$A.B = \gamma_0 + \gamma_i r^i = sf\left(\frac{\gamma_0^2+\gamma_i^2}{\gamma_0+\gamma_i}\right).$$

γ_0 et γ_i dépendant des coefficients de A, et de deux autres entiers arbitraires.

Ces remarques expliquent pourquoi, dans tous les exemples déduits de la formule (30) ou (30 *bis*), on ne trouve que des normes décomposables en facteurs premiers de la forme 5 et $(5i+1)$. Elles indiquent aussi qu'en augmentant le nombre de ces exemples, on parviendrait à composer une table des sous-facteurs des nombres premiers $(5i+1)$, soit directement, soit par déduction, comme on l'a fait plus haut à l'égard de 41 et de 191. Il suffit déjà de calculer les cinquièmes puissances des nombres au-dessous de 12, pour obtenir, à peu d'exceptions près, les sous-facteurs des nombres premiers $(5i+1)$ inférieurs à 1021, avec ceux de beaucoup d'autres nombres, supérieurs à cette limite.

§ VIII.

Quand A et B sont des nombres complexes, il est préférable, pour ce qui suit, de donner à l'équation (29) la forme suivante :

$$(32)\quad A^5+B^5=(A+B)(Ar+Br^4)(Ar^2+Br^3)(Ar^3+Br^2)(Ar^4+Br),$$

laquelle en est une conséquence; car les quatre derniers facteurs de (32), respectivement divisés par la puissance de r qui accompagne A, donnent, dans un autre ordre, les quatre derniers facteurs de (29), et le produit des diviseurs est $r^{10}=1$.

Si l'on désigne par M, M′, M″, M‴, M^{iv} les cinq facteurs du second membre de l'équation (32), les accents n'ayant plus ici la signification de ceux du tableau (7), on reconnaît facilement que ces facteurs vérifient les dix équations

$$(33)\quad \begin{cases} (1)\quad M''+M'''=z_2M, & (6)\quad M^{iv}+M'=z_1M, \\ (2)\quad M'''+M^{iv}=z_2M', & (7)\quad M+M''=z_1M', \\ (3)\quad M^{iv}+M=z_2M'', & (8)\quad M'+M'''=z_1M'', \\ (4)\quad M+M'=z_2M''', & (9)\quad M''+M^{iv}=z_1M''', \\ (5)\quad M'+M''=z_2M^{iv}, & (10)\quad M'''+M=z_1M^{iv}, \end{cases}$$

qui n'en comportent réellement que trois distinctes, puisque A et B étant connus, ou les deux premiers facteurs $(A+B)$, $(Ar+Br^4)$, les trois autres doivent s'ensuivre.

Il résulte des relations (33), qu'un nombre complexe dont la

norme n'est pas l'unité, ne peut diviser deux des cinq facteurs $M^{(i)}$, sans diviser tous les autres. Par exemple, si un nombre complexe δ divise M et M', d'après la sixième (33), δ divisera M^{iv}, d'après la septième M'', d'après la première $M^{(i)}$. Ainsi le second membre de l'équation (32) sera divisible par δ^5, et les cinq quotients des $M^{(i)}$ par δ vérifieront encore les équations (33). On peut supposer que l'on ait ainsi divisé les $M^{(i)}$ par tous les sous-facteurs communs à deux d'entre eux, et par conséquent aux trois autres. Alors l'équation (32) pourra se mettre sous la forme

$$(34)\qquad A^5 + B^5 = K^5 . m . m' . m'' . m''' . m^{iv},$$

K étant le produit des diviseurs communs aux $M^{(i)}$, et $m^{(i)}$ le quotient de $M^{(i)}$ par K; les nombres $m^{(i)}$, actuellement premiers entre eux, c'est-à-dire n'ayant d'autres diviseurs communs que ceux dont la norme est l'unité, vérifieront les équations (33).

On peut toujours supposer que A et B sont premiers entre eux, car si δ est le plus grand diviseur complexe, commun à A et B, δ^5 divisera A^5, B^5, et nécessairement K^5 dans l'équation (34), et l'on pourra supprimer ce diviseur commun. Alors, si A et B sont premiers entre eux, K ne pourra être que le sous-facteur de 5 : en effet, les deux équations

$$A + B = M = Km, \quad Ar + Br^4 = M' = Km'$$

donnent

$$A(r - r^4) = K(m' - r^4 m), \quad B(r - r^4) = K(rm - m'),$$

et K ne pouvant diviser à la fois A et B, qui sont premiers entre eux, divisera nécessairement $(r - r^4)$ ou $(1 - r^3)$; K ne pourra donc être que le sous-facteur de 5, à la première puissance seulement.

La somme des cinquièmes puissances de deux conjugués directs d'un nombre complexe imaginaire A est le produit de cinq nombres complexes réels. Les deux sommes $(A_1^5 + A_4^5)$ et $(A_2^5 + A_3^5)$ sont conjuguées, et leur produit donne cinq facteurs entiers. En effet, la formule (32) donne

$$(35)\quad \begin{cases} A_1^5 + A_4^5 = (A_1 + A_4)(A'_1 + A'_4)(A''_1 + A''_4)(A'''_1 + A'''_4)(A^{iv}_1 + A^{iv}_4), \\ A_2^5 + A_3^5 = (A_2 + A_3)(A'_2 + A'_3)(A''_2 + A''_3)(A'''_2 + A'''_3)(A^{iv}_2 + A^{iv}_3), \end{cases}$$

en reprenant ici, pour les accents supérieurs, la même signification qu'au tableau (7), lequel fournit les valeurs suivantes :

$$(36)\quad \begin{cases} A_1 + A_4 = 2\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_4)z_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)z_2, & A_2 + A_3 = 2\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_4)z_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)z_1, \\ A_1^{\text{IV}} + A_4' = 2\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_0)z_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)z_2, & A_2''' + A_3'' = 2\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_0)z_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)z_1, \\ A_1''' + A_4'' = 2\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)z_1 + (\alpha_4 + \alpha_0)z_2, & A_2' + A_3^{\text{IV}} = 2\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)z_2 + (\alpha_4 + \alpha_0)z_1, \\ A_1'' + A_4''' = 2\alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2)z_1 + (\alpha_0 + \alpha_1)z_2, & A_2^{\text{IV}} + A_3' = 2\alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2)z_2 + (\alpha_0 + \alpha_1)z_1, \\ A_1' + A_4^{\text{IV}} = 2\alpha_4 + (\alpha_0 + \alpha_3)z_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)z_2, & A_2'' + A_3''' = 2\alpha_4 + (\alpha_0 + \alpha_3)z_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)z_1, \end{cases}$$

pour les facteurs des seconds membres des équations (35). Les facteurs de $(A_2^5 + A_3^5)$ sont évidemment les conjugués de ceux qui appartiennent à $(A_1^5 + A_4^5)$. Les cinq nombres que donnent les produits de deux facteurs conjugués sont

$$(37)\quad \begin{cases} (A_1 + A_4)(A_2 + A_3) = \left(2\alpha_0 - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3}{2}\right)^2, \\ (A_1^{\text{IV}} + A_4')(A_2''' + A_3'') = \left(2\alpha_1 - \dfrac{\alpha_2 + \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{\alpha_2 + \alpha_0 - \alpha_3 - \alpha_4}{2}\right)^2, \\ (A_1''' + A_4'')(A_2' + A_3^{\text{IV}}) = \left(2\alpha_2 - \dfrac{\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_0}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_0}{2}\right)^2, \\ (A_1'' + A_4''')(A_2^{\text{IV}} + A_3') = \left(2\alpha_3 - \dfrac{\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_0 + \alpha_1}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{\alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_0 - \alpha_1}{2}\right)^2, \\ (A_1' + A_4'')(A_2'' + A_3''') = \left(2\alpha_4 - \dfrac{\alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - 5\left(\dfrac{\alpha_0 + \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)^2. \end{cases}$$

On reconnaît facilement qu'ils sont entiers, et que leur somme est nulle.

La différence $(A_1^5 - A_4^5)$ est le produit de λ_1^5 par cinq facteurs complexes et réels. La différence $(A_2^5 - A_3^5)$ est le produit de λ_2^5 par cinq autres facteurs complexes et réels, conjugués des cinq premiers. En effet, la formule (32) donne aussi

$$(38)\quad \begin{cases} A_1^5 - A_4^5 = (A_1 - A_4)(A_1' - A_4^{\text{IV}})(A_1'' - A_4''')(A_1''' - A_4'')(A_1^{\text{IV}} - A_4'), \\ A_2^5 - A_3^5 = (A_2 - A_3)(A_2' - A_3^{\text{IV}})(A_2'' - A_3''')(A_2''' - A_3'')(A_2^{\text{IV}} - A_3'), \end{cases}$$

et le tableau (7) conduit, par des transformations faciles, aux valeurs

$$
(39)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
A_1 - A_4 = r^2\lambda_1[(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_4)z_2], & A_2 - A_3 = r^4\lambda_2[(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_4)z_1],\\
A_1 - A_4' = r^2\lambda_1[(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_0-\alpha_3)z_2], & A_2'' - A_3''' = r^4\lambda_2[(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_0-\alpha_3)z_1],\\
A_1'' - A_4''' = r^2\lambda_1[(\alpha_0-\alpha_1)-(\alpha_4-\alpha_2)z_2], & A_2^{\text{IV}} - A_3' = r^4\lambda_2[(\alpha_0-\alpha_1)-(\alpha_4-\alpha_2)z_1],\\
A_1' - A_4^{\text{IV}} = r^2\lambda_1[(\alpha_4-\alpha_0)-(\alpha_3-\alpha_1)z_2], & A_2' - A_3^{\text{IV}} = r^4\lambda_2[(\alpha_4-\alpha_0)-(\alpha_3-\alpha_1)z_1],\\
A_1''' - A_4' = r^2\lambda_1[(\alpha_3-\alpha_4)-(\alpha_2-\alpha_0)z_2], & A_2''' - A_3'' = r^4\lambda_2[(\alpha_3-\alpha_4)-(\alpha_2-\alpha_0)z_1];
\end{array}
\right.
$$

d'où l'on conclut

$$
(40)\qquad A_1^5 - A_4^5 = \lambda_1^5 Z_2, \quad A_2^5 - A_3^5 = \lambda_2^5 Z_1,
$$

en désignant par Z_2 et Z_1 deux produits réels et conjugués.

Les entiers (37), et ceux que donneraient les produits des facteurs conjugués de Z_2 et Z_1, sont des nombres qui se déduisent de A, et que l'on pourrait appeler ses *normes latérales*. Ils ne sont plus essentiellement positifs, ni toujours de la forme $(5i+1)$. Leur étude conduit à des remarques importantes, mais qui sont étrangères à l'objet du Mémoire actuel.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I.

Soit proposé de résoudre, en nombres complexes, l'équation

$$
(1)\qquad A^5 + B^5 + C^5 = 0.
$$

On peut supposer que A, B, C sont premiers entre eux; car si un même sous-facteur δ, d'un nombre premier dont la norme n'est pas l'unité, divise à la fois A, B, C, on pourra diviser l'équation par δ^5, et le quotient sera encore la somme de trois cinquièmes puissances. On agira de même pour tout diviseur complexe commun aux trois nombres A, B, C. Ces trois nombres n'étant plus divisibles tous les trois par un même sous-facteur, deux quelconques sont aussi premiers entre eux; car si A et B avaient un sous-facteur commun δ, δ^5 diviserait $A^5 + B^5$, et par suite C^5: donc C serait aussi divisible par δ; A, B, C ne seraient donc pas premiers entre eux.

Un des trois nombres A, B, C est nécessairement divisible par

$(1-r) = \lambda_1$ sous-facteur de 5. En effet, on a généralement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(A+B+C)^5 = A^5 + B^5 + C^5 \\ &+ 5(A+B)(B+C)(C+A)[(A+B+C)^2 - (AB+CA+BC)], \end{aligned}\right.$$

et l'on aura, en vertu de l'équation proposée,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(A+B+C)^5 \\ &= 5(A+B)(B+C)(C+A)[(A+B+C)^2 - (AB+CA+BC)] \end{aligned}\right.$$

Or 5 égale $r^3 z_2^2 \lambda_1^4$; le second membre de l'équation (3) est donc divisible par λ_1, le premier doit donc l'être: étant une cinquième puissance, il sera divisible par λ_1^5; le second devant l'être aussi, et 5 n'étant divisible que par λ_1^4, il faudra que l'un des quatre autres facteurs soit divisible par λ_1. Si c'est le dernier, puisque $(A+B+C)$ est divisible par λ_1, il faudra que $(AB+CA+BC)$ le soit, et par suite aussi $(A^2+B^2+C^2)$; les sommes des coefficients de A, B, C, divisées par 5, donneront les résidus ± 1, ± 2, et les sommes des coefficients de leurs carrés les résidus $+1$, -1: or la somme de trois résidus $+1$ et -1 ne peut être nulle, ni égale à 5; donc il faudra qu'une des sommes des coefficients de A, de B, de C, donne le résidu zéro, c'est-à-dire que l'un des trois nombres A, B, C soit divisible par λ_1. Sinon, le dernier facteur du second membre de l'équation précédente n'admettant pas le diviseur λ_1, il faudra que ce soit un des trois facteurs $(A+B)$, $(C+A)$, $(B+C)$, qui l'admette; alors, puisque $(A+B+C)$ est divisible par λ_1, C, B ou A le sera aussi. Ainsi un des trois nombres A, B, C est nécessairement divisible par λ_1; nous supposerons que ce soit C.

Si l'on a à résoudre l'équation

$$A^5 + B^5 = z_1^2 C^5,$$

il est facile de voir que C doit être divisible par λ_1: en effet, l'équation (2) devient alors

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A+B+C)^5 = (z_1^2+1)C^5 \\ &+ 5(A+B)(B+C)(C+A)[(A+B+C)^2 - (AB+CA+BC)]. \end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$5 = r^3 z_2^2 \lambda_1^4, \quad z_1^2 + 1 = 2 - z_1 = (1 - r)(1 - r^4) = -r^4 \lambda_1^2;$$

donc le second membre de l'équation (4) est divisible par λ_1^2; $(A+B+C)$ doit donc être divisible par λ_1, le second membre par λ_1^5, d'où C par λ_1, et par suite aussi $(A+B)$.

Si l'on se propose l'équation

$$A^5 + B^5 = z_1 C^5,$$

il faut encore que C soit divisible par λ_1 : en effet, on a généralement

$$(A+B-2C)^2 = A^5 + B^5 - 32C^5$$
$$+ 5(A+B)(A-2C)(B-2C)[(A+B-2C)^2 + 2C(A+B) - AB],$$

et, d'après l'équation à résoudre, on aura

$$(A+B-2C)^2 = (z_1 - 2)C^5$$
$$+ 5\{(A+B)(A-2C)(B-2C)[(A+B-2C)^2 + 2C(A+B) - AB] - 6C^5\};$$

or $5 = r^3 z_2^2 \lambda_1^4$, $z_1 - 2 = r^4 \lambda_1^2$, donc le second membre de l'équation précédente est divisible par λ_1^2 : $(A+B-2C)$ doit donc être divisible par λ_1, le second membre par λ_1^5, d'où C, et par suite $(A+B)$ par λ_1.

On démontre de la même manière que les équations

$$A^5 + B^5 = z_2^2 C^5, \quad A^5 + B^5 = z_2 C^5$$

ne peuvent exister si C n'est pas divisible par λ_1. Ainsi les cinq équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A^5 + B^5 = (-C)^5, \\ A^5 + B^5 = z_1 C^5, \quad A^5 + B^5 = z_2 C^5, \\ A^5 + B^5 = z_1^2 C^5, \quad A^5 + B^5 = z_2^2 C^5, \end{array} \right.$$

sont telles, que le second membre est nécessairement divisible par λ_1^5, A et B étant premiers avec λ_1.

§ II.

On démontre que C, dans les équations (5), est nécessairement divisible par λ_1^2 : en effet, ni A, ni B ne sont divisibles par λ_1, et l'on

pourra poser

$$A = p\lambda_1 + q, \quad B = p'\lambda_1 + q'.$$

p et p' étant des quotients complexes, q et q' des nombres entiers, respectivement égaux aux sommes des coefficients de A et B. On aura alors

$$A^5 = \lambda_1^5 p^5 + 5\lambda_1^4 p^4 q + 10\lambda_1^3 p^3 q^2 + 10\lambda_1^2 p^2 q^3 + 5\lambda_1 p q^4 + q^5,$$
$$B^5 = \lambda_1^5 p'^5 + 5\lambda_1^4 p'^4 q' + 10\lambda_1^3 p'^3 q'^2 + 10\lambda_1^2 p'^2 q'^3 + 5\lambda_1 p' q'^4 + q'^5;$$

$(A^5 + B^5)$ devant être divisible par λ_1^5, il faudra que $(q^5 + q'^5)$, nombre entier, soit aussi divisible par λ_1^5 : il ne suffira pas alors que $(q^5 + q'^5)$ soit divisible par $5 = r^3 z_2^2 \lambda_1^4$, il faudra qu'il soit divisible par $25 = r z_2^4 \lambda_1^5$. Cela posé, $(A^5 + B^5)$ pourra s'écrire ainsi :

$$A^5 + B^5 = \lambda_1^5 \left[p^5 + p'^5 + r^3 z_2^2 (pq^4 + p'q'^4) \right] + Q . \lambda_1^6.$$

Q étant un quotient complexe entier. Lorsqu'on substituera cette valeur dans l'une quelconque des équations (5), on pourra remplacer le second membre par $\lambda_1^5 z_h' R^5$, diviser par λ_1^5, et il faudra que la somme

$$\left[p^5 + q^5 + r^3 z_2^2 (pq^4 + p'q'^4) - z_h' R^5 \right]$$

soit divisible par λ_1, ou qu'elle s'annule pour $r = 1$: c'est-à-dire que, si l'on substitue, dans cette expression, aux nombres complexes les sommes de leurs coefficients, et aux entiers leurs résidus relatifs au module 5, le résidu total doit être nul : or soient a, a', ρ les résidus des sommes des coefficients dans p, p', R, 2 étant celui de z_2 et de z_1, on a

$$\rho^5 \equiv \rho, \; a^5 \equiv a, \; a'^5 \equiv a', \; q^4 \equiv 1, \; q'^4 \equiv 1, \; 2^2 \equiv -1 \pmod{5},$$

et le résidu total de l'expression précédente devient $[a + a' - (a + a') - 2'\rho]$ ou simplement $[-2'\rho]$; or ce résidu doit être nul, donc $\rho \equiv 0 \pmod{5}$, c'est-à-dire que R est divisible par λ_1, et R^5 par λ_1^5 ; donc C est divisible par λ_1^2, et C^5 par λ_1^{10}.

§ III.

Ainsi, dans l'une quelconque des équations (5), le premier membre

$(A^5 + B^5)$ est divisible par λ_1^{10}, A et B étant premiers avec λ_1. Ce premier membre étant décomposé en deux facteurs, qui sont, lorsqu'on pose $A + B = t$, d'où $B = t - A$,

$$t \cdot (t^4 - 5t^3 A + 10t^2 A^2 - 10tA^3 + 5A^4),$$

les deux facteurs de ce produit ne peuvent admettre de diviseur commun qu'une puissance de λ_1; alors, le second ne peut être divisible que par λ_1^4, ou 5, et t par λ_1^6, sans quoi A devrait être aussi divisible par λ_1, et t et A, par suite A et B, ne seraient pas premiers entre eux.

Donc, dans la décomposition du second facteur en quatre autres, ainsi qu'il suit :

$$A^5 + B^5 = (A + B)(Ar + Br^4)(Ar^2 + Br^3)(Ar^3 + Br^2)(Ar^4 + Br),$$

$A + B$ sera divisible par λ_1^6, et les autres facteurs seront chacun divisibles par λ_1 seulement. De là suit que, pour satisfaire à l'une des équations (5), si l'on pose

$$A + B = \lambda_1 M, \quad Ar + Br^4 = \lambda_1 M', \quad Ar^2 + Br^3 = \lambda_1 M'',$$
$$Ar^3 + Br^2 = \lambda_1 M''', \quad Ar^4 + Br = \lambda_1 M^{\text{IV}}, \quad C = \lambda_1 R,$$

on aura à vérifier l'équation

$$(6) \qquad M \cdot M' \cdot M'' \cdot M''' \cdot M^{\text{IV}} = z_h^j R^5,$$

M et R^5 étant divisibles par λ_1^5, et aucun des facteurs M', M'', M''', M^{IV} ne l'étant par λ_1. L'indice h est 1 ou 2; alors l'exposant j est 0, 1, ou 2: car, dans le cas où j surpasse 2, on peut remplacer $z_1^j R^5$ ou $z_2^j R^5$ par $z_2^{5-j}[(-1)^j z_1 R]^5$ ou $z_1^{5-j}[(-1)^j z_2 R]^5$, et prendre $(5-j)$ pour j, et $[(-1)^j z_1 R]$ ou $[(-1)^j z_2 R]$ pour R.

Les facteurs $M^{(i)}$, de l'équation (6), doivent vérifier les dix équations (première partie, § VIII).

$$(7) \quad \begin{cases} (1) \quad M'' + M''' = z_2 M, & (6) \quad M^{\text{IV}} + M' = z_1 M, \\ (2) \quad M''' + M^{\text{IV}} = z_2 M', & (7) \quad M + M'' = z_1 M', \\ (3) \quad M^{\text{IV}} + M = z_2 M'', & (8) \quad M' + M''' = z_1 M'', \\ (4) \quad M + M' = z_2 M''', & (9) \quad M'' + M^{\text{IV}} = z_1 M''', \\ (5) \quad M' + M'' = z_2 M^{\text{IV}} & (10) \quad M''' + M = z_1 M^{\text{IV}}. \end{cases}$$

On peut supposer que les facteurs $M^{(i)}$ n'ont plus aucun diviseur complexe commun dont la norme ne serait pas l'unité, puisque les équations (7) démontrent qu'un tel diviseur δ, commun à deux de ces facteurs, le sera à tous, et conséquemment à R; on pourra donc diviser par δ^5 les deux membres de l'équation (6), qui conservera la même forme; et les quotients des $M^{(i)}$ par δ vérifieront toujours les équations (7). Alors, à chaque diviseur complexe et premier f, de R, correspondra un diviseur f^5 du second membre de l'équation (6), lequel devra entrer tout entier dans la composition d'un des facteurs $M^{(i)}$, et non se partager entre eux; de là résulte enfin que les facteurs $M^{(i)}$ seront tous des cinquièmes puissances de nombres complexes, multipliées par des sous-facteurs de l'unité, et qu'on satisfera à l'équation (6), en posant

$$(8)\quad M = \nu\mu^5, \quad M' = \nu'\mu'^5, \quad M'' = \nu''\mu''^5, \quad M''' = \nu'''\mu'''^5, \quad M^{\text{IV}} = \nu^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}5}.$$

Les coefficients $\nu^{(i)}$, ayant pour norme l'unité, seront tous de la forme $r^k z_1^i$, ou $r^k z_2^i$; z_1 ou z_2 excluant z_2 ou z_1, en vertu de la relation

$$z_2 z_1 = -1.$$

L'exposant k de r est moindre que 5, puisque $r^{k+5l} = r^k$; l'exposant i peut aussi être regardé comme moindre que 5, car on peut remplacer $z_h^{i+5l}\mu^{(j)5}$ par $z_h^i[z_h^l\mu^{(j)}]^5$ et prendre $z_h^l\mu^{(j)}$ pour $\mu^{(j)}$.

On peut réduire à l'unité l'un des coefficients $\nu^{(j)}$, qui est égal à $r^k z_1^i$ ou $r^k z_2^i$, dans les valeurs (8), en multipliant, dans l'équation (6), chacun des nombres $M^{(i)}$ et R, par $r^{5-k} z_2^i$ ou $r^{5-k} z_1^i$, ce qui ne troublera pas l'équation (6), et ce qui n'empêchera pas les nouvelles valeurs de $M^{(i)}$ de vérifier les équations (7). Nous supposerons qu'on ait ainsi réduit à l'unité le coefficient ν^{IV} dans M^{IV}, qui n'est pas divisible par λ_4. On aura ainsi les valeurs

$$(8\,bis)\quad M = \nu\mu^5, \quad M' = \nu'\mu'^5, \quad M'' = \nu''\mu''^5, \quad M''' = \nu'''\mu'''^5, \quad M^{\text{IV}} = \mu^{\text{IV}5}.$$

§ IV.

Si l'on substitue ces valeurs (8 *bis*) dans les équations (7), qui n'en comportent réellement que trois distinctes, les deuxième, troisième et

cinquième de ces équations deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} \nu'''\mu'''^5 + \mu^{\text{IV}5} = z_2\nu'\mu'^5, \\ \mu^{\text{IV}5} + \nu\mu^5 = z_2\nu'\mu''^5, \\ \nu'\mu'^5 + \nu''\mu'^5 = z_2\mu^{\text{IV}5}. \end{cases}$$

Si l'on prend tous les nombres complexes compris dans ces trois équations comme premiers conjugués, en leur donnant l'accent, en bas, et qu'on change r en r^4, on obtiendra les quatrièmes conjugués, lesquels serviraient à résoudre l'équation $A_4^5 + B_4^5 = z_h C_4^5$, et l'on aura les six équations

$$\begin{aligned} &\nu'''_1\mu'''^5_1 - \mu_1^{\text{IV}5} = z_2\nu'_1\mu'^5_1, && \nu'''_4\mu'''^5_4 - \mu_4^{\text{IV}5} = z_2\nu'_4\mu'^5_4, \\ &\mu_1^{\text{IV}5} - \nu_1\mu_1^5 = z_2\nu''_1\mu''^5_1, && \mu_4^{\text{IV}5} + \nu_4\mu_4^5 = z_2\nu''_4\mu''^5_4, \\ &\nu'_1\mu'^5_1 - \nu''_1\mu''^5_1 = z_2\mu_1^{\text{IV}5}, && \nu'_4\mu'^5_4 + \nu''_4\mu''^5_4 = z_2\mu_4^{\text{IV}5}, \end{aligned}$$

lesquelles donnent par soustraction

$$(10)\quad \begin{cases} (\nu'''_1\mu'''^5_1 - \nu'''_4\mu'''^5_4) + (\mu_1^{\text{IV}5} - \mu_4^{\text{IV}5}) = z_2(\nu'_1\mu'^5_1 - \nu'_4\mu'^5_4), \\ (\mu_1^{\text{IV}5} - \mu_4^{\text{IV}5}) + (\nu_1\mu_1^5 - \nu_4\mu_4^5) = z_2(\nu''_1\mu''^5_1 - \nu''_4\mu''^5_4), \\ (\nu'_1\mu'^5_1 - \nu'_4\mu'^5_4) + (\nu''_1\mu''^5_1 - \nu''_4\mu''^5_4) = z_2(\mu_1^{\text{IV}5} - \mu_4^{\text{IV}5}). \end{cases}$$

Or la différence $(\mu_1^{\text{IV}5} - \mu_4^{\text{IV}5})$ des cinquièmes puissances de deux conjugués directs d'un même nombre complexe est divisible par λ_1^5 (première partie, § VIII), de plus μ_1^5 et μ_4^5 sont tous les deux divisibles par λ_1^5, puisque M l'est; alors la deuxième (10) exige que $(\nu''_1\mu''^5_1 - \nu''_4\mu''^5_4)$ le soit; la troisième, qu'il en soit de même de $(\nu'_1\mu'^5_1 - \nu'_1\mu'^5_4)$; enfin, la première, que $(\nu'''_1\mu'''^5_1 - \nu'''_4\mu'''^5_4)$ soit aussi divisible par λ_1^5.

On peut écrire ces trois différences de la manière suivante :

$$(11)\quad \begin{cases} (\nu'_1 - \nu'_4)\mu'^5_1 + \nu'_4(\mu'^5_1 - \mu'^5_4), \\ (\nu''_1 - \nu''_4)\mu''^5_1 + \nu''_4(\mu''^5_1 - \mu''^5_4), \\ (\nu'''_1 - \nu'''_4)\mu'''^5_1 + \nu'''_4(\mu'''^5_1 - \mu'''^5_4). \end{cases}$$

Les dernières parties sont divisibles par λ_1^5, d'après ce qu'on vient de dire; μ', μ'', μ''' sont premiers avec λ_1 : donc il faudra que les trois dif-

férences

$$(\nu'_1 - \nu'_4), \quad (\nu''_1 - \nu''_4), \quad (\nu'''_1 - \nu'''_4)$$

soient divisibles par λ_1^5. Chacun des coefficients ν' est de la forme $r^k z$; en y changeant r en r^3, il devient $r^{3k} z_h^i$, et l'une quelconque des trois différences précédentes est de la forme $z_h^i r^k (1 - r^{3k})$. Or, si k n'est pas nul, cette quantité n'est divisible que par λ_1, et non par λ_1^5; donc il faut que $k = 0$.

Ainsi les coefficients ν', ν'', ν''' se réduisent essentiellement à des puissances de z_1 ou de z_2, et ne contiennent pas de facteur r isolé. Restera le coefficient ν de μ^5; mais étant le seul qui puisse contenir r^k, il faudra nécessairement que $k = 0$, ou 5, pour que l'équation (6) soit vérifiée.

§ V.

Ainsi, μ étant divisible par λ_1, $\mu', \mu'', \mu''', \mu^{\text{IV}}$ ne l'étant pas, le coefficient de $\mu^{\text{IV}5}$ étant réduit à l'unité, les coefficients des autres $\mu^{\text{IV}5}$ seront seulement des puissances de z_1 ou de z_2. Les cas de $h = 1$ et de $h = 2$ se traitant de la même manière, il suffit de considérer l'un d'eux; soit donc $h = 1$. On peut réduire les coefficients à ne contenir que des puissances de z_1, en remplaçant $z_2^i \mu^{\text{IV}5}$ par $z_1^{5-i}[(-1)^i z_2 \mu^{\text{IV}}]^i$, et prenant $[(-1)^i z_2 \mu^{\text{IV}}]$ pour μ^{IV}. On aura ainsi, pour vérifier l'équation (6), le tableau définitif

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M} = z_1^i \mu^5, \ \mathrm{M}' = z_1^{i'} \mu'^5, \ \mathrm{M}'' = z_1^{i''} \mu''^5, \ \mathrm{M}''' = z_1^{i'''} \mu'''^5, \ \mathrm{M}^{\text{IV}} = \mu^{\text{IV}}, \\ \qquad i + i' + i'' + i''' = j + 5l, \ \mathrm{R} = \mu\mu'\mu''\mu'''\mu^{\text{IV}} z_1^l. \end{array} \right.$$

Chacun des exposants i, i', i'', i''' est au plus égal à 4, j au plus égal à 2; donc l sera au plus égal à 3, et l'on aura un nombre limité de valeurs de ces exposants, correspondants à $j = 0, 1, 2$, à $l = 0, 1, 2, 3$.

Or, en examinant avec attention tous ces systèmes, les valeurs (12) qui correspondent à chacun d'eux étant substituées dans les équations (7), on trouve toujours qu'au moins une de ces équations se réduit à la forme

$$(13) \qquad m''^5 + m'''^5 = z_h^{j'} . m'^5,$$

h étant 1 ou 2, j' étant 0, ou 1, ou 2.

En effet, tous ces systèmes se groupent en trois cas généraux.

1°. Ou l'un des exposants est nul, soit $i' = 0$; alors la sixième équation (7) donne

$$\mu^{\text{IV}5} + \mu'^5 = z_1^{i+1}\mu^5;$$

2°. Ou deux des quatre exposants sont égaux, soit $i''' = i''$; alors la première équation (7) donne

$$\mu''^5 + \mu'^5 = z_1^{i-i''-1}(-\mu)^5;$$

3°. Ou enfin les quatre exposants sont inégaux et aucun n'est nul, ce qui ne peut avoir lieu que pour $j' = 0$, $l = 2$, ces exposants étant 1, 2, 3, 4, dans un ordre quelconque; alors, soit $i''' = 1$, la dixième équation (7) donne

$$\mu'^5 + (-\mu^{\text{IV}})^5 = z_1^{i-1}(-\mu)^5.$$

Si, dans l'équation (13), j' n'est pas nul, et si m' n'est pas μ, qui est seul divisible par λ_4, cette équation est impossible, et le système correspondant de valeurs des exposants i, i', i'', i''' est inadmissible. Il en est de même encore quand, j' étant nul, μ n'est pas un des trois nombres m', m'', m'''. Ces cas d'impossibilité immédiate sont nombreux, et il ne reste qu'un petit nombre de systèmes admissibles, c'est-à-dire tels que, j' étant nul, μ est l'un des trois nombres m', m'', m'''; ou tels que, j' n'étant pas nul, m' est précisément μ.

Alors, si l'équation (13) est semblable à celle des équations (5) d'où l'on est parti, l'impossibilité de l'équation primitive sera établie de suite, puisqu'une solution supposée de cette équation conduit à une solution en nombres beaucoup plus petits; la grandeur d'un nombre complexe se mesurant par celle de sa norme.

Si l'équation (13) est une des équations (5) autre que la première d'où l'on est parti, on traitera de nouveau cette seconde équation (13), qui conduira à une troisième de la même forme générale; si cette troisième est semblable à la seconde ou à la première, leur impossibilité sera encore établie. Si elle est encore différente, on en déduira une quatrième équation, toujours de la forme (13).

En continuant ainsi, on retombera nécessairement, après cinq transformations au plus, sur une équation semblable à l'une de celles qui la précèdent, dans la série de ces équations dépendantes; d'où résultera leur impossibilité.

Les équations (5) ne sont donc possibles qu'en nombres complexes dont la norme est infinie.

§ VI.

Toutefois, il existe un cas singulier qu'il est nécessaire de traiter à part : car la démonstration qui précède suppose implicitement que les nombres $\mu^{(i)}$ contiennent d'autres facteurs complexes que ceux dont la norme est l'unité; et l'on doit se demander si les valeurs (8) ne pourraient pas vérifier l'équation (6), en supposant que μ', μ'', μ''', μ^{iv} aient pour norme l'unité, et que μ, contenant λ_1 facteur indispensable, fût un nombre complexe ayant la même norme que R.

Or on peut démontrer, plus généralement, qu'il n'est pas possible que deux facteurs, par exemple M'' et M''', n'aient pour norme que l'unité. En effet, soit

$$(14)\qquad M = m\lambda_1^5, \quad M'' = \nu'', \quad M''' = \nu''',$$

m étant un nombre complexe, et ν'', ν''' étant de la forme $r^k z_h^i$, k inférieur à 5, mais i n'ayant plus de limite. La première des équations (7) et sa quatrième conjuguée deviennent

$$(14\ bis)\qquad \begin{cases} \nu''_1 + \nu'''_1 = z_2 m_1 \lambda_1^5, \\ \nu''_4 + \nu'''_4 = -z_2 m_4 \lambda_1^5; \end{cases}$$

car $\lambda_4^5 = -\lambda_1^5$, et, en retranchant la seconde de la première, il viendra

$$(15)\qquad (\nu''_1 - \nu''_4) + (\nu'''_1 - \nu'''_4) = z_2 (m_1 + m_4)\lambda_1^5.$$

Soit en général $n_1 = r^k z_h$, d'où $n_4 = r^{4k} z_h$, et $n_1 - n_4 = r^k (1 - r^{3k}) z_h$; on reconnaît facilement que $r^k(1 - r^{3k})$ est toujours égal à $\pm \lambda_1$, multiplié par $z_2 r^2$, ou par r^2 seulement : car

$$\begin{aligned} &\text{Si } k = 1, \quad \text{on a} \quad r(1 - r^3) = -r^2 z_2 \lambda_1, \\ &\qquad k = 2, \qquad\qquad r^2(1 - r) = r^2 \lambda_1, \\ &\qquad k = 3, \qquad\qquad r^3(1 - r^4) = -r^2 \lambda_1, \\ &\qquad k = 4, \qquad\qquad r^4(1 - r^2) = r^2 z_2 \lambda_1. \end{aligned}$$

Ainsi, si les exposants de r dans ν'' et ν''' ne sont pas nuls, l'équation (15), divisée par λ_1 et multipliée par r^3, sera de la forme

$$(16) \qquad Z + Z' = r^3 z_2 (m_1 + m_4) \lambda_1^4,$$

Z et Z' étant deux puissances de z_1 ou de z_2.

Il ne se peut, d'ailleurs, que les exposants de r dans ν'' et ν''' soient nuls; en effet, si l'un d'eux seulement est nul, l'équation (15) exigera qu'une puissance de z_1 ou de z_2 soit divisible par λ_1^4, ce qui ne peut être; si ces deux exposants sont nuls, le premier membre de l'équation (15) s'évanouit, et l'on a nécessairement $(m_1 + m_4) = 0$, ce qui exige que l'on ait, ou $m_1 = 0$, cas inadmissible, ou $m_1 = \lambda_1^5$, cas facile à traiter, et que nous écartons pour le moment.

Il reste donc à chercher si l'équation (16) est possible, ou si la somme de deux puissances de z_1 ou de z_2 peut être divisible par λ_1^4. On ne peut avoir $Z + Z' = 0$, puisque, comme il vient d'être dit, le second membre de l'équation (16) n'est pas nul.

Dans tous les cas, on peut mettre $(Z+Z')$ sous la forme $\pm z_h^i (1 \pm z_h^j)$, en s'aidant de la formule

$$z_1 z_2 = -1;$$

le premier facteur ne saurait être divisible par λ_1, il faudra donc que le second $(1 \pm z_h^j)$ le soit par λ_1^4; ce qui exige d'abord que la somme des coefficients soit un multiple de 5, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1 \pm 2^j) \equiv 0 \pmod{5},$$

d'où j de la forme $5i + 2$, lors du signe $(+)$, et de la forme $(5i' + 4)$, lors du signe $(-)$. Ainsi le facteur $(1 \pm z_h^j)$ doit être de la forme $(1 + z_h^{5i+2})$, ou de celle-ci $(1 - z_h^{5i'+4})$; ou bien, comme on a

$$z_h^5 = 5 z_h - 3 = 5 (z_h - 1) + 2,$$

il faut que $(1 + 2^i z_h^2)$ ou $(1 - 2^{i'} z_h^4)$ soit divisible par λ_1^4.

L'exposant i ou i' est inférieur à 4, puisque $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$; alors i ou i' ne peut être que zéro, afin que la somme des coefficients dans $(1 + 2^i z_h^2)$ ou $(1 - 2^{i'} z_h^4)$ soit toujours un multiple de 5. Donc enfin, $(1 + z_h^2)$ ou $(1 - z_h^4)$ doit être divisible par λ_1^4. Comme

$$(1 - z_h^4) = (1 - z_h^2)(1 + z_h^2) = z_h (1 + z_h^2),$$

les deux cas se confondent. Il faut et il suffit que $(1 + z_h^2)$, ou son égal $(2 - z_h)$, soit divisible par λ_1^4. Mais, si $h = 1$,

$$2 - z_1 = (1 - r)(1 - r^4) = -r^4 \lambda_1^5;$$

et si $h = 2$,

$$2 - z_2 = (1 - r^2)(1 - r^3) = -r^4 z_2^2 \lambda_1^5,$$

donc $(1 + z_h^2)$ est seulement divisible par λ_1^2.

L'équation (16) est donc impossible; à moins que l'on ait $m_1 = r_1^4$, d'où $m_4 = \lambda_4^5 = -\lambda_1^5$, et $(m_1 + m_4) = 0$. Or, pour cette valeur particulière de m_1, les équations (14 *bis*) deviennent

$$\nu_1'' - \nu_1''' = z_2 \lambda_1^{10},$$
$$\nu_4'' + \nu_4''' = z_2 \lambda_1^{10},$$

et, en les ajoutant, on a

$$(17) \qquad (\nu_1'' + \nu_4'') - (\nu_1''' + \nu_4''') = 2 z_2 \lambda_1^{10}.$$

Soit en général $n_1 = r^k z_h^1$, d'où $n_1 + n_4 = r^k (1 + r^{3k}) z_h$; on reconnaît facilement que $r^k (1 + r^{3k})$ est égal à z_1, pour $k = 1, 4$, à z_2 pour $k = 2, 3$, à 2 pour $k = 0$; d'où résulte que le premier membre de l'équation (17) sera la somme de deux puissances de z_1 ou de z_2: si ce ne sont pas deux cinquièmes puissances, il vient d'être démontré qu'une pareille somme ne peut être divisible que par λ_1^2; si le premier membre de l'équation (17) est $(z_2^{5j} - z_1^{5j})$, j étant premier avec 5, ce premier membre est divisible par λ_1^6, et non par λ_1^{10}; si $j = 5$, $(z_2^{25} - z_1^{25})$ est divisible par λ_1^{10}, mais le quotient, outre des facteurs complexes dont la norme est 1, contient le facteur 3001, nombre premier, qui ne peut diviser le second membre. L'équation (17) est donc impossible.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉSOLUTION, EN NOMBRES COMPLEXES, DE L'ÉQUATION

$$A^n + B^n + C^n = 0;$$

PAR M. G. LAMÉ.

Dans un travail précédent, j'ai démontré l'impossibilité de cette équation pour l'exposant $n = 5$. Peut-on établir la même impossibilité pour tout exposant n, premier et impair? Avant de répondre à cette question, il est nécessaire de passer en revue les différentes propositions qui composent la démonstration relative à l'exposant 5, et d'examiner si ces propositions sont généralisables, c'est-à-dire si elles ont leurs analogues pour les exposants supérieurs à 5.

1. Pour chaque exposant n premier et impair, tel que $n = 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$, les nombres complexes que l'on considère sont de la forme

$$(1) \qquad A = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-1} = A(r);$$

les coefficients α_i étant des nombres entiers, et r une des racines imaginaires de l'équation

$$r^n = 1,$$

ou de celle-ci :

$$(2) \qquad \varphi(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = 0.$$

On sait que les autres racines imaginaires de la même équation sont r^2, $r^3, \ldots, r^{n-1}$, et qu'en posant

$$(3) \qquad z_k = r^k \quad r^{n-k} = r^k \quad \frac{1}{r^k},$$

les $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ nombres $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ sont les racines, toutes réelles, d'une équation

$$(4) \qquad \psi(z) = z^{\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-3}{2}} + \ldots \pm 1 = 0,$$

dont les coefficients sont entiers, et d'où l'on conclut les relations

$$(5) \qquad 1 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{\frac{n-1}{2}} = 0, \ldots, \quad z_1 z_2 z_3 \ldots z_{\frac{n-1}{2}} = \pm 1,$$

le signe $(-)$ ayant lieu si n est de la forme $4j+1$, et le signe $(+)$ si n est de la forme $4j+3$.

Lorsque tous les coefficients α_i du nombre A sont tels que $\alpha_{n-i} = \alpha_i$, A est réel, et se réduit à la forme

$$(6) \qquad \mathcal{A} = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_{\frac{n-1}{2}} z_{\frac{n-1}{2}};$$

sinon, A est imaginaire.

On peut ajouter $\pm m(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$ à l'expression (1) de A, et $\pm m\left(1 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{\frac{n-1}{2}}\right)$ à celle (6) de $\mathcal{A}$, sans changer les valeurs de ces nombres complexes. Le nombre $A r^i$, désigné par $A^{(i)}$, est un *associé* de A. Le nombre $A(r^i)$, désigné par A_i, est un *conjugué* de A. Les associés de A sont au nombre de n; leurs $n^{\text{èmes}}$ puissances sont toutes égales à A^n. Les conjugués de A sont au nombre de $(n-1)$; leurs $n^{\text{èmes}}$ puissances sont différentes.

2. Les $(n-1)$ conjugués du nombre $\mathcal{A}$ (6) sont égaux deux à deux, car z_k (3) restant le même quand on change r en $\frac{1}{r}$, on aura

$$\mathcal{A}_{n-i} = \mathcal{A}_i.$$

On peut n'admettre que $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ conjugués pour $\mathcal{A}$; le produit de ces $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ conjugués est un nombre entier, positif ou négatif.

Les $(n-1)$ conjugués du nombre complexe imaginaire A (1) se partagent en $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ groupes binaires; chacun de ces groupes $[A_i, A_{n-i}]$,

jouissant de cette propriété que les deux nombres qui le composent donnent un produit réel $[A_i, A_{n-i}]$, ou de la forme (6); ces deux nombres sont des conjugués directs.

Le produit des $(n-1)$ conjugués de A est un nombre entier, désigné par $\mathfrak{N}(A)$, et qui est la *norme* de A. Cette norme est essentiellement positive. Les associés et les conjugués de A ont tous la même norme. Cette norme n'est pas affectée par les transformations qu'on peut faire subir à l'expression (1) du nombre complexe A.

Les nombres r, z_k, $1+r$, leurs conjugués, leurs associés, leurs puissances et leurs produits divers, ont tous l'unité pour norme commune. Tout nombre complexe peut être appelé un *sous-facteur* de sa norme. La forme la plus générale de tous les sous-facteurs de l'unité est $[r^h z_k^l z_{k'}^{l'} z_{k''}^{l''} \ldots]$; c'est le produit d'un nombre imaginaire r^h, par un nombre complexe réel $[z_k^l z_{k'}^{l'} z_{k''}^{l''} \ldots]$.

5. Lorsqu'on forme le produit C de deux nombres complexes A et B de la forme (1), on obtient d'abord un polynôme en r de degré $(2n-2)$; on le réduit au degré $(n-1)$, en réunissant le coefficient de r^{n+i} à celui de r^i, puisque ces deux puissances sont égales d'après la définition de r; enfin, dans le but de simplifier le produit obtenu et réduit, on en retranche $(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}) = \varphi(r)$ multiplié par un entier m, convenablement choisi.

Inversement, veut-on savoir si un nombre complexe C est divisible par A, ou s'il est le résultat transformé du produit de A par un autre nombre complexe B? On ajoute à C l'expression $m\varphi(r)$, m étant un entier indéterminé; on ramène C à la forme d'un polynôme du degré $(2n-2)$, en remplaçant chacun de ses termes $(\gamma_i + m) r^i$ par les deux termes $[(\gamma_i + m - a_i) r^i - a_i r^{n+i}]$, a_i étant un entier indéterminé; puis, regardant comme des inconnues les n coefficients de B, et les n indéterminées m et a_i, on cherche s'il est possible d'identifier, par des valeurs entières de toutes ces inconnues, le nombre C, préparé comme il vient d'être dit, avec le produit effectué et non réduit de A par B. Si cette épreuve réussit, C est *divisible* par A; c'est-à-dire que C est le résultat transformé du produit de A par un autre nombre complexe B, pour les coefficients duquel l'identification a fourni des valeurs entières. Dans le cas contraire, C n'est pas divisible par A.

Tout nombre complexe A, dont la norme est N, ne peut être divisé par un sous-facteur d'un nombre premier N′, autre que l'unité, et qui ne divise pas N. Soit $\mathfrak{N}(A) = N$, N un nombre premier : si A est décomposable en deux facteurs complexes B et C, l'un de ces facteurs aura pour norme N, l'autre aura pour norme l'unité.

4. Lorsque A et B sont deux nombres complexes ayant pour norme un même nombre premier N, chacun d'eux est divisible par l'un des conjugués de l'autre.

Si le nombre C n'est divisible par aucun des conjugués de B, sous-facteur du nombre premier N, il ne pourra l'être par aucun des conjugués de A, autre sous-facteur du même nombre premier N. Si l'on essaye successivement de diviser C par B_1, par B_2, par B_3,..., par B_{n-1}, et que l'on ne réussisse, dans aucune de ces $(n-1)$ épreuves, à obtenir pour quotient un nombre complexe entier, on pourra affirmer que $\mathfrak{N}(C)$ ne contient pas le facteur premier $N = \mathfrak{N}(B)$.

5. Soient toujours $\mathfrak{N}(B) = \mathfrak{N}(A) = N$, et N un nombre premier autre que l'unité, si N n'est pas l'exposant n, qui a pour sous-facteur $(1-r)$, A est divisible par un seul des conjugués de B. Les $(n-1)$ sous-facteurs imaginaires conjugués d'un nombre premier autre que n sont *premiers entre eux;* c'est-à-dire qu'ils ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que des sous-facteurs de l'unité.

L'exception relative à l'exposant n est caractéristique : n est le seul des nombres premiers, pouvant servir de normes, dont les $(n-1)$ sous-facteurs conjugués ne sont pas premiers entre eux; un quelconque de ses sous-facteurs reproduit tous les autres, lorsqu'on le multiplie par des coefficients dont la norme est 1. L'exposant n n'a réellement qu'un seul sous-facteur; on peut adopter $\lambda_1 = (1-r)$: n est divisible par λ_1^{n-1}, et non par une puissance supérieure de λ_1.

6. Lorsque A a pour norme le produit de deux nombres premiers différents M et N, dont on connaît deux sous-facteurs respectifs a et b, A est divisible par un des conjugués de a, ensuite par un des conjugués de b, et le quotient définitif a pour norme l'unité.

Lorsque $\mathfrak{N}(A)$ contient comme facteur un nombre premier N, élevé à la puissance i, a étant un sous-facteur de N, A est successivement

divisible t fois par un des conjugués de a; le conjugué diviseur pouvant varier d'une division à l'autre.

La décomposition d'un nombre complexe en ses facteurs premiers, et la détermination du plus grand commun diviseur entre deux nombres complexes, résultent de ces diverses propositions.

7. La somme de deux $n^{ièmes}$ puissances $(A^n + B^n)$ est décomposable en n facteurs, et l'on a généralement

$$(7)\quad A^n + B^n = (A + B)(A + Br)(A + Br^2)(A + Br^3)\ldots(A + Br^{n-1}),$$

quels que soient les nombres A et B, entiers ou complexes.

Lorsque A et B sont des nombres entiers, le premier membre de l'équation (7), et le premier facteur du second membre, sont aussi des nombres entiers; les quatre derniers facteurs sont complexes et conjugués; leur norme est $\left(\frac{A^n + B^n}{A + B}\right)$. On peut poser généralement

$$(8)\quad \frac{A \pm B^n}{A \pm B} = \mathfrak{N}(A \pm Br), \quad \text{ou} \quad A \pm Br = sf\left(\frac{A^n \pm B^n}{A \pm B}\right).$$

Quand on prend $A = B = 1$, on trouve

$$1 + r = sf(1), \quad 1 - r = sf(n).$$

Si le nombre complexe $A(1)$ est divisible par $\lambda_1 = (1 - r)$, la somme de ses coefficients est un multiple de n : en effet, a désignant cette somme des coefficients, on aura

$$A = B\lambda_1 + a,$$

B étant un quotient complexe à coefficients entiers; si A est divisible par λ_1, il faut que a le soit aussi; mais a, nombre entier, ne peut être divisible par λ_1, que s'il l'est par n, ou par λ_1^{n-1}. Donc a, somme des coefficients de A, est un multiple de n, lorsque A est divisible par λ_1. Alors $\mathfrak{N}(A)$ est divisible par n.

Soient $\mathfrak{N}(A) = N$, et N un nombre premier autre que n, la somme a des coefficients de A ne sera pas divisible par n; les $(n - 1)$ conjugués de A ont la même somme de coefficients; $\mathfrak{N}(A)$, nombre entier, qui est le produit de ces $(n - 1)$ conjugués, sera donc de la forme $(a^{n-1} + nQ)$;

et, employant la notation de M. Gauss, on aura

$$N = \mathfrak{N}(A) = a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

c'est-à-dire que N sera de la forme $(ni+1)$.

La norme de tout nombre complexe A (1) divise une infinité de nombres entiers de la forme $\left(\frac{X^n \pm Y^n}{X \pm Y}\right)$. Si, dans les formules (8), on donne à A et B des valeurs entières, on obtiendra, comme exemples, les sous-facteurs de plusieurs nombres, premiers ou composés. On pourra en déduire, soit immédiatement, soit par des essais de division, les sous-facteurs des nombres premiers de la forme $(ni+1)$.

8. Quand A et B sont des nombres complexes, il est préférable, pour ce qui suit, de donner à l'équation (7) la forme suivante :

$$(9)\quad A^n + B^n = (A+B)(Ar + Br^{n-1})(Ar^2 + Br^{n-2}) \ldots (Ar^{n-1} + Br).$$

Si l'on désigne par M, M', M'', ..., $M^{(n-1)}$ les n facteurs du second membre, on reconnaît facilement que ces facteurs vérifient les $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$ équations comprises dans la forme générale

$$(10)\quad M^{(l)} \times M^{(l')} = z^{\left(\frac{l'-l}{2}\right)} \cdot M^{\left(\frac{l'+l}{2}\right)},$$

en ayant soin d'augmenter de n l'un des indices l et l', quand ils sont de parités contraires, ce qui ne change pas le nombre dont l'indice est augmenté.

Il résulte des relations (10), qu'un nombre complexe, dont la norme n'est pas l'unité, ne peut diviser deux des n facteurs $M^{(l)}$ sans diviser tous les autres. L'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$(11)\quad A^n + B^n = K^n . m . m' . m'' \ldots m^{(n-1)}.$$

K étant le produit des diviseurs communs aux $M^{(l)}$, et $m^{(l)}$ le quotient de $M^{(l)}$ par K. Les nombres $m^{(l)}$, actuellement premiers entre eux, c'est-à-dire n'ayant d'autres diviseurs communs que ceux dont la norme est l'unité, vérifieront les relations (10). Si A et B sont premiers entre eux, K ne peut être que λ_1, à la première puissance seulement.

La somme des $n^{\text{èmes}}$ puissances de deux conjugués directs d'un nombre complexe imaginaire A est le produit de n nombres complexes réels. La différence de ces mêmes puissances est égale à la $n^{\text{ème}}$ puissance d'un des sous-facteurs de n, multipliée par n nombres complexes réels; ainsi, cette différence est divisible par λ_1^n.

9. Soit proposé de résoudre, en nombres complexes, l'équation

$$A^n + B^n + C^n = 0. \tag{12}$$

On peut supposer que A, B, C sont premiers entre eux, ou qu'ils ne sont pas divisibles tous les trois, et, par suite, deux d'entre eux, par un même sous-facteur d'un nombre premier autre que l'unité.

On a généralement

$$(A + B + C)^n = A^n + B^n + C^n + n(A + B)(C + A)(B + C)P. \tag{13}$$

P étant une fonction entière et symétrique de A, B, C, dont la forme dépend de l'exposant n. Si A, B, C sont les nombres complexes qui vérifient l'équation proposée, cette équation (13) se réduit à

$$(A + B + C)^n = n(A + B)(C + A)(B + C)P: \tag{14}$$

n est divisible par λ_1^{n-1}; le premier membre, qui est une $n^{\text{ème}}$ puissance, est donc divisible par λ_1, et $(A + B + C)$ par λ_1. Comme le premier, le second membre doit admettre le diviseur λ_1^n, et, puisque n n'admet que λ_1^{n-1}, il faut que l'un des quatre derniers facteurs soit divisible par λ_1; si c'est l'un des trois facteurs $(A + B)$, $(C + A)$ ou $(B + C)$, puisque $(A + B + C)$ est divisible par λ_1, il s'ensuivra que C, B ou A le sera aussi; si c'est le dernier facteur P qui admet le diviseur λ_1, on déduit encore, pour beaucoup de valeurs de n, que l'un des trois nombres A, B, C est nécessairement divisible par leur sous-facteur.

Autrement: soient a, b, c les sommes des coefficients, dans les nombres complexes A, B, C; n étant divisible par λ_1^{n-1}, et non par une puissance supérieure, l'équation (12) se met sous la forme

$$P\lambda_1^n + (a^n + b^n + c^n) = 0,$$

et le second membre étant zéro, le premier doit être divisible par λ_1^n;

ce qui exige que la somme $(a^n + b^n + c^n)$ soit un multiple de n^2. Or on démontre, pour une classe très-nombreuse d'exposants n (tels que $n = 5, 11, 17, 23, \ldots$), que cette somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de trois nombres entiers ne peut être un multiple de n^2, sans que l'un des trois nombres a, b, c soit divisible par n (LEGENDRE, *Mémoires de l'Académie*, 1823); pour tous ces exposants, l'un des trois nombres complexes A, B, C sera divisible par λ_1. Nous supposerons que notre exposant n appartient à cette classe, et que C soit divisible par λ_1.

10. Soit proposé de résoudre, en nombres complexes, l'équation

$$A^n + B^n = \rho C^n,$$

ρ étant un coefficient complexe réel, dont la norme est l'unité, et qui a pour forme générale $[z_h^l z_{h'}^{l'} z_{h''}^{l''} \ldots]$. Le nombre des z_k (3), qui entrent dans le produit ρ, est au plus $\frac{1}{2}(n-3)$, car l'une des $\frac{1}{2}(n-1)$ valeurs de z_k est exclue par la relation

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_{\frac{n-1}{2}} = \mp 1.$$

Les exposants l, l', l'',... sont tous inférieurs à n, car $z_h^{l+nq} C^n$ est égal à $z_h^l (z_h^q C)^n$, et l'on peut prendre $(z_h^q C)$ pour C.

Soit i la somme des exposants $[l + l' + l'' + \ldots]$; 2^i sera la somme des coefficients du nombre complexe ρ; le nombre $(\rho - 2^i)$ est divisible par λ_1, puisque la somme de ses coefficients est nulle; on a donc

$$\rho = 2^i + \lambda_1 \rho'_1,$$

ρ'_1 étant un nombre complexe; on aura aussi, en changeant r en $\frac{1}{r}$, ou en r^{n-1},

$$\rho = 2^i + \lambda_{n-1} \rho'_{n-1},$$

car ρ reste le même; égalant ces deux valeurs de ρ, il vient

$$\lambda_1 \rho'_1 = \lambda_{n-1} \rho'_{n-1};$$

mais on a

$$\lambda_1 = 1 - r, \quad \lambda_{n-1} = 1 - r^{n-1} = -r^{n-1} \lambda_1;$$

substituant et divisant par λ_1, il vient

$$\rho'_1 + r^{n-1} \rho'_{n-1} = 0.$$

Le second membre étant zéro, le premier est divisible par λ_1; d'où il suit que la somme des coefficients ρ'_1 est un multiple de n, ou que ρ'_1 est divisible par λ_1; conséquemment $(\rho - 2^t)$ est divisible par λ_1^2. Posons

$$\rho = 2^t + \lambda_1^2 \rho''_1,$$

d'où

$$\rho = 2^t + \lambda_{n-1}^2 \rho''_{n-1}, \quad \text{et} \quad \rho''_1 = r^{n-2} \rho''_{n-1};$$

on ne pourra rien conclure relativement à la divisibilité de ρ''_1 par λ_1; mais il est facile de voir que, si $(\rho - 2^t)$ est divisible par une puissance impaire de λ_1, il le sera nécessairement par la puissance paire qui la suit.

Ainsi $(\rho - 2^t)$ est divisible par une puissance paire de λ_1. Mais, afin de n'être pas arrêté dans la résolution des équations proposées, il faut admettre que cette puissance paire est toujours inférieure à λ_1^{n-1}, pour toutes les valeurs de ρ, qui ne sont pas des $n^{\text{ièmes}}$ puissances. Par une méthode de vérification qu'il serait trop long de développer ici, on reconnaît que ce théorème existe dans le cas des exposants $n = 5, 7, 11, 13, 19, 23, \ldots$; mais qu'il n'a pas lieu pour $n = 17, 31, \ldots$.

11. Il est une autre manière d'énoncer le théorème dont il s'agit. Si la différence $(\rho - 2^t)$ est divisible par λ_1^{2k}, il est facile de voir que $(\rho^n - 2^{tn})$ est divisible par λ_1^{2k+n-1}. Cela posé, on a identiquement

$$\rho - 2^t = (\rho^n - 2^{tn}) + 2^t(2^{t(n-1)} - 1) + \rho(1 - \rho^{n-1});$$

si le premier membre, ou $(\rho - 2^t)$, est divisible par λ_1^{n-1}, ou par n, il en sera de même du second; mais $(\rho^n - 2^{tn})$ est alors divisible par $\lambda_1^{2(n-1)}$ ou par n^2, $(2^{t(n-1)} - 1)$ l'est par n; il faut donc que $\rho(1 - \rho^{n-1})$, et, par suite, $(1 - \rho^{n-1})$ soit divisible par λ_1^{n-1} ou par n.

Si donc on établit, pour un exposant donné, que $(1 - \rho^{n-1})$ ne peut être divisible par n, il sera démontré que $(\rho - 2^t)$ ne peut l'être par λ_1^{n-1}. Ce qui revient à prouver que la congruence

$$1 - x^{n-1} \equiv 0 \pmod{n},$$

laquelle est satisfaite en prenant pour x un nombre entier quelconque premier avec n, ne peut être vérifiée lorsqu'on prend pour x un sous-facteur réel de l'unité qui ne soit pas une $n^{\text{ième}}$ puissance.

12. Admettons que la différence $(\rho - 2^t)$ ne puisse être divisible que par une puissance paire de λ_1 inférieure à λ_1^{n-1}, quel que soit d'ailleurs le nombre complexe ρ ayant pour norme l'unité, et qui n'est pas une $n^{ième}$ puissance. Alors, l'équation (15) ne peut exister, si C n'est pas divisible par λ_1 : en effet, on a généralement

$$(A + B - 2^t C)^n = A^n + B^n - 2^{nt} C^n + n(A + B)(A - 2^t C)(B - 2^t C)$$

et, dans le cas de l'équation (15),

$$(16)\quad \begin{cases} (A + B - 2^t C)^n = (\rho - 2^t) C^n + 2^t (1 - 2^{t(n-1)}) C^n \\ + n(A + B)(A - 2^t C)(B - 2^t C) P. \end{cases}$$

Par les facteurs $(\rho - 2^t)$, $(1 - 2^{t(n-1)})$, n, les trois parties du second membre sont divisibles par λ_1 ; le premier membre, qui est une $n^{ième}$ puissance, est donc divisible par λ_1^n, et $(A + B - 2^t C)$ par λ_1 ; alors le second membre doit admettre le diviseur λ_1^n, et puisque n ou λ_1^{n-1} divise les deux dernières parties, il faudra que la première, ou $(\rho - 2^t) C^n$, soit au moins divisible par λ_1^{n-1} ; mais, d'après le théorème admis, $(\rho - 2^t)$ ne peut être divisé par une puissance aussi élevée de λ_1 : donc C, et, par suite, $A + B$, doit être divisible par λ_1.

13. Ainsi, dans les équations proposées,

$$(17)\quad \begin{cases} A^n + B^n = (-C)^n, \\ A^n + B^n = \rho C^n, \end{cases}$$

C est divisible par λ_1, A et B ne l'étant pas. Alors C, divisible par λ_1, l'est nécessairement par λ_1^2 ; ce que l'on démontre de la même manière que pour l'exposant 5. D'après cela, si l'on décompose le premier membre en ses n facteurs complexes, comme l'indique l'équation (9), on établit, tout comme pour $n = 5$, que le premier facteur $(A + B)$ doit être divisible par λ_1^{n+1}, et chacun des $(n - 1)$ autres facteurs par λ_1 seulement. D'où suit, qu'en divisant ces facteurs, et C, par λ_1, désignant les quotients par $M, M', M'', \ldots, M^{n-1}$, et R, on aura à résoudre ou à vérifier une équation de la forme

$$(18)\qquad M.M'.M''.M'''\ldots M^{n-1} = \rho R^n;$$

R^n et M sont divisibles par λ_1^n ; les facteurs $M^{(i)}$, premiers entre eux,

vérifient les relations (10); ρ est ou 1, ou le coefficient complexe défini au n° **10**. Chaque facteur $M^{(i)}$ doit être de la forme $\nu^{(i)}\mu^{(i)n}$, ou égal à la $n^{ième}$ puissance d'un nombre complexe, multipliée par un coefficient dont la norme est l'unité. Tout coefficient $\nu^{(i)}$ est de la forme générale $[r^k z_h^l z_k^l \ldots]$, produit du nombre imaginaire r^k par le nombre complexe réel $[z_h^l z_k^l \ldots]$.

On peut réduire à l'unité l'un des coefficients $\nu^{(i)}$, en multipliant, dans l'équation (18), tous les facteurs $M^{(i)}$, et R, par $[r^{n-k} z_h^{n-l} z_k^{n-l} \ldots]$, ce qui ne troublera pas cette équation (18), et ce qui n'empêchera pas les nouvelles valeurs des $M^{(i)}$ de vérifier les équations (10). Nous supposerons qu'on ait ainsi réduit à l'unité le coefficient de $\mu^{(n-1)n}$, dans $M^{(n-1)}$ qui n'est pas divisible par λ_1.

14. Parmi les équations (10), qui ne comportent réellement que $(n-2)$ relations distinctes, on prendra les $(n-1)$ équations qui contiennent M dans leur premier membre; et retranchant, de chacune d'elles, sa conjuguée de l'ordre $(n-1)$; observant que la différence des $n^{èmes}$ puissances de deux conjugués directs $[\mu_1^{(n-1)n} - \mu_n^{(n-1)n}]$ est divisible par λ_1^n, et que μ_1^n, μ_{n-1}^n admettent le même diviseur, on établira, comme dans le cas de l'exposant 5, que la différence

$$\nu_1^{(i)}\mu_1^{(i)n} - \nu_{n-1}^{(i)}\mu_{n-1}^{(i)n} = (\nu_1^{(i)} - \nu_{n-1}^{(i)})\mu_1^{(i)n} + \nu_{n-1}^{(i)}(\mu_1^{(i)n} - \mu_{n-1}^{(i)n})$$

doit être divisible par λ_1^n, pour toutes les valeurs de l'indice $i = 1, 2, 3, \ldots, (n-2)$; et qu'il en est de même, conséquemment, de la différence $(\nu_1^{(i)} - \nu_{n-1}^{(i)})$. Or, $\nu_1^{(i)}$ étant de la forme $[r^k z_h^l z_k^l \ldots]$, on a

$$\nu_1^{(i)} - \nu_{n-1}^{(i)} = r^k(1 - r^{3k}).z_h^l z_k^l \ldots,$$

et cette différence ne peut être divisible par λ_1^n, que si $k = 0$. Donc tous les coefficients $\nu', \nu'', \ldots, \nu^{(n-2)}$, et, par suite, ν, sont réels; c'est-à-dire qu'ils ne peuvent admettre de multiplicateur r^k.

15. Parmi les relations (10) se trouve celle-ci :

$$M^{(n-1)} + M' = z_1 M, \tag{19}$$

qui va nous suffire pour achever la démonstration. D'après ce qui

précède, on a

$$(20)\qquad M = \nu\mu^n,\quad M' = \nu'\mu'^n,\quad M^{n-1} = \mu^{n-1\,n};$$

μ est divisible par λ_1, et non μ', ni μ^{n-1}; le coefficient de $\mu^{n-1\,n}$ a été réduit à l'unité; les coefficients ν, ν' sont réels et de la forme attribuée à ρ, n° **10**. Les valeurs (20), substituées dans l'équation (19), donnent

$$(21)\qquad \mu^{n-1\,n} + \nu'\mu'^n = z_1\nu\mu^n.$$

Or, le théorème des n^os **10** et **11** étant admis, l'équation (21) ne peut subsister, si ν' n'est pas l'unité: en effet, soit 2^i la somme des coefficients du nombre complexe ν', on a généralement

$$(22)\qquad (\mu^{(n-1)} + 2^i\mu' + k\mu)^n = \mu^{n-1\,n} + 2^{ni}\mu'^n + k^n\mu^n + nQ.$$

k et Q étant des nombres complexes; substituant à $\mu^{n-1\,n}$ sa valeur tirée de l'équation (21), on a

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}(\mu^{(n-1)} + 2^i\mu' + k\mu)^n = {} & [2^i(2^{(n-1)i} - 1) - (\nu' - 2^i)]\mu'^n \\ & + [k^n + z_1\nu]\mu^n + nQ.\end{aligned}\right.$$

Par les facteurs $(2^{(n-1)i} - 1)$, $(\nu' - 2^i)$, μ^n, n, toutes les parties du second membre sont divisibles par λ_1; le premier membre est donc divisible par λ_1^n, et le second doit admettre le même diviseur; mais μ^n est divisible par λ_1^n, $(2^{(n-1)i} - 1)$ et n le sont par λ_1^{n-1}, il faut donc que le terme $(\nu' - 2^i)\mu'^n$ soit aussi divisible par λ_1^{n-1}; et puisque, d'après le théorème admis, $(\nu' - 2^i)$ ne peut avoir pour diviseur une puissance aussi élevée de λ_1, il faudrait que μ' fût divisible par λ_1, ce qui n'est pas. Donc ν' est nécessairement égal à 1; alors l'équation (22), ou

$$(24)\qquad \mu^{n-1\,n} + \mu'^n = z_1\nu.\mu^n = \rho'.\mu^n$$

a la même forme générale que la seconde équation (17) d'où nous sommes partis, mais est exprimée en nombres complexes dont les normes sont beaucoup plus petites.

Si ρ' est le même que ρ, cette nouvelle solution en nombres plus petits démontre l'impossibilité de l'équation proposée. Si ρ' diffère de ρ, on peut traiter l'équation (24) comme celle d'où l'on est parti, pour en déduire une troisième de la même forme générale. Après un

nombre limité de déductions semblables, on retombera nécessairement sur une équation (24), pour laquelle ρ' sera égal au coefficient ρ d'une des équations antécédentes, et il s'ensuivra encore que toutes sont impossibles, en nombres complexes ayant des normes finies.

On peut démontrer d'ailleurs, en s'appuyant sur le théorème admis, qu'il n'est pas possible que deux des facteurs M^{α} n'aient pour normes que l'unité; ce qui met hors de doute le décroissement rapide des nombres, dans la série des équations déduites.

Conclusion.

Les équations proposées (17) sont impossibles en nombres complexes ayant des normes finies, si l'exposant n appartient à la classe définie au n° **9**, et si le théorème énoncé au n° **14** a lieu pour cet exposant. Exemples : $n = 5, 11, 23$.

Si la dernière condition est seule satisfaite, la seconde des équations (17) est impossible, ρ n'étant pas l'unité. Exemples : $n = 7, 13, 19$.

SUR LES NOMBRES COMPLEXES

QUI SONT FORMÉS AVEC LES NOMBRES ENTIERS RÉELS

ET LES RACINES DE L'UNITÉ;

PAR M. KUMMER[*].

Numeri complexi, quos summus Gaussius primus in doctrinam numerorum introduxit, et quorum auxilio residuorum biquadraticorum theoriam absolvit, formam habent $a + b\sqrt{-1}$. Præter hos autem numeros complexos alii etiam innumeri fingi possunt, qui ad alia doctrinæ numerorum capita eodem modo pertineant, quo hoc genus simplicissimum numerorum complexorum præcipue ad residua quadratica et biquadratica referendum est. Inter hos præcipue notatu digni videntur numeri complexi altioribus unitatis radicibus, per numeros integros reales multiplicatis, compositi, qui doctrinæ de sectione circuli et de residuis potestatum altiorum inservinnt, et cum iis disciplinis tam arcte conjuncti sunt, ut ab ipsis quasi generentur. Quæ de iis numeris hactenus in publicum edita sunt summo geometræ Cl. Jacobi debentur, qui primus demonstravit quemlibet numerum primum formæ $m\lambda + 1$ in duos factores complexos ejus generis discerpi posse. Quod idem numerus primus p pluribus modis diversis in factores duos diffinditur, et quod producta certa ex iis factoribus formata per alios factores divisibiles fiunt, neque tamen hi ipsi factores cum illis compensari possunt, res maximi momenti, indicat hos factores non esse primos sed compositos. Ulteriorem factorum dissolutionem in factores primos Cl. Jacobi pro iis numeris perfecit, qui radices unitatis quintas, octavas et duodecimas continent, ejusque rei notitiam cum regia Academia litterarum Berolinensi communicavit. In hoc quæstionum genere etiam ea versantur, quæ vobis almæ Universitatis Albertinæ viris doctis illustrissimis tanquam magnæ meæ erga vos observantiæ et reverentiæ documentum, hac occasione solemni data, tradere audeo.

[*] C'est le Mémoire que nous avons annoncé à la page 136 : il a été imprimé pour la première fois, comme nous l'avons dit, en 1844, à Breslau, sous ce titre : *De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant*, et adressé par l'Université de Breslau à l'Université de Kœnigsberg, à l'occasion du troisième jubilé séculaire de cette dernière Université. Nous donnons ici le texte latin. Nous n'avons pas eu le temps d'en faire la traduction. (J. LIOUVILLE.

§ I.

Si α est radix quædam primitiva æquationis $\alpha^\lambda = 1$, quemlibet functionem rationalem integram radicis α, cujus omnes coefficientes numeri integri sint, numerum integrum complexum voco. Talis functio, æquationis $\alpha^\lambda = 1$ ope, statim ad gradum $\lambda - 1$ reducitur, itaque numerorum complexorum quos tractaturi sumus forma generalis est hæc

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1};$$

numerum λ hic ubique numerum primum accipimus, qui est casus maximi momenti, et quasi fons a quo tota hæc doctrina derivatur. Inde rejecta radice $\alpha = 1$, quæ hac conditione est sola radix non primitiva, habemus æquationem

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

cujus ope ex repræsentatione numeri complexi $f(\alpha)$ unus terminus removeri potest, ex. gr. ultimus, quo facto numerus complexus respectu radicis α ad gradum $\lambda - 2$ deprimitur. Hanc autem reductionem, quæ summarum symetriam turbaret, in universum non adoptabimus, sed retentis omnibus terminis et coefficientibus a, a_1, a_2, etc., æquatione

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0$$

ita utemur, ut summa omnium coefficientium $a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1}$ quodam modo in potestate nostra sit. Nam, *si coefficientes numeri complexi $f(\alpha)$ omnes eodem numero augentur vel minuuntur, hic ipse numerus $f(\alpha)$ non mutatur,* quia nihil accedit nisi multiplum formæ $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1}$, quæ nihilo æqualis est. Vice versa, *duo numeri complexi æquales esse nequeunt nisi, coefficientibus omnibus eodem numero auctis vel minutis, alter prorsus idem fit atque alter.* Positis enim

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$\varphi(\alpha) = b + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

si est $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$, habemus

$$0 = a - b + (a_1 - b_1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \ldots + (a_{\lambda-1} - b_{\lambda-1})\alpha^{\lambda-1}.$$

Hæc autem æquatio gradus $\lambda - 1$ idem valere debet atque æquatio

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

quia, si res aliter se haberet, ex utraque æquatione conjuncta alia æquatio gradus minoris prodiret, cujus coefficientes rationales essent, quod fieri non posse ex Gaussii disquisitionibus arithmeticis notum est. Itaque ex æqualitate numerorum $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$, sequitur

$$a - b = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_{\lambda-1} - b_{\lambda-1}.$$

In numero complexo $f(\alpha)$ est α radix quædam æquationis

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda - 1} = 0,$$

cujus ceteræ radices unius α potestates sunt: omnibus is radicibus loco α in $f(\alpha)$ substitutis habemus $\lambda - 1$ numeros complexos $f(\alpha), f(\alpha^2), f(\alpha^3), \ldots, f(\alpha^{\lambda - 1})$, quos *numeros conjunctos* appellabimus. Inter hos bini ad radices reciprocas pertinent, scilicet $f(\alpha)$ et $f(\alpha^{-\alpha})$, quos *numeros reciprocos* vocare convenit. Productum omnium numerorum conjunctorum tanquam functio invariabilis integra omnium radicum æquationis

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda - 1} = 0,$$

semper est numerus realis integer, qui numeri complexi *norma* appellatur. Ex ipsa normæ definitione statim perspici possunt propositiones simplices: *numeros conjunctos eamdem normam habere,* et *normam producti æqualem esse producto ex normis singulorum factorum.* Numeri complexi $f(\alpha)$ normam, præeunte Cl. Lejeune-Dirichlet, præposita littera N designamus, ita ut sit

$$Nf(\alpha) = f(\alpha) f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda - 1});$$

unde hæ propositiones tali modo exhiberi possunt

$$Nf(\alpha^r) = Nf(\alpha) \quad \text{et} \quad N[f(\alpha)\varphi(\alpha)] = Nf(\alpha) . N\varphi(\alpha).$$

§ II.

Si omnes coefficientes numeri complexi $f(\alpha)$ pro indeterminatis habentur, et productum factorum omnium qui normam constituunt evolvitur, forma homogenea gradus $\lambda - 1$ et λ indeterminatorum prodit, quorum vero unus ex arbitrio eligi potest, ita ut $\lambda - 1$ numeri indeterminati remaneant. Omnes igitur disquisitiones de numeris complexis pro disquisitionibus de talibus formis gradus $\lambda - 1$ totidemque indeterminatorum haberi possunt. De formatione hujus formæ notare convenit eam pro æquatione haberi posse, quæ ex æquationibus duabus

$$0 = a + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{\lambda - 1} \alpha^{\lambda - 1},$$

$$0 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda - 1},$$

quantitate α eliminata, efficitur, quam eamdem esse atque æquationem

$$f(\alpha) f(\alpha^2) \ldots f(\alpha^{\lambda - 1}) = 0,$$

ex notissimis regulis algebraicis constat. Alio modo, norma tanquam denominator communis invenitur, quem systematis æquationum linearium incognitæ evolutæ habent. Quales denominatores Cl. Jacobi determinantium nomine ornavit et pluribus locis in-

geniosissime tractavit. Accipimus systema æquationum linearium hocce

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 b + a_{\lambda-1} b_1 + a_{\lambda-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{\lambda-1} = c + m, \\ a_1 b + a_0 b_1 + a_{\lambda-1} b_2 + \ldots + a_2 b_{\lambda-1} = c_1 + m, \\ a_2 b + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \ldots + a_3 b_{\lambda-1} = c_2 + m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\lambda-1} b + a_{\lambda-2} b_1 + a_{\lambda-3} b_2 + \ldots + a_0 b_{\lambda-1} = c_{\lambda-1} + m, \end{array}\right.$$

cujus incognitæ sint $b, b_1, b_2, \ldots, b_{\lambda-1}$, easque æquationes secundum ordinem multiplicamus per $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\lambda-1}$, quo facto summa omnium facile in hanc formam redigitur

$$\left(a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}\right)\left(b + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}\right)$$
$$= c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1};$$

inde positis

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$\varphi(\alpha) = b + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$\psi(\alpha) = c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

est

$$f(\alpha).\varphi(\alpha) = \psi(\alpha),$$

et utraque parte per $f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots f\left(\alpha^{\lambda-1}\right)$ multiplicata, fit

$$\varphi(\alpha).\mathrm{N}f(\alpha) = \psi(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots f\left(\alpha^{\lambda-1}\right),$$

sive

$$\varphi(\alpha) = \frac{\psi(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots f\left(\alpha^{\lambda-1}\right)}{\mathrm{N}f(\alpha)},$$

ex quo apparet quantitatum $b, b_1, b_2, \ldots, b_{\lambda-1}$, quæ formulam $\varphi(\alpha)$ constituunt, denominatorem generalem esse normam $\mathrm{N}f(\alpha)$, uti contendimus.

Quum norma sit forma aliqua gradus $\lambda - 1$ et $\lambda - 1$ indeterminatorum, statim quæstio oboritur de numeris qui hac forma repræsentari possint et qui non possint. Hanc autem quæstionem gravissimam, quæ sine dubio inter mysteria doctrinæ numerorum maxime recondita referenda est, hactenus non potuimus absolvere; sola hæc propositio elementaris ad hanc quæstionem spectans : *normam semper habere formam* $m\lambda + 1$, *vel* $m\lambda$, jam hoc loco, quasi in limine disquisitionum nostrarum, facile demonstrari potest. Quem ad finem adhibemus tres numeros complexos $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$, eosdem quibus modo usi sumus, quorum vero coefficientes omnes integri sint. Si est

$$f(\alpha).\varphi(\alpha) = \psi(\alpha),$$

inter coefficientes horum numerorum complexorum æquationes lineares (A) locum ha-

bere debent, iisque additis fit

$$(a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1})(b + b_1 + b_2 + \ldots + b_{\lambda-1})$$
$$= c + c_1 + c_2 + \ldots + c_{\lambda-1} + \lambda m,$$

quæ æquatio in congruentiam pro modulo λ mutata docet : *summam coefficientium producti duorum numerorum complexorum producto e summis coefficientium utriusque factoris congruam esse, modulo* λ. Quæ propositio facillime ad productum quotcunque factorum extenditur. Norma semper est productum $\lambda - 1$ factorum complexorum, qui easdem coefficientium summas habent, pro ea igitur productum e summis coefficientium omnium factorum conflatum in potestatem exponentis $\lambda - 1$ abit, unde habemus

$$(a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1})^{\lambda-1} \equiv Nf(\alpha) \pmod{\lambda},$$

itaque, per theorema Fermatianum,

$$Nf(\alpha) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

nisi forte sit

$$a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

qua conditione fit

$$Nf(\alpha) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

§ III.

Normæ usus insignis est in divisione numerorum complexorum, quippe cujus auxilio divisor complexus semper in divisorem realem mutari potest. Posito enim

$$F(\alpha) = f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1})$$

fit

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha) F(\alpha)}{Nf(\alpha)}.$$

Si $\varphi(\alpha)$ per $f(\alpha)$ divisibilis est, i. e. si hic quotiens numero integro complexo æqualis est, $\varphi(\alpha) F(\alpha)$ per numerum integrum realem $Nf(\alpha)$ dividi possit necesse est, numerus autem complexus per numerum realem divisibilis non est, nisi coefficientes ejus singuli, per hunc numerum divisi, eadem residua habeant. Inde nacti sumus hoc criterium generale, quo dijudicari possit, utrum numerus complexus per alium numerum complexum divisibilis sit, an non : *Numerus complexus* $\varphi(\alpha)$ *per alium numerum* $f(\alpha)$ *divisibilis est, si in producto evoluto* $\varphi(\alpha) f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1})$ *omnes coefficientes pro modulo* $Nf(\alpha)$ *congrui sunt, sin vero hi coefficientes non omnes congrui sunt,* $\varphi(\alpha)$ *certo non divisibilis est per* $f(\alpha)$.

Alio etiam modo numerorum complexorum divisio perfici potest, ita quidem, ut ad divisionem fonctionum rationalium integrarum revocetur. Altioribus enim potestatibus radicis α admissis, numerus $\varphi(\alpha)$ infinitis modis diversis representari potest, qui

omnes hac forma generali continentur

$$\varphi(\alpha) = (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1})\,\psi(\alpha),$$

in qua $\psi(\alpha)$ functionem integram quamcunque designat, quæ pro fine singulorum problematum apte eligi poterit. Jam dico, *si $\varphi(\alpha)$ per $f(\alpha)$ divisibilis sit, huic numero $\varphi(\alpha)$ semper formam ejusmodi dari posse, ut pro quolibet valore quantitatis α, quæ tanquam variabilis spectanda est, divisio succedat et residuum relinquatur nullum.* Per hypothesin quotiens $\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}$ æqualis est numero alicui complexo $F(\alpha)$, itaque

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} = F(\alpha), \quad \text{sive } \varphi(\alpha) = f(\alpha)\,F(\alpha).$$

Jam signo α in x mutato, videmus functionem rationalem integram variabilis x, $\varphi(x) - f(x)\,F(x)$ evanescere, si x cuilibet radici æquationis

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1} = 0$$

æqualis fit; hæc igitur functio integra factorem $1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1}$ habeat necesse est: quare in hanc formam redigi potest

$$\varphi(x) - f(x)\,F(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1})\,\psi(x),$$

ex qua theorema enuntiatum sponte manat.

§ IV.

Inter numeros complexos præcipue notatu digni sunt ii, quorum norma est unitas, quos omnes unitatum complexarum nomine designamus. Hæ unitates in doctrina numerorum complexorum easdem fere partes suscipiunt, quas æquationis Pellianæ

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

solutiones in doctrina formarum secundi gradus determinantis positivi agunt. Numerus harum unitatum, excepto solo casu $\lambda = 3$, semper infinitus est, et simili modo ut in solvenda æquatione Pelliana semper unitates quædam fundamentales dantur, ex quibus ad potestates evectis et inter se multiplicatis infinitus numerus aliarum unitatum deducitur. Simplicissimæ unitates sunt ± 1, $\pm\alpha$, $\pm\alpha^2, \ldots, \pm\alpha^{\lambda-1}$, quæ sponte se offerunt, præter has autem aliæ facile invenuntur, ratione habita numeri complexi $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{r-1}$, in quo r est numerus quilibet integer minor quam λ; hic numerus fractionis forma exhibetur hoc modo

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{r-1} = \frac{1 - \alpha^r}{1 - \alpha},$$

ejusque norma est

$$\frac{(1 - \alpha^r)(1 - \alpha^{2r})(1 - \alpha^{3r}) \ldots (1 - \alpha^{(\lambda-1)r})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3) \ldots (1 - \alpha^{\lambda-1})}.$$

in qua, loco exponentium r, $2r$, $3r$, ..., $(\lambda-1)r$ residuis minimis modulo λ substitutis, singuli factores numeratoris iidem fiunt atque denominatoris, quæ igitur unitati æqualis est. Quum jam $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1}$ sit unitas, et norma producti æqualis producto e normis factorum composito, sequitur ut forma generalis

$$\pm\alpha^k(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1})^l(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1})^m(1+\alpha+\alpha^3+\ldots)\ldots$$

pro omnibus numeris k, l, m, n,..., r, s, t,..., unitates complexas contineat. Numerus factorum diversorum, qui ad potestates evehendi et multiplicandi sunt, ut diversæ unitates obtineantur, itemque numeri r, s, t,..., pro singulis numeris λ accurate definiri possunt, quam vero disquisitionem hoc loco præterentes, unitatum proprietatem generalem demonstrabimus, qua in posterum utemur, scilicet: *unitates complexas non tam singularum radicum* 1, α, α^2,..., $\alpha^{\lambda-1}$, *quam periodorum ex binis earum*, $\alpha+\alpha^{\lambda-1}$, $\alpha^2+\alpha^{\lambda-2}$, *etc., functiones lineares esse, si ad factorem accedentem* $\pm\alpha^k$ *non respiciatur*, sive *omnes unitates hanc formam habere*

$$\pm\alpha^k\left\{c+c_1(\alpha+\alpha^{\lambda-1})+c_2(\alpha^2+\alpha^{\lambda-2})+\ldots+c_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}+\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}}\right)\right\}$$

E producto

$$1=\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)\varphi(\alpha^3)\ldots\varphi(\alpha^{\lambda-1})$$

factorum semissem ex arbitrio eligo, ita tamen ut reciproci in eadem semissi non insint, sed cujuslibet factoris reciprocus in altera semissi reperiatur. Horum factorum productum sit $\psi(\alpha)$, unde alterius semissis productum est $\psi(\alpha^{-1})$, et $\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1})=1$. Ponatur

$$\psi(\alpha)=a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

unde

$$\psi(\alpha^{-1})=a+a_1\alpha^{\lambda-1}+a_2\alpha^{\lambda-2}+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha,$$

atque ex multiplicatione oriatur

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1})=A+A_1\alpha+A_2\alpha^2+\ldots+A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

erit

$$A=a^2+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{\lambda-1}^2;$$

$$A_1=aa_1+a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{\lambda-1}a,$$

$$A_2=aa_2+a_1a_3+a_2a_4+\ldots+a_{\lambda-1}a_1,$$

etc., etc.

et summa coefficientium fit

$$A+A_1+A_2+\ldots+A_{\lambda-1}=(a+a_1+a_2+\ldots+a_{\lambda-1})^2;$$

præterea quum sit

$$A + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_{\lambda-1} \alpha^{\lambda-1} = 1,$$

erit

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{\lambda-1} = m$$

et

$$A = m + 1,$$

itaque

$$m\lambda + 1 = (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1})^2$$

et

$$\pm 1 \equiv a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1} \pmod{\lambda};$$

horum coefficientium summa, quæ congrua est ± 1 modulo λ, etiam æqualis ± 1 accipi potest, quo facto fit $m = 0$, $A = 1$, et quum A sit summa quadratorum positivorum integrorum

$$A = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{\lambda-1}^2,$$

unitati æqualis fieri non potest nisi unus numerorum $a, a_1, a_2, \ldots$, unitati æqualis, ceteri nihilo æquales fiunt, habemus igitur

$$\psi(\alpha) = \pm \alpha^k.$$

Quum $\psi(\alpha)$ alteram factorum semissem normæ 1 contineat, hac sola conditione eligendam, ut factores reciproci non insint, semper plura producta $\psi(\alpha)$ erunt, quæ unitati simplici $\pm \alpha^k$ æqualia sint. Quorum productorum duo eligo, $\psi(\alpha)$ et $\psi_1(\alpha)$, quæ excepto uno factores ceteros omnes eosdem habeant, atque hic solus factor, quo $\psi(\alpha)$ differt a $\psi_1(\alpha)$, sit $\varphi(\alpha^\mu)$, unde factorquem $\psi_1(\alpha)$ continet, neque tamen $\psi(\alpha)$, erit $\varphi(\alpha^{-\mu})$. Inde, ex conjunctis æquationibus

$$\psi(\alpha) = \pm \alpha^k$$

et

$$\psi_1(\alpha) = \pm \alpha^h,$$

fit

$$\psi_1(\alpha) = \pm \alpha^{h-k} \psi(\alpha),$$

et factoribus communibus sublatis et posito

$$h - k = m,$$

est

$$\varphi(\alpha^{-\mu}) = \pm \alpha^m \varphi(\alpha^\mu);$$

quælibet igitur unitas complexa hoc proprium habet, ut a reciproca sua non differat

nisi adjecto factore qui ipse est unitas simplex. Facillime inde theorematis supra propositi veritas perspicitur.

Pro $\lambda = 3$, unitates omnes habere debent formam hanc :

$$\varphi(\alpha) = \pm \alpha^k [c + c_1(\alpha + \alpha^2)],$$

et quia $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$\varphi(\alpha^2) = \pm \alpha^k (c - c_1),$$

ex quo sequitur ut sit

$$c - c_1 = 1;$$

pro hoc igitur casu præter unitates simplices ± 1, $\pm \alpha$, $\pm \alpha^2$, aliæ non dantur.

Pro $\lambda = 5$, unitatum forma generalis hæc est

$$\varphi(\alpha) = \pm \alpha^k [c + c_1(\alpha + \alpha^4) + c_2(\alpha^2 + \alpha^3)],$$

quæ adhibita æquatione

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0,$$

et posito

$$c - c_2 = t, \quad c_1 - c_2 = u,$$

in hanc simpliciorem mutatur

$$\varphi(\alpha) = \pm \alpha^k [t + u(\alpha + \alpha^4)],$$

ex qua fit

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2) = \alpha^k (t^2 - tu - u^2),$$

itaque

$$t^2 - tu - u^2 = \pm 1.$$

Cognitæ hujus æquationis solutiones omnes continentur formis

$$t = \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}, \quad u = \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}},$$

quæ, quia

$$\alpha + \alpha^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha^2 + \alpha^3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

etiam hoc modo repræsentari possunt

$$t = \frac{(\alpha + \alpha^4)^{n-1} - (\alpha^2 + \alpha^3)^{n-1}}{\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3}, \quad u = \frac{(\alpha + \alpha^4)^{n} - (\alpha^2 + \alpha^3)^{n}}{\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3};$$

per faciles transformationes ex iis fit

$$t + u(\alpha + \alpha^4) = (\alpha + \alpha^4)^n, \quad \varphi(\alpha) = \pm \alpha^k (\alpha + \alpha^4)^n,$$

itaque pro $\lambda = 5$, unitates complexæ omnes unius unitatis fundamentalis potestates existunt, quæ præterea unitatibus simplicibus formæ $\pm \alpha^k$ multiplicatæ esse possunt.

præter has autem aliæ non dantur. Pro majoribus numeris λ unitatum omnium indagatio multo difficilior est, et principia peculiaria poscit, quæ nos hactenus nondum satis perscrutati sumus. Eo magis hac quæstione nobis supersedendum videtur, quum compertum habeamus Cl. Lejeune-Dirichlet recentissimo tempore in Italia, ubi etiam nunc versatur, de iis unitatibus complexis theoremata fundamentalia elaborasse, quæ ut propediem in publicum edat cum desiderio exspectamus. Hic etiam adnotabo geometram juvenilem Leopoldum Kronecker, qui nunc Vratislaviæ litteris mathematicis studet, pro absolvendis iis unitatibus quæ ad numerum $\lambda = 7$ pertinent methodum subtilem invenisse, quæ ni fallor felici successu ad altiorum ordinum unitates pertractandas applicari poterit.

§ V.

Progredimur ad perscrutandos eos numeros complexos, quorum norma sit numerus primus p, ita ut habeatur

$$p = f(\alpha) f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1}).$$

Numerus primus, qui tali modo in $\lambda - 1$ factores dissolvi potest, secundum theorema paragrapho tertia propositum, formam linearem $m\lambda + 1$ habere debet, nisi est ipse numerus $\lambda = p$, qui tali modo in $\lambda - 1$ factores dissolvitur

$$\lambda = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3) \ldots (1 - \alpha^{\lambda-1}).$$

Factores $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, etc., *sunt numeri complexi primi qui, si unitates complexæ excludantur, ulterius in factores dissolvi non possunt.* Nam si ponimus $f(\alpha)$ e factoribus $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ constare, habemus

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) . \psi(\alpha),$$

et

$$Nf(\alpha) = N\varphi(\alpha) . N\psi(\alpha),$$

et quia $Nf(\alpha) = p$ est numerus primus, alter factorum realium integrorum $N\varphi(\alpha)$ et $N\psi(\alpha)$ unitati æqualis esse debet, itaque alter factorum $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ erit unitas complexa, et $f(\alpha)$ numerus primus complexus. Porro demonstramus *hos factores* $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, etc., *omnes inter se diversos esse.* Ex æqualitate duorum factorum

$$f(\alpha^{\mu}) = f(\alpha^{\nu}),$$

alia radice idonea loco α substituta, sequeretur

$$f(\alpha) = f(\alpha^n),$$

et repetita substitutione α^n loco α, esset

$$f(\alpha) = f(\alpha^n) = f(\alpha^{n^2}) = f(\alpha^{n^3}) = \ldots.$$

Iam si infima potestas numeri n, quæ unitati congrua sit modulo λ, est n^h, in producto

$\lambda - 1$ factorum numeri p erunt h factores æquales; alia deinde radice substituta, quæ inter radices α, α^n, α^{n^2}, etc., non invenitur, statim alios h factores æquales obtinemus, et ita porro, usque dum omnes factores exhausti sunt. Igitur ex æqualitate duorum factorum primum sequeretur ut p sit potestas h^{ta} producti eorum factorum complexorum qui inter se diversi sint. Radices α, α^n, α^{n^2}, etc., periodum h terminorum efficiunt, atque si functio rationalis integra $f(\alpha)$, loco α omnibus periodi radicibus substitutis, immutata manet, hanc ipsam omnium similium periodorum, itaque etiam unius earum, functionem rationalem integram esse constat. Ceteri factores diversi ab hoc non differre possunt, nisi quod ceterarum periodorum functiones sunt, et omnium factorum diversorum productum, tanquam functio invariabilis omnium periodorum similium, esse debet numerus integer realis. Hinc tandem sequeretur ut p esset potestas numeri realis et exponentis h, quod quum absurdum sit concludimus omnes illos factores primos complexos numeri p inter se diversos esse.

Si tali factore primo complexo numeri p tanquam modulo sive divisore utimur, simul productum ceterorum factorum

$$F(\alpha) = f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1}),$$

cujus auxilio divisio per numerum complexum $f(\alpha)$ ad divisionem per numerum realem $Nf(\alpha)$ reducitur, magni momenti est, quam ob rem hujus producti proprietates principales præterire non possumus. Sit

$$p = f(\alpha) F(\alpha),$$

et producto $F(\alpha)$ per multiplicationem evoluto habeatur

$$F(\alpha) = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

unde etiam

$$F(\alpha^2) = A + A_1\alpha^2 + A_2\alpha^4 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{2\lambda-2},$$
$$F(\alpha^3) = A + A_1\alpha^3 + A_2\alpha^6 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{3\lambda-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(\alpha^{\lambda-1}) = A + A_1\alpha^{\lambda-1} + A_2\alpha^{2(\lambda-2)} + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{(\lambda-1)(\lambda-1)};$$

iis æquationibus secundum ordinem per α^{-n}, α^{-2n}, $\alpha^{-3n}, \ldots, \alpha^{-(\lambda-1)n}$ multiplicatis et additione conjunctis, habemus

$$\alpha^{-n}F(\alpha) + \alpha^{-2n}F(\alpha^2) + \ldots + \alpha^{-(\lambda-1)n}F(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda A_n - (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\lambda-1}),$$

inde mutando n in $n-1$, et subtrahendo,

$$\alpha^{-n}(1-\alpha)F(\alpha) + \alpha^{-2n}(1-\alpha^2)F(\alpha^2) + \ldots + \alpha^{-(\lambda-1)n}(1-\alpha^{\lambda-1})F(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda(A_n - A_{n-1}),$$

ex hac forma, denuo mutato n in $n+1$ et $n+2$, prodeunt similes formæ pro

$\lambda(A_{n+2} - A_{n+1})$ et $\lambda(A_{n+1} - A_n)$, quibus inter se multiplicatis formetur evolutio formæ

$$\lambda^2(A_{n+2} - A_{n+1})(A_{n+1} - A_n).$$

Facile perspicitur in hac evolutione quadrata numerorum complexorum $F(\alpha)$, $F(\alpha^2)$, etc., non reperiri, sed sola producta binorum diversorum, quæ factores $f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{p-1})$ omnes simul, ideoque factorem realem p continent. Quum igitur p sit factor communis omnium terminorum hujus formulæ evolutæ, factore λ^2 omisso, habemus congruentiam

$$(A_{n+2} - A_{n+1})(A_{n+1} - A_n) \equiv (A_{n+2} - A_{n+1})(A_n - A_{n-1}) \pmod{p},$$

quæ etiam hoc modo repræsentari potest

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+2} - A_{n+1}} \equiv \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \pmod{p};$$

posito igitur

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+2} - A_{n+1}} \equiv \xi \pmod{p},$$

videmus numerum ξ pro omnibus diversis numeris n eumdem manere. Hanc congruentiam si hoc modo scribimus

$$A_{n+1}\xi - A_n \equiv A_{n+2}\xi - A_{n+1} \pmod{p},$$

videmus etiam

$$A_{n+1}\xi - A_n \equiv \eta \pmod{p}$$

pro omnibus diversis numeris n non variari, itaque habemus congruentias

$$(A) \quad \left\{\begin{array}{l} A\xi - A_{p-1} \equiv \eta, \\ A_1\xi - A \equiv \eta, \\ A_2\xi - A_1 \equiv \eta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{p-1}\xi - A_{p-2} \equiv \eta. \end{array}\right. \pmod{p},$$

Aliud etiam systema congruentiarum, quibus coefficientes producti $F(\alpha)$ satisfacere debent, facile e congruentia

$$A_{n+1}\xi - A_n \equiv A_{n+2}\xi - A_{n+1} \pmod{p}$$

deducitur:

$$(B) \quad \left\{\begin{array}{l} A_{p-1} - A \equiv (A - A_1)\xi, \\ A_{p-2} - A_{p-1} \equiv (A - A_1)\xi^2, \\ A_{p-3} - A_{p-2} \equiv (A - A_1)\xi^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 - A_2 \equiv (A - A_1)\xi^{p-1}, \end{array}\right.$$

quibus additis, omisso factore $A - A_0$, qui nihilo congruus esse non potest, sequitur ut ξ sit una $\lambda - 1$ radicum realium congruentiæ

$$1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

§ VI.

Singulis congruentiis (A) paragraphi antecedentis secundum ordinem quo scriptæ sunt factoribus $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\lambda-1}$ multiplicatis, earum summa facile in hanc formam redigitur :

$$(\xi - \alpha)(A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}) \equiv 0 \pmod{p},$$

sive

$$(\xi - \alpha) F(\alpha) \equiv 0 \pmod{p},$$

et factore communi $F(\alpha)$ e modulo $p = f(\alpha) F(\alpha)$ et ex ipsa congruentia sublato habemus

$$\xi - \alpha \equiv 0 \quad [\text{mod. } f(\alpha)]$$

unde elucet etiam pro quolibet numero complexo $\varphi(\alpha)$ semper esse

$$\varphi(\alpha) \equiv \varphi(\xi) \quad [\text{mod. } f(\alpha)];$$

itaque nacti sumus theorema insigne : *Pro modulo complexo $f(\alpha)$, cujus norma est numerus primus, omnes numeri complexi realibus numeris congrui sunt.* Hoc theorema omnibus congruentiis numerorum complexorum, quarum modulus normam habet numerum primum, viam patefacit, quam vero patefactam hic statim relinquimus.

E congruentia

$$\alpha \equiv \xi \quad [\text{mod. } f(\alpha)]$$

sequitur

$$f(\alpha) \equiv f(\xi) \quad [\text{mod. } f(\alpha)],$$

itaque

$$f(\xi) \equiv 0 \quad [\text{mod. } f(\alpha)];$$

numerus autem integer realis $f(\xi)$, qui factorem $f(\alpha)$ continet, omnes etiam factores huic conjunctos, ideoque factorem p continere debet, unde concludimus eam esse indolem factorum complexorum numeri p, ut certa radice congruentiæ

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

loco α substituta, horum factorum unus per p divisibilis fiat. Præterea adnotamus pro quolibet numero ξ unum, non plures, factorum $f(\xi)$, $f(\xi^2)$, $f(\xi^3)$, etc., per p divisibilem esse ; si enim simul esset

$$f(\xi) \equiv 0 \quad \text{et} \quad f(\xi^r) \equiv 0 \pmod{p},$$

per congruentiam

$$\xi \equiv \alpha \quad [\text{mod. } f(\alpha)]$$

etiam esse deberet

$$f(\alpha^r) \equiv 0 \quad [\text{mod. } f(\alpha)],$$

duo igitur factores $f(\alpha)$ et $f(\alpha^{\lambda-1})$ æquales esse deberent, quod fieri non posse supra demonstravimus. Quum radices congruentiæ

$$1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{\lambda-1}\equiv 0 \pmod{p},$$

omnes tanquam potestates unius radicis repræsentari possint, alia quacunque radice loco ξ substituta, alium etiam factorem producti $f(\xi).f(\xi^2).f(\xi^3)\ldots f(\xi^{\lambda-1})$ per p divisibilem fieri patet, *singuli igitur* $\lambda-1$ *factores* $f(\alpha), f(\alpha^2)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})$, *cum singulis* $\lambda-1$ *radicibus congruentiæ*

$$1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{\lambda-1}\equiv 0,$$

ita conjuncti sunt, ut pro certa radice ξ *certus etiam illorum factorum, si* ξ *loco* α *substituatur, per* p *divisibilis fiat, idemque sit divisor numeri* $\xi-\alpha$.

Jam eo pervenimus ut quæstionem gravissimam absolvere possimus : utrum plures numeri complexi eamdem normam, quæ numerus primus est, habere possint an non, sive an idem numerus primus p, pluribus modis diversis in $\lambda-1$ factores primos complexos dissolvi possit. Fingamus duos numeros complexos $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ eamdem normam p, numerum primum, habere, ita ut sit

$$p=f(\alpha).f(\alpha^2).f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\lambda-1}),$$
$$p=\psi(\alpha).\psi(\alpha^2).\psi(\alpha^3)\ldots\psi(\alpha^{\lambda-1}).$$

Quum singuli factores horum productorum ad singulas radices congruentiæ

$$1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{\lambda-1}\equiv 0 \pmod{p}$$

pertineant, alterius producti factores ita dispositos accipiamus, ut $\psi(\alpha)$ et $f(\alpha)$ ad eamdem radicem ξ pertineant, quo facto uterque etiam erit divisor numeri $\xi-\alpha$, atque

$$\psi(\xi)\equiv 0,\quad f(\xi)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Inde positis

$$\psi(\alpha)=c+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\ldots+c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$F(\alpha)=f(\alpha).f(\alpha^2)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})=A+A_1\alpha+A_2\alpha^2+\ldots+A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

et

$$\psi(\alpha).F(\alpha)=C+C_1\alpha+C_2\alpha^2+\ldots+C_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

hoc producto per multiplicationem evoluto habemus :

$$C=Ac+A_{\lambda-1}c_1+A_{\lambda-2}c_2+\ldots+A_1c_{\lambda-1},$$
$$C_1=Ac+Ac_1+A_{\lambda-1}c_2+\ldots+A_2c_{\lambda-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{\lambda-1}=A_{\lambda-1}c+A_{\lambda-2}c_1+A_{\lambda-3}c_2+\ldots+Ac_{\lambda-1}.$$

et si harum æquationum binæ contiguæ subtrahuntur :

$$C - C_1 = (A - A_1)c + (A_{\lambda-1} - A)c_1 + (A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1})c_2 + \ldots + (A_1 - A_2)c_{\lambda-1},$$

$$C - C_2 = (A_1 - A_2)c + (A - A_1)c_1 + (A_{\lambda-1} - A)c_2 + \ldots + (A_2 - A_3)c_{\lambda-1},$$

. . . . . .

$$C_{\lambda-2} - C_{\lambda-1} = (A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1})c + (A_{\lambda-3} - A_{\lambda-2})c_1 + (A_{\lambda-1} - A_{\lambda-3})c_2 + \ldots + (A_{\lambda-1} - A_{\lambda-2})c_{\lambda-1},$$

quæ per congruentias (B), § V, mutantur in

$$C - C_1 \equiv (A - A_1)(c + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1}),$$

$$C_1 - C_2 \equiv (A_1 - A_2)(c + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1}),$$

. . . . . .

$$C_{\lambda-2} - C_{\lambda-1} \equiv (A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1})(c + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1}),$$

et quum sit

$$\psi(\xi) = c + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

habemus

$$C \equiv C_1 \equiv C_2 \equiv \ldots \equiv C_{\lambda-1} \pmod{p},$$

unde sequitur ut productum $\psi(\alpha)F(\alpha)$ per p divisibile sit ; itaque ponere licet

$$\psi(\alpha).F(\alpha) = p\,\varphi(\alpha),$$

et quum sit $p = f(\alpha)F(\alpha)$, factore communi $F(\alpha)$ sublato habemus

$$\psi(\alpha) = f(\alpha)\varphi(\alpha),$$

unde etiam

$$N\psi(\alpha) = Nf(\alpha)\,N\varphi(\alpha),$$

et quia $Nf(\alpha) = N\psi(\alpha) = p$, hoc factore omisso est

$$N\varphi(\alpha) = 1;$$

ergo $\varphi(\alpha)$ est unitas complexa, atque habemus theorema : *Omnes numeri complexi ejusdem normæ, quæ numerus primus est, non inter se differunt nisi unitatibus complexis, quibus multiplicatæ esse possunt.* Ad diversitatem numerorum conjunctorum, quæ obvia est, hic non respicimus. Idem theorema etiam hoc modo enuntiari potest : *Si numerus primus realis aliquo modo in $\lambda - 1$ factores complexos dissolvi potest, idem semper infinitis aliis modis tanquam productum $\lambda - 1$ factorum complexorum repræsentari potest, qui vero e factoribus unius repræsentationis unitatum complexarum ope, omnes eruuntur.*

§ VII.

Facile inveniuntur numeri complexi, quorum normæ factorem p, numerum primum formæ $mr+1$, implicant. Nam *si ξ est radix aliqua congruentiæ*

$$1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{r-1}\equiv 0 \pmod{p},$$

et si coefficientes numeri complexi

$$\psi(\alpha)=a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{r-1}\alpha^{r-1}$$

congruentia

$$a+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_{r-1}\xi^{r-1}\equiv 0$$

satisfaciunt, semper est

$$N\psi(\alpha)\equiv 0 \pmod{p}.$$

Etenim, si ponimus

$$a_1(\xi-\alpha)+a_2(\xi^2-\alpha^2)+a_3(\xi^3-\alpha^3)+\ldots+a_{r-1}(\xi^{r-1}-\alpha^{r-1})=pP-\psi(\alpha),$$

et si alteri parti hujus æquationis forma datur $(\xi-\alpha)\varphi(\alpha)$, est

$$\psi(\alpha)=pP-(\xi-\alpha)\varphi(\alpha),$$

cujus numeri complexi normam factorem p habere patet siquidem, quod posuimus, norma numeri $\xi-\alpha$, i. e. $1+\xi+\xi^2+\ldots\xi^{r-1}$, per p divisibilis est.

Hujus theorematis ope *omnes* numeros complexos inveniri, quorum normæ factorem p habeant, inde apparet, quod theorema inversum etiam valet, scilicet : *Si norma numeri complexi*

$$\psi(\alpha)=a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{r-1}\alpha^{r-1},$$

factorem p implicat, semper datur radix aliqua ξ congruentiæ

$$1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{r-1}\equiv 0 \pmod{p},$$

quæ numerum

$$\psi(\xi)=a+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_{r-1}\xi^{r-1}$$

per p divisibilem reddat. Consideremus hanc functionem rationalem integram variabilis x :

$$\psi(x)\psi(x^2)\psi(x^3)\ldots\psi(x^{r-1})-N\psi(\alpha),$$

quæ quum manifesto evanescat pro

$$x=\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^{r-1},$$

factorem $1+x+x^2+\ldots+x^{r-1}$ habere debet, eamque ob causam, si x radicem alicui congruentiæ

$$1+x+x^2+\ldots+x^{r-1}\equiv 0 \pmod{p},$$

æqualis ponitur, per p divisibilis est; inde si hujus congruentiæ radicem aliquam, uti supra fecimus, littera ξ denotamus, semper unus factorum producti $\psi(\xi)\psi(\xi^2)\psi(\xi^3)\ldots\psi(\xi^{\lambda-1})$ per p divisibilis esse debet. Præterea, quia omnes radices illius congruentiæ unius radicis ξ potestates sunt, sponte apparet pro alia radice ξ alium etiam factorem hujus producti per p divisibilem fieri, itaque pro quolibet factore certa quædam radix ξ exstare debet, qua substituta nihilo congruus reddatur.

§ VIII.

Postquam demonstravimus quo modo infinitus numerus complexorum numerorum omnium inveniatur, quorum normæ factorem p habeant, quærendum nobis videtur an semper inter hos numeros complexos exstent quarum norma sit ipse numerus p, sive, quod idem est, an quilibet numerus primus p formæ $m\lambda+1$ in $\lambda-1$ factores primos conjunctos diffindi possit. Ad hunc finem ponamus esse

$$p = f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\lambda-1}),$$

et videamus quæ inde pro numero p sequantur. Hujus producti factores secundum radices unitatis $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{\lambda-1}$, quas continent in periodos dividamus. Productum factorum eorum qui ad eamdem periodum pertinent, ex notis Cl. Gaussii theorematis, erit functio rationalis integra linearis omnium periodorum similium. Jam si $\lambda-1$ factoribus e et f constat, et e periodi f terminorum accipiuntur, quas Gaussii signis designamus $(f, 1), (f, g), (f, g^2), \ldots, (f, g^{e-1})$, productum eorum factorum, qui eamdem periodum constituunt hanc formam habet

$$b + b_1(f, 1) + b_2(f, g) + \ldots + b_e(f, g^{e-1}),$$

et simili modo producta factorum qui cæteras periodos conficiunt

$$b + b_1(f, g) + b_2(f, g^2) + \ldots + b_e(f, 1),$$
$$b + b_1(f, g^2) + b_2(f, g^3) + \ldots + b_e(f, g),$$
etc. etc.;

quarum omnium productum quum sit functio invariabilis (symetrica) omnium periodorum, ab iis periodis liberum est, et formam certam gradus e et $e+1$ indeterminatorum $b, b_1, b_2, \ldots, b_e$ efficit, qui facile ad e indeterminatos numeros reducuntur. Igitur si $e, e', e'', \ldots$ sunt divisores numeri $\lambda-1$, numerus p repræsentari debet per formam certam gradus e et e indeterminatorum, idemque per formam gradus e' et e' indeterminatorum, etc. Hoc autem pro certis numeris p et λ fieri non posse facillime intelligitur ex forma secundi gradus et duorum indeterminatorum, quam p habere debet, si in $\lambda-1$ factores primos complexos diffindi potest; duæ enim periodi, quarum altera ad residua quadratica, altera ad non residua pertinet, valores habent $\frac{-1+\sqrt{\pm\lambda}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{\pm\lambda}}{2}$, inde productum ex altera semissi factorum complexorum numeri p

compositum hanc formam habebit $\frac{a \pm b\sqrt{\pm\lambda}}{2}$, et ipse numerus p habebit formam $p = \frac{a^2 \mp \lambda b^2}{4}$, seu $4p = a^2 \mp \lambda b^2$, quam numeri formæ $m\lambda + 1$ non semper patiuntur, siquidem præter formam principalem aliæ quoque formæ non æquivalentes secundi gradus, determinantis $\mp\lambda$, locum habent. Simili modo etiam altiorum graduum formæ impedimento esse possunt, quominus numerus p in $\lambda - 1$ factores primos complexos dissolvi queat.

Quia numeri primi reales formæ $m\lambda + 1$ non semper tanquam producta $\lambda - 1$ factorum complexorum repræsentari possunt, multis etiam numerorum integrorum realium proprietatibus simplicibus numeri complexi carent. Pro iis generaliter non valet propositio fundamentalis ut quilibet numerus sit productum factorum complexorum simplicium, qui neglectis unitatibus complexis semper iidem sint, re enim vera nonnunquam idem numerus compositus pluribus modis diversis in factores simplices complexos diffindi potest. Eadem res etiam hoc modo enuntiari potest : Si numerus complexus per alium numerum complexum ita dividi potest, ut quotiens sit integer complexus, factores simplices divisoris non ubique cum factoribus simplicibus dividendi compensari possunt. Quod ut demonstremus denuo numerum ξ cognitæ illius congruentiæ radicem in auxilium vocamus, quæ hoc modo in factores dissolvitur :

$$(\xi - \alpha)(\xi - \alpha^2)\ldots(\xi - \alpha^{\lambda-1}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Jam si factores divisoris p cum factoribus dividendi tollerentur, p cum aliquo factorum $\xi - \alpha$, $\xi - \alpha^2$, etc., factorem communem haberet, ideoque etiam cum singulo quoque. Sit $f(\alpha)$ hic factor communis numerorum p et $\xi - \alpha$, $f(\alpha^2)$ erit factor communis numerorum p et $\xi - \alpha^2$, et ita porro ; omnes igitur numeri complexi conjuncti $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})$, factores essent numeri p, omnesque inter se diversi, quia $\xi - \alpha$, $\xi - \alpha^2$, etc., non possunt factores communes habere nisi eos quorum norma sit 1 vel λ, scilicet $\alpha - \alpha^2$, $\alpha - \alpha^3$, etc. Inde sequeretur ut quilibet numerus primus $p = m\lambda + 1$ esset productum $\lambda - 1$ factorum complexorum conjunctorum, quod in universum non pro omnibus valoribus numerorum p et λ valere supra demonstravimus. Maxime dolendum videtur, quod hæc numerorum realium virtus, ut in factores primos dissolvi possint, qui pro eodem numero semper iidem sint, non eadem est numerorum complexorum, quæ si esset, tota hæc doctrina, quæ magnis adhuc difficultatibus laborat, facile absolvi et ad finem perduci posset. Eam ipsam ob causam numeri complexi, quos hic tractamus, imperfecti esse videntur, et dubium inde oriri posset, utrum hi numeri complexis ceteris qui fingi possint præferendi, an alii quærendi essent, qui in hac re fundamentali analogiam cum numeris integris realibus servarent. Attamen hi numeri complexi, qui unitatis radicibus et numeris integris realibus componuntur, non ex arbitrio facti sunt, sed ex ipsa doctrina numerorum procreati, atque ipsorum ea ratio est, ut in doctrina sectionis circuli et residuorum potestatum altiorum ulterius promovenda iis carere nullo modo possimus.

§ IX.

Quum numerorum primorum formæ $m\lambda + 1$ alii in $\lambda - 1$ factores complexos discerpi possint, alii non possint, ea re est ut inveniatur qui et quales sint ii numeri λ et p, pro quibus talis repræsentatio locum habet, atque ut pro iis qui minorem tantum numerum factorum primorum habent, horum factorum numerus et forma propria indagetur, quod vero problema ulterioribus virorum doctorum perscrutationibus relinquendum est. Ipse ut hanc rem accuratius cognoscerem, et ut exemplis docerer, omnium numerorum primorum infra mille, qui formas habent

$$5m+1,\quad 7m+1,\quad 11m+1,\quad 13m+1,\quad 17m+1,\quad 19m+1 \text{ et } 23m+1$$

factores primos computavi, et methodos quibus usus sum, et ipsos factores primos computatos hoc loco in publicum edam.

Altera methodus factore communi duorum numerorum complexorum inveniendo nititur, quod problema simili modo solvendum est atque pro numeris integris realibus. Si $\varphi(\alpha)$ et $f(\alpha)$ sunt numeri complexi quorum factor communis maximus investigandus est, et $N\varphi(\alpha) > Nf(\alpha)$, a numero fracto $\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}$ numerum certum integrum subtraho $\psi(\alpha)$, quem siquidem fieri potest ita eligo, ut norma residui sit minor unitate, sive

$$N\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} - \psi(\alpha)\right) < 1.$$

Ut hoc efficiatur, evolvo productum

$$F(\alpha) = f(\alpha^2)\, f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1}),$$

ejusque auxilio etiam productum

$$\varphi(\alpha)\, F(\alpha) = C + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \ldots + C_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1};$$

porro accipio

$$\psi(\alpha) = c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

et simpliciter scribo n, loco $Nf(\alpha)$. Inde erit

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} - \psi(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)\, F(\alpha)}{n} - \psi(\alpha),$$

et posito

$$\frac{\varphi(\alpha)\, F(\alpha)}{n} - \psi(\alpha) = k + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \ldots + k_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

erit

$$k = \frac{C}{n} - c,\quad k_1 = \frac{C_1}{n} - c_1,\quad k_2 = \frac{C_2}{n} - c_2,\quad \text{etc.}$$

Jam numeros c, c_1, c_2, etc., ita eligo ut integri maximi sint, qui singulis fractionibus

$\frac{C}{n}, \frac{C_1}{n}, \frac{C_2}{n}$, etc., contineantur, quo facto numeri k, k_1, k_2, etc., omnes erunt positivi et minores unitate. Certo talis numeri complexi $k + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \ldots + k_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$, norma parva erit; sed semper eam unitate minorem fore nondum liquet, neque etiam semper res ita se habet. Hoc autem loco nobis notandum est numeros k, k_1, k_2, etc., iis conditionibus quas posuimus nondum plane determinatos esse, omnibus enim coefficientibus C, C_1, C_2, etc., eodem numero auctis, $\varphi(\alpha).F(\alpha)$ non mutatur, sed numeri integri maximi, qui fractionibus $\frac{C}{n}, \frac{C_1}{n}, \frac{C_2}{n}$, etc., insunt, revera mutari possunt. Nam si numeros C, C_1, C_2, etc., omnes æqualiter crescentes accipimus, numeri k, k_1, k_2, etc., omnes eodem modo crescent, usque dum maximus eorum unitatem superaverit, quo facto unitate minuendus est, et subito omnium minimus fit. Eadem mutatione repetita patet in universum obtineri λ numeros complexos $k+k_1\alpha+k_2\alpha^2+\ldots+k_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$, quorum normæ diversæ sint. Jam si vel omnium harum normarum nulla unitate minor existet, methodus nostra nos deficit, hunc autem defectum non methodo vicio dandum, sed rei ipsius natura necessarium esse, infra demonstrabitur. Si vero, quod fere semper evenire solet, talis norma unitate minor fit, habemus

$$N\left[\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} - \psi(\alpha)\right] < 1, \quad \text{ideoque} \quad N[\varphi(\alpha) - f(\alpha)\psi(\alpha)] < Nf(\alpha).$$

Posito $\varphi(\alpha) - f(\alpha)\psi(\alpha) = R(\alpha)$, patet factorem maximum communem numerorum $\varphi(\alpha)$ et $f(\alpha)$ eumdem esse numerorum $f(\alpha)$ et $R(\alpha)$; unde indagatio factoris communis eo reducta est, ut aliorum duorum numerorum, quorum normæ minores sunt, factor communis quærendus sit. Itaque, hac methodo repetita, nisi forte casus ille adversus evenit, quem supra commemoravimus, tandem ad duos numeros pervenimus, quorum alter factor alterius, ideoque hic ipse factor communis est quem quærimus; cujus norma si unitas est, numeri illi sunt inter se primi.

Facile hæc methodus ad factores primos numeri $p = m\lambda + 1$ indagandos applicari potest, siquidem p revera est productum $\lambda - 1$ factorum conjunctorum. Quem ad finem quæratur radix aliqua ξ congruentiæ

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

quæ si p in $\lambda - 1$ factores conjunctos diffindi potest, semper talis est, ut $\xi - \alpha$ et p factorem complexum communem habeant. Hic igitur, secundum methodum traditam inventus, erit factor simplex complexus numeri p. Supra vidimus pro certis numeris p et λ talem factorem communem numerorum $\xi - \alpha$ et p non adesse, quamvis norma numeri $\xi - \alpha$ per p divisibilis sit; porro si per methodum traditam numeri complexi normarum minorum quæruntur, patet eorum omnium normas per p divisibiles esse, quam ob rem nullo modo ad normam unitatem pervenire possumus; semper igitur factor communis ab unitate diversus inveniretur, etiam ubi talem factorem non adesse demonstravimus, nisi in omnibus iis calculis eveniret ut norma istius nu-

meri complexi fracti $k + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \ldots + k_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ minor unitate fieri non posset, qua conditione methodus nostra ad finem propositum perducere non potest.

Altera methodus minus quidem directa tamen multo faciliori negotio factores primo complexos numeri $p = m\lambda + 1$ præbet. In hac omnes congruentiæ

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

radices ξ, ξ^2, ξ^3, etc., in usum vocamus, quibus e canone arithmetico (Cl. Jacobi edito) depromptis, sive alio modo inventis, solutiones congruentiæ

$$a + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

quærimus, ex quovis systemate numerorum a, a_1, a_2, ..., $a_{\lambda-1}$, qui hunc congruentiæ satisfaciunt numerum complexum $f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ componimus, et ex omnibus iis numeris, quarum normæ per theorema supra demonstratum, § VII, factorem p habent, eam eligimus quæ simplicissima sit, et normam quam minimam habere videatur, quæ jam ipsa computanda est, ut appareat utrum revera ipsi numero p an multiplo ejus æquælis sit. Si eveniret hanc normam non esse ipsum p, sed ejus multiplum e numeris complexis quarum normæ per p divisibiles sunt alius quærendus et examinandus esset, et ita porro. Si vero horum numerorum complexorum nullus ipsam normam p habet, hic numerus primus p iis adnumerandus est, qui ex factoribus complexis conjunctis non sunt compositi.

§ X.

Antequam ipsos numerorum primorum realium factores primos complexos quos invenimus litteris consignamus pauca de iis præmittere convenit. Pro $\lambda = 5$, 7, 11, 13, 17 et 19, omnes numeros primos formæ $m\lambda + 1$ in primo mille contentos in $\lambda - 1$ factores dissolvimus: primus numerus λ, pro quo hoc genus factorum primorum non semper datur, est numerus $\lambda = 23$; inter octo enim numeros primos formæ $23m + 1$, qui minores sunt quam mille, tres sunt qui viginti duobus factoribus primis constant, reliquos autem quinque, qui quum formam quadraticam $4p = a^2 + 23b^2$ non patiantur, in viginti duo factores conjunctos dissolvi non possunt, in undecim factores primos complexos discerpere nobis contigit. Tales numeri eumdem characterem habere videntur ac numeri primi qui non sunt formæ $m\lambda + 1$, quos de hac nostra commentatione exclusimus, hi omnes habent minorem numerum factorum complexorum primorum, qui non tam radicum singularum æquationis $\alpha = 1$ quam periodorum functiones lineares sunt. Simili enim modo horum quinque numerorum primorum factores primi complexi, quos invenimus, periodos binarum radicum continent. Quibus præmissis ipsos factores inventos tradimus.

1. Si $\lambda = 5$, et α radix æquationis $\alpha^4 = 1$.

$11 = N(2 + \alpha)$

$31 = N(2 - \alpha)$

$41 = N(3 + 2\alpha + \alpha^2)$

$61 = N(3 - \alpha)$

$71 = N(3 - \alpha + \alpha^2)$

$101 = N(3 + \alpha - \alpha^2)$

$131 = N(3 + \alpha - \alpha^3)$

$151 = N(3 - 2\alpha - \alpha^2)$

$181 = N(4 + 3\alpha)$

$191 = N(4 - \alpha + 2\alpha^2)$

$211 = N(3 - 2\alpha)$

$241 = N(4 - \alpha + \alpha^2)$

$251 = N(5 - 2\alpha + \alpha^3)$

$271 = N(3 - 3\alpha - \alpha^2)$

$281 = N(4 - \alpha - \alpha^2)$

$311 = N(3 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3)$

$331 = N(4 - 2\alpha + \alpha^2)$

$401 = N(4 - 3\alpha - \alpha^3)$

$421 = N(5 + 2\alpha + 2\alpha^2)$

$431 = N(4 - 2\alpha - \alpha^3)$

$461 = N(4 - \alpha - \alpha^2)$

$491 = N(5 - 3\alpha + \alpha^2)$

$521 = N(5 + \alpha)$

$541 = N(3 - 3\alpha - \alpha^2)$

$571 = N(6 + 5\alpha + 3\alpha^2)$

$601 = N(5 + 2\alpha - \alpha^2)$

$631 = N(4 - 2\alpha - \alpha^3)$

$641 = N(5 + 3\alpha + 4\alpha^2)$

$661 = N(5 + \alpha - \alpha^2 + 3\alpha^3)$

$691 = N(3 - 3\alpha - 2\alpha^2)$

$701 = N(4 - \alpha - 2\alpha + \alpha^3)$

$751 = N(6 + 4\alpha + 3\alpha^2)$

$761 = N(5 - 2\alpha + \alpha^2)$

$811 = N(3 - 3\alpha - 2\alpha + \alpha^3)$

$821 = N(4 - \alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3)$

$881 = N(6 + 2\alpha + \alpha^2)$

$911 = N(5 + \alpha^2 - 2\alpha^3)$

$941 = N(4 + 3\alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3)$

$971 = N(5 - 2\alpha - \alpha^3)$

$991 = N(6 + \alpha + \alpha^3)$

2. Si $\lambda = 7$, et α est radix æquationis $\alpha^3 = 1$.

$29 = N(1 - \alpha - \alpha^2)$

$43 = N(2 + \alpha)$

$71 = N(2 - \alpha + \alpha^2)$

$113 = N(2 - \alpha + \alpha^3)$

$127 = N(2 - \alpha)$

$197 = N(3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$

$211 = N(3 + \alpha + 2\alpha^2)$

$239 = N(3 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3)$

$281 = N(2 - \alpha - 2\alpha^2)$

$337 = N(2 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$

$379 = N(3 + 2\alpha + \alpha^2)$

$421 = N(3 + \alpha + \alpha^2)$

$449 = N(2 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$

$463 = N(3 + 2\alpha)$

$491 = N(3 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3)$

$547 = N(3 + \alpha)$

$617 = N(2 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3)$

$631 = N(2 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha + \alpha^3)$

$659 = N(2 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3)$

$673 = N(4 + 3\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha^4)$

$701 = N(3 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4)$

$743 = N(3 + 2\alpha - \alpha - \alpha^2)$

$757 = N(3 + 2\alpha + \alpha^2)$

$827 = N(2 + 2\alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$

$883 = N(2 - \alpha - 2\alpha^2 - \alpha^3)$

$911 = N(3 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3)$

$953 = N(3 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$

$967 = N(2 + 2\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)$

(3) Si $\lambda = 11$, et α est radix æquationis $\alpha^{\lambda} = 1$.

$23 = N(1 + \alpha + \alpha^2)$

$67 = N(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^5)$

$89 = N(1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6)$

$199 = N(1 + \alpha - \alpha^2)$

$331 = N(1 - \alpha + \alpha^3 + \alpha^5)$

$353 = N(1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5)$

$397 = N(1 + \alpha + \alpha^6 - \alpha^7)$

$419 = N(1 + \alpha - \alpha^2 + \alpha^3)$

$463 = N(1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)$

$617 = N(2 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)$

$661 = N(1 + \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4)$

$683 = N(2 + \alpha)$

$727 = N(1 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)$

$859 = N(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5)$

$881 = N(1 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5 - \alpha^6)$

$947 = N(2 + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)$

$991 = N(2 + \alpha + \alpha^2)$

(4) Si $\lambda = 13$, et α est radix æquationis $\alpha^{\lambda} = 1$.

$53 = N(1 + \alpha + \alpha^3)$

$79 = N(1 - \alpha + \alpha^{10})$

$131 = N(1 - \alpha + \alpha^{11})$

$157 = N(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^5)$

$313 = N(1 - \alpha + \alpha^3 + \alpha^6)$

$443 = N(1 + \alpha - \alpha^3 + \alpha^8)$

$521 = N(1 - \alpha - \alpha^{12})$

$547 = N(1 - \alpha - \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)$

$599 = N(1 + \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4)$

$677 = N(1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4)$

$959 = N(1 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)$

$911 = N(1 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4)$

$937 = N(1 + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^8 - \alpha^{10})$

(5) Si $\lambda = 17$, et α est radix æquationis $\alpha^{\lambda} = 1$.

$103 = N(1 + \alpha^2 + \alpha^3)$

$137 = N(1 + \alpha - \alpha^3)$

$239 = N(1 + \alpha + \alpha^3)$

$307 = N(1 - \alpha + \alpha^4)$

$409 = N(1 - \alpha + \alpha^8)$

$443 = N(1 + \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4)$

$613 = N(1 + \alpha^2 - \alpha^3)$

$647 = N(1 + \alpha + \alpha^{11} + \alpha^{12})$

$919 = N(1 - \alpha - \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4)$

$953 = N(1 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$

(6) Si $\lambda = 19$, et α est radix æquationis $\alpha^{19} = 1$

$$191 = N(1 + \alpha + \alpha^{10}) \qquad 457 = N(1 + \alpha + \alpha^{7})$$

$$229 = N(1 + \alpha + \alpha^{8}) \qquad 571 = N(1 + \alpha + \alpha^{7} + \alpha + \alpha^{8})$$

$$419 = N(1 + \alpha + \alpha^{9}) \qquad 647 = N(1 + \alpha^{2} + \alpha^{9})$$

$$761 = N(1 + \alpha^{2} + \alpha^{9})$$

(7) Si $\lambda = 23$, et α est radix æquationis $\alpha^{23} = 1$.

$$599 = N(1 + \alpha^{11} + \alpha^{16}) \qquad 691 = N(1 + \alpha + \alpha^{5})$$

$$829 = N(1 + \alpha^{11} + \alpha^{20})$$

Reliqui numeri primi formæ $23m + 1$ infra mille undecim factoribus primis constant, habet

47	factorem	$\alpha^{10} + \alpha^{9} + \alpha^{8} + \alpha^{15} + \alpha + \alpha^{6}$
139		$\alpha^{10} + \alpha^{9} + \alpha^{8} + \alpha^{15} + \alpha^{4} + \alpha^{19}$
277		$2 + \alpha + \alpha^{22} + \alpha^{7} + \alpha^{10}$
461		$\alpha + \alpha^{22} + \alpha^{10} + \alpha^{13} + \alpha^{8} + \alpha^{15} + \alpha + \alpha^{6}$
967		$2 + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{4} + \alpha^{19}$.

§ XI.

Quæ de numeris complexis et de eorum factoribus primis commentati sumus ad doctrinam de sectione circuli felicissimo successu applicari possunt. In hac enim doctrina tales numeri complexi eorumque producta maximi momenti sunt, quorum vera indoles in luce clarissima ponitur si in factores primos diffinduntur.

Sit p numerus primus realis formæ $m\lambda + 1$, α radix imaginaria æquationis $\alpha^{\lambda} = 1$, g radix primitiva numeri primi p, et

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^{g} + \alpha^{2} x^{g^{2}} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}.$$

Totius fere doctrinæ de circuli sectione caput est formæ hujus (α, x) potestas exponentis λ, quæ a radice x non pendet, sed radicis α functio rationalis integra est, ideoque numerus complexus ejus generis quod supra tractavimus. Ipsa hæc formula (α, x), quam Cl. Lagrange primus adhibuit, proprietatibus insignibus gaudet, quarum maximas Cl. Jacobi primus invenit

$$(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x) = p,$$

$$\frac{(\alpha^{m}, x)(\alpha^{n}, x)}{(\alpha^{m+n}, x)} = \psi(\alpha) = A + A_1\alpha + A_2\alpha^{2} + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

numerus complexus $\psi(\alpha)$ ita semper comparatus est, ut sit

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p.$$

Inde positis

$$(\alpha, x)(\alpha, x) = \psi_1(\alpha)(\alpha^2, x),$$

$$(\alpha, x)(\alpha^2, x) = \psi_2(\alpha)(\alpha^3, x),$$

$$(\alpha, x)(\alpha^3, x) = \psi_3(\alpha)(\alpha^4, x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha, x)(\alpha^{\lambda-2}, x) = \psi_{\lambda-2}(\alpha)(\alpha^{\lambda-1}, x),$$

usque æquationibus inter se multiplicatis, adhibita formula

$$(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x) = p,$$

fit

$$(\alpha, x)^{\lambda} = p \cdot \psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\cdots\psi_{\lambda-1}(\alpha).$$

Numeri integri complexi, quibus hoc productum constat, $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$, etc., a se invicem ita pendent, ut quamvis non singuli, tamen productum omnium per unum eorum exprimi possit. Tali autem reductione non indigemus, si pro numeris complexis p, $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$, etc., qui compositi sunt, eorum factores primos adhibemus, quo facto repræsentatio formæ $(\alpha, x)^{\lambda}$ solos factores primos conjunctos numeri p continebit. Disquisitionem nostram ad tales numeros primos p restringentes, qui in $\lambda - 1$ factores complexos conjunctos diffindi possunt, habemus

$$p = f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\cdots f(\alpha^{\lambda-1});$$

etiam numeri complexi $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$, etc., alios factores primos habere non possunt nisi eos qui in p reperiuntur; est enim, pro quolibet numero r, $\psi_r(\alpha)\psi_r(\alpha^{-1}) = p$, et supra, § VI, demonstravimus numerum p, neglectis unitatibus complexis, quibus factores affecti esse possunt, pluribus modis diversis in $\lambda - 1$ factores primos dissolvi non posse. Quilibet igitur numerorum $\psi_r(\alpha)$ est productum alterius semissis factorum $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, etc., et unitas complexa, quæ factor accedere potest, si per $\varphi(\alpha)$ designatur, conditioni $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}) = 1$ satisfacere, ideoque secundum ea quæ § IV invenimus, simplex unitas $\pm\alpha^{\mu}$ esse debet. Inde loco factorum compositorum factoribus simplicibus substitutis, hanc formam habemus:

$$(\alpha, x)^{\lambda} = \pm\alpha^{\mu} f^{m_1}(\alpha) f^{m_2}(\alpha^2) f^{m_3}(\alpha^3)\cdots f^{m_{\lambda-1}}(\alpha^{\lambda-1}),$$

in qua m_1, m_2, m_3, etc., sunt exponentes integri positivi, quos jam determinaturi sumus. Primum adhibita formula simplici

$$(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x) = p = f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\cdots f(\alpha^{\lambda-1}),$$

sponte elucet esse

$$m_1 + m_{\lambda-1} = \lambda, \quad m_2 + m_{\lambda-2} = \lambda, \quad \text{etc.},$$

i. e. summam binorum exponentium, ab initio et a fine æque distantium, constantem esse et numero λ æqualem; unde sequitur ut omnes hi exponentes numero λ minores sint. Deinde per formulam generaliorem

$$\frac{(\alpha, x)(\alpha^r, x)}{(\alpha^{r+1}, x)} = \psi_r(\alpha),$$

fit

$$\frac{f^{m_1}(\alpha) f^{m_2}(\alpha^2) \ldots f^{m_{\lambda-1}}(\alpha^{\lambda-1}) \cdot f^{m_1}(\alpha^r) f^{m_2}(\alpha^{2r}) \ldots f^{m_{\lambda-1}}(\alpha^{r(\lambda-1)})}{f^{m_1}(\alpha^{r+1}) f^{m_2}(\alpha^{2r+2}) \ldots f^{m_{\lambda-1}}(\alpha^{(\lambda-1)(r+1)})} = [\psi_r(\alpha)]^\lambda,$$

et qua quotiens talium numerorum complexorum, quorum norma est numerus primus, non potest integer esse, nisi singuli factores denominatoris cum factoribus numeratoris compensantur, et quia hic quotiens potestati λ^{ta} numeri complexi æqualis est, singulis tribus potestatibus numeri primi $f(\alpha^k)$ in unam conjunctis, facile colligitur pro quolibet numero k esse debere

$$m_k + m_\mu - m_\nu \equiv 0, \quad \text{si } \mu \equiv \frac{k}{r}, \quad \nu \equiv \frac{k}{r+1} \quad (\text{mod. } \lambda);$$

inde, posito

$$k m_k \equiv n_k, \quad \text{sive } m_k \equiv \frac{n_k}{k} \quad (\text{mod. } \lambda),$$

fit

$$m_\mu \equiv \frac{n_\mu}{\mu} \equiv \frac{r n_\mu}{k} \quad \text{et } m_\nu \equiv \frac{n_\nu}{\nu} \equiv \frac{(r+1) n_\nu}{k} \quad (\text{mod. } \lambda),$$

iisque substitutis, congruentia

$$m_k + m_\mu - m_\nu \equiv 0$$

mutatur in

$$\frac{n_k}{k} + \frac{r . n_k}{k} - \frac{(r+1) n_\nu}{k} \equiv 0 \quad (\text{mod. } \lambda),$$

unde posito $k = 1$, habemus

$$n_1 + r n_\mu - (r+1) n_\nu \equiv 0, \quad \text{si } \mu \equiv \frac{1}{r} \quad \text{et } \nu \equiv \frac{1}{r+1} \quad (\text{mod. } \lambda).$$

Jam si primum facimus $r = 1$, fit n_1 æquale numero n cujus index congruus est $\frac{1}{2}$; deinde, posito $r = 2$, idem æqualis invenitur numero n cujus index congruus est $\frac{1}{3}$: tum, posito $r = 3$, etiam n cujus index $\frac{1}{4}$ illis æqualis invenitur, et ita porro; numeri autem fracti $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., omnibus numeris integris 1, 2, 3, etc., etsi alio ordine, congrui sunt, modulo λ; itaque numeri n pro omnibus indicibus diversis iidem sunt et indices omitti possunt, quo facto habemus

$$m_k \equiv \frac{n}{k} \quad (\text{mod. } \lambda),$$

quæ determinatio revera congruentiæ

$$m_\mu + m_{\mu'} - m_\nu \equiv 0,$$

pro quolibet valore numerorum k et r satisfacit. Inde habemus theorema insigne: *Si $f(\alpha)$ est factor primus complexus numeri p, cujus norma est ipse numerus p, est*

$$(C) \qquad (\alpha, x)^r = \pm \alpha^r f^{m_1}(\alpha) f^{m_2}(\alpha^2) f^{m_3}(\alpha^3) \ldots f^{m_{r-1}}(\alpha^{r-1}),$$

et exponentes m_1, m_2, m_3, etc., ita determinantur ut sint numeri minimi positivi, qui per exponentes potestatum radicis α, ad quos pertinent, multiplicati omnes eidem numero congrui fiant pro modulo λ. Numerus primus complexus $f(\alpha)$, alia radice imaginaria æquationis $\alpha^\lambda = 1$ accepta, etiam signo $f(\alpha^r)$ designari potest, in quo r est numerus integer arbitrarius, quem si ita eligimus ut sit $nr \equiv 1$ (mod. λ), exponentes m_1, m_2, m_3, etc., non jam per congruentiam $m_k \equiv \frac{n}{k}$, sed per hanc simpliciorem $m_k \equiv \frac{1}{k}$ (mod. λ) determinatur; præterea, quum omnes debeant esse minores quam λ, nihil amplius indeterminati relictum est nisi radix α, quæ ex omnibus æquationis $\alpha^r = 1$ radicibus imaginariis eligenda sit, et unitas simplex $\pm \alpha^r$ qua hoc productum multiplicatum sit. Inde formæ $(\alpha, x)^r$ repræsentatio, quæ sectionis circuli caput est, pro omnibus iis numeris p, qui in $\lambda - 1$ factores complexos conjunctos diffindi possunt, ad simplicitatem maximam perducta est. Omnes enim difficultates et calculi longiores eo revocati sunt, ut numeri $p = m\lambda + 1$ factores primi complexi inveniantur, quod methodorum supra traditarum ope facile perficitur. Quum numerus $f(\alpha)$, cujus norma est p, siquidem revera talis numerus datur, non plane determinatus sit, sed semper infinite multis modis diversis exhiberi possit, dubium inde oriri posset, quisnam omnium horum numerorum accipiendus sit, nisi productum illud hac virtute gauderet, ut pro omnibus iis diversis numeris semper idem sit. Facile hoc theorematum paragraphi quartæ auxilio demonstratur; nam si $f(\alpha)$ est aliquis numerorum quorum norma est p, ceteros omnes demonstravimus hac forma contineri $f(\alpha)\varphi(\alpha)$, in qua $\varphi(\alpha)$ est unitas complexa: inde, si $f(\alpha)\varphi(\alpha)$ loco $f(\alpha)$ in formula (C) substituitur, accedit factor

$$\varphi^{m_1}(\alpha)\varphi^{m_2}(\alpha^2)\varphi^{m_3}(\alpha^3)\ldots\varphi^{m_{r-1}}(\alpha^{r-1}) = \Phi(\alpha).$$

Hac unitate $\Phi(\alpha)$ cum reciproca $\Phi(\alpha^{-1})$ multiplicata, quia

$$m_1 + m_{\lambda-1} = \lambda, \quad m_2 + m_{\lambda-2} = \lambda, \quad \text{etc.},$$

fit

$$\Phi(\alpha)\Phi(\alpha^{-1}) = \left[\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)\varphi(\alpha^3)\ldots\varphi(\alpha^{r-1})\right]^r = 1;$$

unitas autem complexa, quæ per reciprocam suam multiplicata unitatem realem efficit, simplici unitati $\pm \alpha^s$ æqualis est; itaque quum sit $\Phi(\alpha) = \pm \alpha^s$ videmus solam mutationem levem quam, substitutis aliis numeris complexis $f(\alpha)$ æquationi $Nf(\alpha) = p$ sa-

tisfacientibus, formula C pati possit, eam esse, ut loco factoris α' alia quæcunque radix æquationis $\alpha'^{\lambda} = 1$ substituenda sit.

Ut methodi in hac paragrapho explicatæ indolem veram melius cognoscamus, ad eam respiciamus qua Cl. Gauss usus est in sectione septima disquisitionum arithmeticarum, § CCCLVIII, ubi casum $\lambda = 3$ ingeniosissime pertractavit. Hic totam rem eo reduxit ut numerus $4p$ in formam $t^2 + 27u^2$ redigatur, et quum eo pervenisset, problema ab omni parte absolutum esse censuit. Simili modo secundum methodum nostram numerus p in formam certam gradus $\lambda - 1$, totidemque indeterminatorum redigi debet, quo facto difficultates omnes sublatæ sunt. Quum enim norma sit forma certa gradus $\lambda - 1$ et $\lambda - 1$ indeterminatorum, talem factorem primum complexum numeri p invenire idem est, atque hunc numerum in formam dictam redigere. Si omnes numeri primi p formæ $m\lambda + 1$ in hanc formam redigi possent, sive, quod idem est, si in $\lambda - 1$ factores complexos conjunctos discerpi possent, totius doctrinæ de circuli sectione pars major confecta esset; quum vero non omnes numeri p repræsentationem per formam illam patiantur, restat ut etiam pro iis forma propria expressionis (α, α') inveniatur. Hæc autem res maximis difficultatibus obnoxia est, quæ ut superentur magno etiam virorum doctorum labore opus erit.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

SUR

LES SYSTÈMES DE FORCES ET LEURS MOMENTS.

PAR M. CHASLES.

1. Deux systèmes de forces, en nombre quelconque, sont dits *équivalents*, quand, par la composition et décomposition des forces, on peut ramener un système à l'autre; ou, en d'autres termes, quand toutes les forces de chacun des deux systèmes étant transportées parallèlement à elles-mêmes, en un même point, les forces des deux systèmes ont la même résultante, et donnent lieu, par ce déplacement, au même couple résultant.

Quand nous parlerons de deux systèmes de forces, sans dire qu'ils sont *équivalents*, ils seront tout à fait arbitraires l'un à l'égard de l'autre.

2. THÉORÈME I. *Quand on a deux systèmes de forces, si l'on multiplie chaque force du premier système par chaque force du second système et par le cosinus de l'angle des deux forces, la somme de tous ces produits aura la même valeur que la somme des produits semblablement faits à l'égard de deux autres systèmes, équivalents, respectivement, aux deux proposés.*

Soient $a, a', \ldots$ les forces du premier système, et $b, b', \ldots$ celles du second. Représentons par $\Sigma\, a\, b \cos(a, b)$ la somme de tous les produits dont chacun sera formé d'une force du premier système multipliée par une force du second et par le cosinus de l'angle des deux forces; soient de même $A, A', \ldots$ et $B, B', \ldots$ les forces de deux systèmes, *équivalents*, respectivement, aux deux premiers; et $\Sigma\, A\, B \cos(A, B)$ la somme des produits faits à l'égard de ces deux systèmes: il s'agit de

prouver que l'on a

$$(1) \qquad \Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma AB \cos(A, B).$$

Démonstration. Le premier membre contiendra une suite de termes où a sera facteur; ce seront $ab \cos(a, b)$, $ab' \cos(a, b')$,...: leur somme ne change pas de valeur quand on remplace les forces b, b',... par le système équivalent B, B',..., parce qu'elle exprime le produit de la force a par la somme des projections des forces b, b',... sur cette force, et que cette somme de projections reste la même quand on substitue les forces B, B',.. aux forces b, b',.... Ainsi la somme $\Sigma ab(\cos ab)$ reste la même quand on conserve les forces du premier système a, a',... et qu'on substitue à celles du second système b, b',... les forces équivalentes B, B',...; c'est-à-dire que

$$\Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma aB \cos(a, B).$$

Par la même raison,

$$\Sigma aB \cos(a, B) = \Sigma AB \cos(A, B).$$

Donc enfin

$$\Sigma ab \cos(a, b) = \Sigma AB \cos(A, B).$$

C. Q. F. D

3. Ce théorème est le fondement de plusieurs propositions générales sur les systèmes de forces et leurs moments. Il donne lieu aussi à quelques corollaires immédiats.

4. *Corollaire.* Supposons que toutes les forces a, a',... du premier système aient une résultante unique A, et que toutes les forces b, b',.. du second système aient aussi une résultante unique B; A et B peuvent être considérés comme deux systèmes équivalents, respectivement, aux deux proposés; on a donc

$$AB \cos(A, B) = \Sigma ab \cos(a, b).$$

Concevons que les forces b, b',... soient les mêmes, une à une, que les forces a, a',..., on aura

$$A^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma aa' \cos(a, a');$$

c'est-à-dire que :

Quand plusieurs forces ont une résultante, le carré de cette résultante est égal à la somme des carrés des forces, plus deux fois la somme des produits de ces forces multipliées deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

5. Théorème II. *Si l'on a deux systèmes de couples, et qu'on fasse le produit du moment de chaque couple du premier système par le moment de chaque couple du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux couples, la somme de tous ces produits conservera la même valeur, si l'on remplace ces deux systèmes de couples par deux autres qui leur soient équivalents, respectivement.*

Ainsi soient M, M',... les moments des couples du premier système; N, N',... ceux du second système; m, m',... et n, n',... les moments des deux autres systèmes de couples, équivalents respectivement aux deux premiers; on aura

$$\Sigma \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \Sigma mn \cos(m, n). \tag{2}$$

En effet pour composer des couples et les décomposer, on porte sur des perpendiculaires à leurs plans des segments proportionnels à leurs moments, et l'on considère ces segments comme des forces qu'on transforme en d'autres forces équivalentes; et à ces forces correspondent des couples équivalents aux premiers. Il résulte de là que l'équation (1), relative à des systèmes de forces, donne naturellement l'équation (2), relative à des systèmes de couples. Le théorème est donc démontré.

6. *Corollaire.* Un système de couples m, m',... se réduit toujours à un couple unique M. De même, le système n, n',... se réduira à un couple unique N, et l'on aura

$$\Sigma mn \cos(m, n) = \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Supposons que les deux systèmes m, m',... et n, n',... soient identiquement les mêmes, il vient

$$\mathrm{M}^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma mm' \cos(m, m').$$

7. Le *moment* d'une force, pris par rapport à un point fixe, est le

même que le moment du couple formé par cette force et une seconde force égale et contraire, menée par le point fixe; et les moments des forces se composent comme les couples. De même que deux systèmes de forces équivalents donnent lieu à deux systèmes de couples équivalents, ils donnent lieu à deux systèmes de moments équivalents. Le théorème général sur les couples s'applique donc aux moments des forces; c'est-à-dire que:

THÉORÈME III. *Étant donnés deux systèmes de forces quelconques, et étant pris les moments du premier système par rapport à un point fixe, et les moments du second système par rapport à un second point fixe, si l'on multiplie chaque moment du premier système par chaque moment du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux moments, la somme de tous ces produits conservera la même valeur, si l'on substitue aux deux systèmes de forces deux autres systèmes équivalents, dont on prendra les moments par rapport aux deux mêmes points fixes, respectivement.*

Ainsi soient m, m',... et n, n',... les moments des deux systèmes de forces, pris par rapport à deux points fixes quelconques, et M, M',... et N, N',... les moments des deux autres systèmes de forces équivalents, respectivement, aux deux premiers, ces moments étant pris par rapport aux deux mêmes points, respectivement; on aura

$$\Sigma mn \cos(m, n) = \Sigma \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

8. *Corollaire.* Toutes les forces du premier système peuvent être remplacées par deux seules forces dont l'une passe par le premier point fixe; le moment de la seconde sera équivalent aux moments de tout le système, c'est ce qu'on appelle le *moment résultant,* ou *moment principal* du système de forces. Il est égal à la somme des projections, sur son plan, de tous les moments des forces; son plan est celui sur lequel la somme des projections orthogonales de tous les moments a une valeur maximum.

De même les moments n, n',... ont un moment résultant N; et le théorème donne l'équation

$$\Sigma mn \cos(m, n) = \mathrm{MN} \cos(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Les deux systèmes de forces peuvent être identiques; on en conclut

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma mn \cos(m, n).$$

9. *Remarque.* D'après les expressions de la résultante d'un système de forces, et du couple résultant d'un système de couples, on voit que les deux équations

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma aa' \cos(a, a') = 0,$$
$$\Sigma m^2 + 2\Sigma mm' \cos(m, m') = 0$$

expriment les deux conditions d'équilibre d'un système de forces, données par M. Poinsot, et qu'elles remplacent complétement les six équations ordinaires [*].

En effet, ces deux équations comportent les six. Car soient a_x, a_y, a_z les composantes de la force a, parallèles à trois axes coordonnés rectangulaires; et ainsi des autres: la première équation devient évidemment

$$(a_x + a'_x + \ldots)^2 + (a_y + a'_y + \ldots)^2 + (a_z + a_z + \ldots)^2 = 0.$$

d'où

$$a_x + a'_x + \ldots = 0, \quad a_y + a'_y + \ldots = 0, \quad a_z + a'_z + \ldots = 0.$$

Et, semblablement, en remplaçant chaque moment m par ses projections m_x, m_y, m_z sur les trois plans coordonnés, la seconde équation devient

$$(m_x + m'_x + \ldots)^2 + (m_y + m'_y + \ldots)^2 + (m_z + m_z + \ldots)^2 = 0.$$

qui donne

$$m_x + m'_x + \ldots = 0, \quad m_y + m'_y + \ldots = 0, \quad m_z + m_z + \ldots = 0.$$

10. Théorème IV. *Étant donnés deux systèmes de forces, si l'on prend les moments des forces du premier système par rapport à un point fixe, et qu'on multiplie chaque moment par chaque force du second système et par le sinus de l'angle que cette force fait avec le plan*

[*] Ces deux équations se trouvent dans le Mémoire de M. Binet, sur la composition des forces et sur la composition des moments (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, année 1815).

du moment, la somme de ces produits conservera la même valeur, si l'on remplace les deux systèmes par deux autres équivalents, respectivement.

Soient a, a',... les forces du premier système; m, m',... leurs moments par rapport à un point fixe; et b, b',... les forces du second système. Soient A, A',... des forces formant un système équivalent au premier, M, M',... les moments de ces forces relatifs au même point fixe, et B, B',... des forces formant un système équivalent au second, je dis qu'on aura

$$\Sigma\, bm \sin(b, m) = \Sigma\, \mathrm{BM} \sin(\mathrm{B}, \mathrm{M}).$$

En effet, si par le point fixe on mène des droites représentant des forces μ, μ',..., μ_1, μ'_1,... proportionnelles aux moments m, m',... et M, M'..., et perpendiculaires à leurs plans, respectivement, ces forces formeront deux systèmes équivalents.

On aura donc, d'après le théorème II, l'équation

$$\Sigma\, b\mu \cos(b, \mu) = \Sigma\, \mathrm{B}\mu_1 \cos(\mathrm{B}, \mu_1).$$

Mais $\cos(b, \mu) = \sin(b, m)$; $\cos(\mathrm{B}, \mu_1) = \sin(\mathrm{B}, \mathrm{M})$; et μ, μ_1 sont proportionnels à m, M; cette équation donne donc celle qu'il s'agit de démontrer. Donc, etc.

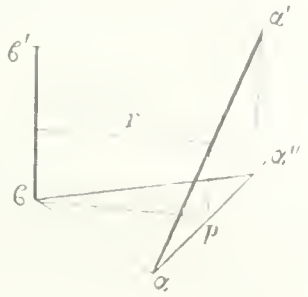
14. Le signe de chaque terme de la somme $\Sigma\, bm \sin(b, m)$ dépendra de l'angle que la force b fera avec l'axe du moment m; la direction de cet axe, d'un côté ou de l'autre, c'est-à-dire au-dessus ou au-dessous du plan de ce moment, dépend, comme on sait, de la direction de la force a à laquelle appartient ce moment. Si nous concevons que ce plan soit au-dessous de notre œil, la direction de l'axe sera au-dessus du plan, c'est-à-dire dirigée vers la partie supérieure du ciel, quand la force a tendra à tourner dans un sens convenu, et cet axe sera dirigé au-dessous du plan, c'est-à-dire vers la partie inférieure de la voûte céleste, quand la force tendra à tourner dans le sens contraire.

Mais on peut déterminer les signes des termes $bm \sin(b, m)$ d'une manière plus directe, sans introduire la considération des axes des moments, et d'après les directions des deux forces a et b qui servent à former ces termes. En effet, supposons l'axe du moment m au-dessus de son plan, le terme $bm \sin(b, m)$ aura le signe $+$ ou le

signe — suivant que la force b, que nous supposons avoir son point d'application sur le plan même du moment, sera au-dessus ou au-dessous. Dans le premier cas, un œil placé à l'extrémité de cette force et dirigé vers son point d'application, verra la force a tendre à tourner dans un sens; et, dans le second cas, tendre à tourner en sens contraire. Donc, le sens dans lequel l'œil, placé à l'extrémité de la force b et dirigé vers son point d'application, verra tourner la force a, servira à déterminer le signe du terme $bm \sin(b, m)$. Il est facile de s'assurer qu'il en est de même, quand l'axe du moment m est situé au-dessous de son plan. Nous dirons donc, en général, qu'*on donnera le signe + ou le signe — à chaque terme* $bm \sin(b, m)$, *suivant que la force* a, *vue de l'extrémité de la force* b, *tendra à tourner dans un sens convenu, ou dans l'autre sens.*

12. Lemme I. *Le volume du tétraèdre qui a pour arêtes opposées les deux droites* a, b *dont la plus courte distance est* r, *a pour expression* $\frac{a.b.r \sin(a, b)}{6}$.

En effet, on ne change pas le volume d'un tétraèdre quand on fait



glisser une arête dans sa propre direction. D'après cela, soient $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ les deux arêtes opposées du tétraèdre. Par le point α menons un plan perpendiculaire à l'arête $\beta\beta'$: et supposons que l'origine β de celle-ci soit dans ce plan. Soient $\alpha\alpha''$ la projection de l'arête $\alpha\alpha'$ sur ce plan, et βp la perpendiculaire abaissée du point β sur la droite $\alpha\alpha''$. Cette perpendiculaire est égale à la plus courte distance des deux droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. Le tétraèdre construit sur les deux arêtes opposées $\beta\beta'$, $\alpha\alpha'$ est équivalent au tétraèdre construit sur $\beta\beta'$ et $\alpha\alpha''$, parce que ces deux

tétraèdres ont trois sommets communs β', β, α, et que les quatrièmes sommets α', α'' sont sur une parallèle au plan de ces trois premiers. Or le tétraèdre $(\beta'\beta, \alpha\alpha'')$ a son volume égal à

$$\text{aire } \beta\alpha\alpha'' \times \tfrac{1}{3}\beta\beta' = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha''\beta p \times \tfrac{1}{3}\beta\beta' = \tfrac{1}{6}\alpha\alpha''.r.\beta\beta'$$
$$= \tfrac{1}{6}\alpha\alpha'\cos\alpha'\alpha\alpha'' \times r.\beta\beta' = \tfrac{1}{6}\alpha\alpha'.\beta\beta'.r\sin(\alpha\alpha', \beta\beta').$$

Ce volume est aussi celui du tétraèdre construit sur les deux arêtes opposées $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. Le théorème est donc démontré.

15. Lemme 2. *Le tétraèdre construit sur deux forces, prises pour arêtes opposées, a son volume égal au produit d'une des forces, par le moment de l'autre force relatif à la première, ce produit étant divisé par* 6.

En effet, le tétraèdre construit sur les deux forces $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ a pour volume $\frac{\alpha\alpha'.\beta\beta'.r\sin(\alpha\alpha', \beta\beta')}{6}$. Or le moment de la force $\alpha\alpha'$ *par rapport à la force* $\beta\beta'$ est le moment de la composante de cette force comprise dans un plan perpendiculaire à $\beta\beta'$, pris par rapport au point où ce plan rencontre la droite $\beta\beta'$. C'est donc

$$\alpha\alpha'.\beta p = \alpha\alpha'.r = \alpha\alpha'\cos\alpha'\alpha\alpha'.r = \alpha\alpha'.r\sin(\alpha\alpha', \beta\beta').$$

Le volume du tétraèdre est donc

$$\frac{\beta\beta' \times \text{moment de la force } \alpha\alpha'}{6}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Le moment de la force $\alpha\alpha'$ par rapport à la force $\beta\beta'$ est $\alpha\alpha'.\beta p$; c'est le double de l'aire du triangle $\alpha\beta\alpha''$. Ce triangle est la projection d'un triangle qui aurait pour base la force $\alpha\alpha'$ et son sommet en un point de la force $\beta\beta'$. Le double de l'aire de ce triangle est le moment de la force $\alpha\alpha'$ par rapport à un point de $\beta\beta'$. On peut donc dire que : *Le moment d'une force par rapport à une droite est la projection du moment de la force par rapport à un point de la droite, la projection étant faite sur un plan perpendiculaire à la droite.*

16. Théorème V. *Étant donnés deux systèmes de forces, si sur chaque force du premier système et chaque force du second système, regardées comme arêtes opposées, on construit un tétraèdre, la somme des volumes de tous ces tétraèdres aura la même valeur que la somme*

semblable faite à l'égard de deux autres systèmes de forces équivalents aux deux premiers, respectivement.

Ainsi soient $a, a', \ldots$ et $b, b', \ldots$ les deux systèmes proposés, et A, A',... et B, B',... les deux systèmes équivalents, respectivement, à ces deux-là ; on aura

$$\Sigma \text{ tétr. } (a, b) = \Sigma \text{ tétr. } (A, B).$$

Dans ces sommes, chaque tétraèdre aura le signe + quand l'une des deux forces, vue de l'extrémité de l'autre force, paraîtra tourner dans un sens convenu, et le signe — quand cette force paraîtra tourner dans le sens contraire.

Démonstration. Dans la somme Σ tétr. (a, b), chaque force a donne lieu à une suite de termes tels que $a \times$ (moment de la force b par rapport à a), et dont la somme est

$$a.\Sigma \text{ (des moments des forces } b, b', \ldots \text{ par rapport à } a).$$

Or la somme des moments des forces $b, b', \ldots$ par rapport à la force a est égale à la somme des moments des forces B, B',... qui forment un système équivalent. On peut donc remplacer

$a\Sigma$ (moments des forces $b, b', \ldots$) par $a\Sigma$ (moments des forces B, B',...).

Il en résulte que

$$\Sigma \text{ tétr. } (a, b) = \Sigma \text{ tétr. } (a, B).$$

Par la même raison, on a

$$\Sigma \text{ tétr. } (a, B) = \Sigma \text{ tétr. } (A, B).$$

On a donc enfin

$$\Sigma \text{ tétr. } (a, b) = \Sigma \text{ tétr. } (A, B).$$

C. Q. F. D.

Quant aux signes des termes tétr. (a, b), la démonstration indique comment il faut les prendre. Car dans la somme des moments de plusieurs forces par rapport à une droite, on donne le signe + aux moments des forces qui, pour un œil placé à l'extrémité de cette droite, tendront à tourner dans un sens convenu, et le signe — aux moments des forces qui tendront à tourner dans l'autre sens.

15. *Corollaire.* Supposons que les forces $b, b', \ldots$ soient identique-

ment les mêmes que les forces $a, a', \ldots$, respectivement; et que A, A'.... et B, B'.. soient aussi deux systèmes identiques: on en conclura que

Étant donnés deux systèmes de forces équivalentes, la somme des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux comme arêtes opposées, est égale à la somme des tétraèdres construits sur les forces du second système, prises aussi deux à deux comme arêtes opposées.

Ce que nous disons de deux systèmes équivalents s'entend, évidemment, des deux systèmes qui se font équilibre.

16. Il suit de là que :

De quelque manière qu'on remplace par deux seules forces un système de forces en nombre quelconque, le tétraèdre construit sur ces deux forces a toujours le même volume.

17. Ce volume sera nul si les deux forces sont situées dans un même plan, auquel cas elles formeront un couple ou se réduiront à une seule force. Donc :

La condition géométrique pour qu'un système de forces ait une résultante unique ou se réduise à un couple, est que la somme des volumes des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux, comme arêtes opposées, soit nulle.

18. Quand les forces se font équilibre, si on les divise en deux groupes, les forces du premier groupe font équilibre aux forces du second. Donc, d'après une remarque ci-dessus, n° **15**, on peut dire que :

Quand des forces se font équilibre, la somme des volumes des tétraèdres construits sur plusieurs de ces forces, prises deux à deux comme arêtes opposées, est égale à la somme des volumes des tétraèdres construits sur les autres forces, prises deux à deux comme arêtes opposées.

19. Ainsi *Quand quatre forces se font équilibre, le volume du tétraèdre construit sur deux quelconques d'entre elles est égal au volume du tétraèdre construit sur les deux autres.*

Il est aisé de voir que quatre forces qui se font équilibre sont tou-

jours dirigées suivant les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe; ou, en d'autres termes, que toute droite qui s'appuie sur trois d'entre elles, s'appuie nécessairement sur la quatrième [*].

20. Théorème VI. *Quand deux systèmes de forces équivalents sont appliqués à un même corps solide, si l'on imprime au corps un mouvement infiniment petit, et qu'on fasse le produit de chaque force par le déplacement de son point d'application dans le sens de cette force, la somme des produits relatifs aux forces du premier système sera égale à la somme des produits relatifs aux forces du second système.*

Soit mm' le déplacement du point d'application de la force a, $a.mm'.\cos(a, mm')$ sera le terme relatif à cette force dans la somme $\Sigma\, a.mm'.\cos(a, mm')$. Il s'agit de prouver que cette somme conserve la même valeur numérique quand on remplace les forces a, a'.... par un autre système de forces équivalent.

Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide libre peut être considéré comme produit par deux mouvements simultanés, l'un de rotation autour d'une certaine droite, et l'autre de translation. Soient $m\mu$, $m\mu'$ les deux composantes du mouvement du point m: $m\mu$ est due à la rotation du corps et a une valeur différente pour chaque point, et $m\mu'$ est due à la translation et est la même pour tous les points du corps. La somme des projections des deux éléments $m\mu$, $m\mu'$ sur la force a est égale à la projection de mm'. On a donc

$$mm'\cos(a, mm') = m\mu\cos(a, m\mu) + m\mu'\cos(a, m\mu')$$

On a donc

$$\Sigma\, a.mm'.\cos(a, mm') = \Sigma\, a.m\mu.\cos(a, m\mu) + m\mu'\,\Sigma\, a.\cos(a, m\mu').$$

Nous faisons sortir $m\mu'$ du signe Σ parce que le mouvement de translation $m\mu'$ est commun à tous les points du corps. Le terme $\Sigma a.\cos(a, m\mu')$ exprime la somme des projections de toutes les forces a, a'.... sur la droite $m\mu'$. Cette somme sera la même pour un autre système de forces

[*] Quatre forces qui se font équilibre donnent lieu à diverses autres propriétés qui seront le sujet d'un autre article.

équivalent. Il suffit donc de prouver que le terme $\Sigma a.m\mu \cos(a, m\mu)$ conserve aussi la même valeur.

$m\mu$ est le déplacement du point m dû à une rotation autour d'une certaine droite. Soient r la perpendiculaire abaissée du point m sur cette droite, et θ la rotation; on a $m\mu = r\theta$. Concevons qu'une force représentée en grandeur par θ s'exerce suivant la droite autour de laquelle a lieu la rotation, $r\theta$ sera le moment de cette force par rapport au point m; le terme $a.m\mu.\cos(a, m\mu)$ est donc égal à

$$a \times (\text{moment de la force } \theta \text{ relatif au point } m) \times \cos(a, m\mu),$$

ou

$$a \times (\text{projection du moment de la force } \theta \text{ sur un plan perpendiculaire à } a).$$

Mais cette projection est le moment de la force θ par rapport à la droite a (Lemme 2, *Remarque*). On a donc

$$a \times (\text{moment de la force } \theta \text{ par rapport à } a), \quad \text{ou} \quad 6 \text{ tétr.}(a, \theta).$$

On a donc

$$\Sigma a.m\mu \cos(a, m\mu) = 6\Sigma \text{ tétr.}(a, \theta).$$

Or la somme des tétraèdres construits sur la force θ et chacune des forces $a, a', \ldots$ reste la même quand on remplace ces forces par d'autres équivalentes. Le théorème est donc démontré.

21. *Observation.* On peut encore dire que

$$a.(\text{moment de la force } \theta \text{ par rapport à } a) =$$
$$\theta.(\text{moment de la force } a \text{ par rapport à } \theta),$$

ce qui se voit par le lemme 2.

Et comme la somme des moments des forces $a, a', \ldots$ par rapport à une droite θ reste constante, pour tout autre système de forces équivalent, on en conclut le théorème énoncé.

22. *Principe des vitesses virtuelles.* — Si les forces $a, a', \ldots$ se font équilibre, on peut les remplacer par deux forces égales et directement opposées; d'où l'on conclut que la somme $\Sigma a.mm' \cos(a, mm')$ est nulle. Ce qui est l'équation des vitesses virtuelles.

NOTE

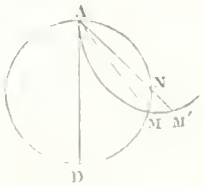
SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DU CERCLE;

PAR M. A. RISPAL,
Élève de l'École Normale.

Dans le tome IX de ce Journal, page 116, M. O. Bonnet a obtenu une propriété mécanique nouvelle de la lemniscate hyperbolique, en résolvant le problème suivant : « Trouver une courbe AMM', telle » que les arcs AM soient parcourus dans le même temps que les cordes » correspondantes par des mobiles partant du point A sans vitesse » initiale et soumis à l'action d'une force dirigée vers un centre » fixe et proportionnelle à la distance. » Il démontre, en effet, que la courbe demandée est une lemniscate hyperbolique, ce qu'on ne savait auparavant que pour le cas particulier où le centre d'action est situé à l'infini, c'est-à-dire pour le cas d'une force constante en grandeur et en direction, dont M. Serret s'était occupé dans le même volume, page 28, en rappelant un Mémoire antérieur de N. Fuss [*]. La méthode de Fuss est géométrique et rattache la propriété citée de la lemniscate à une propriété du cercle. Nous allons d'abord montrer que cette méthode peut être étendue au cas général traité par M. Bonnet; nous donnerons ensuite, et ce sera l'objet principal de cette Note, quelques développements sur la propriété du cercle qui lui sert de base.

[*] M. Serret nous a fait observer que le titre qu'il a donné à sa Note : *Sur une propriété de la lemniscate découverte par N. Fuss*, renferme une inexactitude. Et, en effet, on peut voir au tome IX des *Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg* (c'est le volume pour 1819-1820, la date 1824 que M. Serret cite est celle de la publication), que Fuss, en démontrant cette propriété, ne s'en attribue pas l'invention; il dit qu'elle a été trouvée par le géomètre italien Saladini.

Par le point M quelconque de la courbe cherchée AMM′ et par le point donné A, traçons un cercle dont le diamètre AD soit situé sur



la droite qui va du point A au centre d'attraction et qui est évidemment la première tangente de la courbe AMM′. Considérons dans cette courbe AMM′ deux cordes infiniment voisines AM, AM′ dont la première lui est commune avec le cercle AMD et dont la seconde coupe ce cercle en N. D'après la définition de la courbe, les arcs AM et AM′ doivent être parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes; or, par une propriété connue du cercle, les deux cordes AM et AN sont parcourues dans le même temps si le mobile, parti de A sans vitesse initiale, est soumis à l'action de la pesanteur ou d'une force proportionnelle à la distance et émanant d'un centre situé sur AD.

Donc les deux lignes MM′ et NM′ sont parcourues dans le même temps : or les vitesses en M et en N ne diffèrent que d'un infiniment petit, et ces deux espaces MM′, NM′ sont assez petits pour qu'on puisse supposer que la vitesse y reste constante; donc MM′ = NM′. Ainsi le triangle infinitésimal NM′M est isocèle; mais l'angle MNM′, qui a pour mesure la moitié de l'arc AN, est le complément de l'angle DAN = θ.

Donc l'angle M′ = 2θ, et l'équation différentielle de la courbe est, par suite,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} 2\theta.$$

C'est précisément l'équation différentielle d'une lemniscate hyperbolique dont l'axe focal fait avec AD un angle de 45 degrés.

Nous nous proposons à présent de trouver quelles sont toutes les lois d'attraction vers le centre fixe qui laissent subsister la propriété du cercle (ou si l'on veut des cordes du cercle) sur laquelle est fondée la démonstration précédente. Nous allons en premier lieu faire cette recherche d'une façon géométrique, puis nous indiquerons l'analyse qui nous a guidé.

Soit O le centre d'attraction, et soient différents cercles AD, AD_1, AD_2,... passant tous en A et ayant leurs centres sur AO.

Considérons deux cordes AB, AC.

D'après l'énoncé de la question, les lignes AB, AC; AB_1, AC_1, AB_2, AC_2,... sont parcourues dans le même temps; donc aussi les segments AB, AC; BB_1, CC_1; B_1B_2, C_1C_2,... sont parcourus en temps égaux.

Il en résulte qu'en supposant les segments B_1B_2, C_1C_2, par exemple, infiniment petits, les vitesses v, v' aux points correspondants B_1, C_1 sont proportionnelles à ces segments, ou bien (d'après une propriété des figures semblables) aux cordes $A\beta$, $A\gamma$ que l'on obtient en décrivant le cercle qui passe en O, ou bien encore aux portions $B_1\beta$, $C_1\gamma$, qui restent à parcourir pour arriver en β et en γ.

En effet, les deux espaces B_1B_2, C_1C_2 étant infiniment petits, on peut supposer que les vitesses restent constantes pendant le temps dt employé à les parcourir. On peut donc écrire

$$B_1B_2 = vt, \quad C_1C_2 = v't;$$

d'où

$$\frac{v}{v'} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{A\beta}{A\gamma} = \frac{B_1\beta}{C_1\gamma}.$$

Ainsi en B_1 et C_1, et de même en B_2 et C_2,..., les vitesses sont proportionnelles aux espaces qui restent à parcourir; donc aussi les forces sont proportionnelles à ces espaces: car puisqu'en deux points correspondants on a toujours

$$v = mv',$$

on aura aussi

$$\frac{dv}{dt} = m\frac{dv'}{dt}.$$

Ainsi les choses se passent comme si les deux mobiles étaient attirés vers les points β et γ par des forces proportionnelles à la distance.

Si donc on désigne par R et R_1 les forces en B_1 et C_1 émanées du point O, et par r, r_1 les rayons vecteurs correspondants, on aura

$$\frac{R\cos\widehat{OB_1\beta}}{R_1\cos\widehat{OC_1\gamma}} = \frac{r\cos\widehat{OB_1\beta}}{r_1\cos\widehat{OC_1\gamma}};$$

donc

$$\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1},$$

ce qui montre que l'attraction émanée du point O doit s'exercer proportionnellement à la distance pour que les cercles jouissent de la propriété énoncée.

Si l'on considère le cercle passant en O, les points arriveront en β et en γ avec la vitesse maximum; si le cercle est au-dessous de O, la vitesse décroîtra après le passage du mobile au point γ, et il se fera autour du centre O de petites oscillations. Enfin, si le centre du cercle est en O, le mobile arrivera au bas de la corde avec une vitesse nulle: puis il remontera jusqu'en A, puis reviendra, et continuera ainsi d'osciller indéfiniment, et toujours dans des temps égaux, autour du centre d'attraction. Si le centre du cercle descendait au-dessous du point O, il y aurait encore des oscillations; mais on voit aisément que les mobiles ne pourraient parcourir les cordes dans toute leur étendue, puisque leurs vitesses seraient éteintes avant qu'ils ne fussent arrivés à l'extrémité de ces cordes.

Passons maintenant à la démonstration analytique du même théorème.

Soient h la distance du point A au centre d'attraction, ω l'angle d'une corde avec la verticale, s la longueur d'une corde, r le rayon vecteur correspondant, et R la force. Le temps de la descente a pour expression

$$t = \int_0^{s} \frac{ds}{\sqrt{K - 2\int R\,dr}},$$

où K est une constante, et à laquelle il faut joindre l'équation

$$(2) \qquad r^2 - h^2 = s^2 - 2hs\cos\omega.$$

Il faut dans l'intégrale remplacer r par sa valeur en fonction de ω, puis exprimer que celle-ci est indépendante de ω; de plus, comme les extrémités des cordes se trouvent sur les mêmes cercles, s est une fonction de l'angle ω exprimée par l'équation

$$s = a\cos\omega,$$

dans laquelle a, qui représente le diamètre du cercle correspondant, doit rester constante.

Les deux équations précédentes deviennent ainsi

$$(3) \qquad t = \int_0^a \frac{da.\cos\omega}{\sqrt{K - 2\int R\,dr}},$$

$$(4) \qquad r^2 - h^2 = (a^2 - 2ah)\cos^2\omega.$$

L'équation (4), différentiée par rapport à ω, en y laissant a constante, donne

$$r\,dr = -(a^2 - 2ah)\cos\omega\sin\omega\,d\omega,$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad \frac{r\,dr}{h^2 - r^2} = \operatorname{tang}\omega\,d\omega.$$

L'équation (3) doit aussi être différentiée par rapport à ω, puis sa différentielle doit être égalée à zéro, ce qui donne, en ayant égard à l'équation (5),

$$\int_0^a \frac{r(K - 2\int R\,dr) + (r^2 - h^2)R}{(r^2 - h^2)(K - 2\int R\,dr)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,da\cos\omega = 0,$$

et, comme cette intégrale doit être toujours nulle, indépendamment de ω et quelle que soit la limite a, il faut égaler l'élément à zéro.

Donc

$$rK - 2r\int R\,dr + (r^2 - h^2)R = 0,$$

d'où l'on déduit

$$K\,dr - 2dr\int R\,dr + (r^2 - h^2)\,dR = 0;$$

puis, si l'on multiplie la première par dr, la seconde par r, et si l'on retranche, il vient

$$R\,dr - r\,dR = 0,$$

d'où

$$R = cr.$$

Ainsi l'attraction est proportionnelle à la distance.

On trouve aisément pour le temps de la descente

$$t = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a-h}{h}\right),$$

quantité qui n'a une valeur réelle qu'autant que a est moindre que le double de h; car autrement le sinus serait plus grand que l'unité.

Dans le cas où $a = 2h$, on a, comme nous l'avons vu précédemment, une suite indéfinie d'oscillations; la durée de chacune d'elles est égale à $\frac{\pi}{2\sqrt{c}}$.

SUR QUELQUES FORMULES DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. A. CAYLEY.

Soit $x + y\sqrt{-1}$ ou $x + iy$ une quantité imaginaire quelconque; faisons

$$(1)\qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

ρ étant une quantité positive, et θ un arc compris entre les limites $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$. Cela posé, écrivons

$$(2)\qquad \begin{cases} (x + iy)^m = \rho^m e^{im\theta} & (x \text{ positif}), \\ (x + iy)^m = \rho^m e^{im(\theta \pm \pi)} & (x \text{ négatif}); \end{cases}$$

(Dans la seconde de ces formules, il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que y est positif ou négatif.) Au cas de x positif, la valeur du second membre sera ce que M. Cauchy a appelé *valeur principale* de $(x + iy)^m$. Au cas de x négatif, on peut aussi, à ce qu'il me semble, nommer cette valeur *valeur principale*. Cela paraît contraire à la théorie de M. Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, tome I, page 2); mais la démonstration que l'on y trouve de l'impossibilité d'une valeur principale pour x négatif ne s'applique qu'au cas où l'on suppose que le signe $\pm$ est toujours le même sans avoir égard au signe de y. Seulement, selon nos définitions, il importe de remarquer qu'il n'y a pas de valeur principale pour x négatif, au cas particulier où $y = 0$; ou plutôt dans ce cas, et dans ce cas seulement, la valeur principale devient indéterminée.

Soit, en particulier, $x = 0$; les deux formules conduisent au même résultat, savoir

$$(3)\qquad (iy)^m = (\pm y)^m e^{\pm\frac{m\pi i}{2}}.$$

le signe comme auparavant. Car en considérant x comme infiniment petit positif, on obtient

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2},$$

et, en considérant x comme infiniment petit négatif,

$$\theta = \mp \frac{\pi}{2},$$

et de là

$$\theta \pm \pi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi cette formule est toujours vraie, sans qu'il soit nécessaire de considérer iy comme limite de $x + iy$, x positif ou x négatif.

Remarquons encore que cette fonction $(iy)^m$ reste continue quand y passe par zéro, ce qui a lieu aussi pour $(x + iy)^m$, x positif, mais non pas pour $(x + iy)^m$, x négatif.

Les mêmes remarques s'appliquent aux valeurs principales des logarithmes, lesquelles doivent se définir d'une manière analogue par les équations

$$(4)\quad \begin{cases} \log(x + iy) = \log\rho + i\theta & (x \text{ positif}), \\ \log(x + iy) = \log\rho + i(\theta \pm \pi) & (x \text{ négatif}), \end{cases}$$

le signe ambigu, comme auparavant.

On démontre sans difficulté que ces valeurs principales satisfont en tout cas aux équations

$$(5)\quad \begin{cases} (x + iy)^m (x' + iy')^m = [(x + iy)(x' + iy')]^m, \\ \log(x + iy)\log(x' + iy') = \log[(x + iy)(x' + iy')]. \end{cases}$$

Seulement ces équations deviennent indéterminées au cas où l'une des quantités x, x', $xx' - yy'$ étant négative, la quantité correspondante y, y', $xy' + x'y$ s'évanouit.

Au moyen de cette définition de la valeur principale d'un logarithme, on obtient

$$(6)\quad \int_\beta^\alpha \frac{dx}{A + Bx} = \log\left(\frac{A + B\alpha}{A + B\beta}\right),$$

où α, β sont réels, et A, B sont assujettis à la seule condition qu'au

cas où α, β seraient de signes contraires, la partie imaginaire de $\frac{A}{B}$ ne s'évanouisse pas. En effet, dans ce cas, l'intégrale et la valeur principale du logarithme deviennent toutes les deux indéterminées. Sans doute il y a une valeur que l'on peut appeler *principale* de l'intégrale; mais cette valeur n'est égale à *aucun* des logarithmes de $\frac{A+Bx}{A+B\xi}$, et les notions des valeurs principales d'une intégrale et d'un logarithme n'ont pas de rapport ensemble. Ce résultat s'accorde avec celui que j'ai trouvé dans mon Mémoire *sur les fonctions doublement périodiques*.

Je passe à quelques autres applications de ces principes, qui ont rapport à la théorie des fonctions Γ. Soit d'abord r un nombre positif plus petit que l'unité, et écrivons

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix}\, dx;$$

on obtient

$$U = \int_0^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix}\, dx + \int_0^{\infty} (-ix)^{r-1} e^{-ix}\, dx,$$

ou enfin, puisque x est positif dans ces deux intégrales,

$$U = e^{(r-1)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{ix}\, dx + e^{-(r-1)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-ix}\, dx;$$

au moyen de la formule connue,

$$\int_0^{\infty} x^{r-1} e^{\pm ix}\, dx = e^{\pm\frac{r\pi i}{2}}\, \Gamma r,$$

on en conclut

$$U = 2\cos\left(r - \frac{1}{2}\right)\pi \,.\, \Gamma r = 2\sin r\pi \,.\, \Gamma r,$$

savoir

$$\sin r\pi \,.\, \Gamma r = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix}\, dx.$$

On obtiendrait de même

$$0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^{r-1} e^{ix}\, dx.$$

Au premier coup d'œil, ces équations pourraient paraître en contradiction l'une avec l'autre : mais cela n'est pas ainsi, parce qu'il n'est pas vrai que $(-ix)^{r-1}$ soit égal à $(-1)^{r-1}(ix)^{r-1}$, $(-1)^{r-1}$ étant facteur invariable ; mais au contraire $(-ix)^{r-1} = e^{\mp(r-1)\pi i}(ix)^{r-1}$, selon que x est positif ou négatif.

Dans la première de ces équations, on peut remplacer ix par $c+ix$, et dans la seconde, $-ix$ par $c-ix$, c étant positif ; mais cela n'est pas permis pour c négatif, à cause de la discontinuité de valeur de $(c+ix)^{r-1}$ ou $(c-ix)^{r-1}$ dans ce cas, quand x passe par zéro. En multipliant la première équation par e^{-c}, et différentiant un nombre quelconque de fois, en admettant, pour les valeurs négatives de r, l'équation

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma r,$$

la formule ne change pas de forme, et l'on obtient

$$(7) \qquad \sin r\pi\,\Gamma r\,e^{-c} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(c+ix)^{r-1}e^{ix}\,dx;$$

et de même, au moyen de la seconde équation,

$$(8) \qquad 0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(c-ix)^{r-1}e^{ix}\,dx,$$

dans lesquelles formules c est positif, et r est un nombre quelconque entre 1, $-\infty$, sans exclure la limite supérieure ; seulement, pour $r=0$, le facteur $\sin r\pi\,\Gamma r$ se réduit à π. Au cas où r est plus grand que zéro, on peut, si l'on veut, écrire aussi $c=0$. Dans tous les cas, on peut remplacer $\sin r\pi\,\Gamma r$ par $\frac{\pi}{\Gamma(1-r)}$. Il importe de remarquer que ces mêmes intégrales sont absolument inexprimables au cas où c est négatif : en effet, en écrivant $-c$ au lieu de c (c positif), on obtiendrait

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-c+ix)^{r-1}e^{ix}\,dx$$
$$= e^{(r-1)\pi i}\int_{0}^{\infty}(c-ix)^{r-1}e^{ix}\,dx + e^{-(r-1)\pi i}\int_{-\infty}^{0}(c-ix)^{r-1}e^{ix}\,dx.$$

Mais, par la seconde des équations dont il s'agit,

$$0 = \int_{0}^{\infty}(c-ix)^{r-1}e^{ix}\,dx + \int_{-\infty}^{0}(c-ix)^{r-1}e^{ix}\,dx;$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (c+ix)^{r-1} e^{ix}\, dx = -2i \sin r\pi \int_{0}^{+\infty} (c-ix)^{r-1} e^{ix}\, dx.$$

Or l'intégrale au second membre ne peut pas s'exprimer par les transcendantes connues, à moins que r ne soit entier. Écrivons encore c étant toujours positif,

$$(9)\quad \begin{cases} I = \int_0^{+\infty} (c+ix)^{r-1} e^{ix}\, dx, \\ I_1 = \int_0^{+\infty} (c-ix)^{r-1} e^{ix}\, dx, \\ I_2 = \int_0^{+\infty} (c+ix)^{r-1} e^{-ix}\, dx, \\ I_3 = \int_0^{+\infty} (c-ix)^{r-1} e^{-ix}\, dx. \end{cases}$$

Toutes les fonctions

$$\int (\pm c \pm ix)^{r-1} e^{\pm ix}\, dx,$$

entre les limites $0, \infty$, ou $-\infty, 0$, ou $-\infty, \infty$, s'expriment facilement au moyen de I, I_1, I_2, I_3. Mais ces quatre fonctions ne sont pas connues; seulement, au moyen des équations qui viennent d'être trouvées, on obtient

$$(10)\quad \begin{cases} 2 \sin r\pi\, \Gamma r e^{-c} = I + I_3, \\ 0 = I_1 + I_2. \end{cases}$$

On déduit encore de ces mêmes formules :

$$(11)\quad \begin{cases} \sin r\pi\, \Gamma r e^{-c} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (c+ix)^{r-1} \cos x dx = i \int_{\infty}^{+\infty} (c+ix)^{r-1} \sin x dx, \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (c-ix)^{r-1} \cos x dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (c-ix)^{r-1} \sin x dx. \end{cases}$$

En supposant que $r-1$ est entier négatif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (c^2+x^2)^{r-1} \cos x dx$$

se décompose facilement dans une suite d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c \pm ix)^{p-1} \cos x dx;$$

et, en prenant la somme de celles-ci, on obtient la formule

$$(12) \quad \int_0^{\infty} (c^2 + x^2)^{r-1} \cos x dx = \frac{\pi c^{-r} (2c)^{2r-1}}{\Gamma(1-r)} \int_0^{\infty} \theta^{-r} (\theta + 2c)^{-r} e^{-\theta} d\theta,$$

laquelle est due à M. Catalan. Cependant, ni cette démonstration ni celle de M. Catalan ne s'appliquent au cas où r n'est pas entier; la formule subsiste encore dans ce cas, comme M. Serret l'a démontré rigoureusement. En essayant de la vérifier, je suis tombé sur cette autre formule :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\infty} (c^2 + x^2)^{r-1} \cos x dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi} c^{-r} (2c)^{2r}}{2\Gamma(1-r)} \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{\theta + 2c} + \sqrt{\theta})^{-r} + (\sqrt{\theta + 2c} - \sqrt{\theta})^{-r}}{\sqrt{\theta}\sqrt{\theta + 2c}} e^{-\theta} d\theta, \end{aligned} \right.$$

ce qui suppose, comme auparavant, que $r - 1$ soit négatif; en comparant les deux valeurs, on est conduit au résultat singulier (en écrivant α au lieu de $2c$, et $\frac{1-p}{2}$ pour r) :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{\theta + \alpha} + \sqrt{\theta})^p + (\sqrt{\theta + \alpha} - \sqrt{\theta})^p}{\sqrt{\theta}\sqrt{\theta + \alpha}} e^{-\theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\frac{1}{2}(p+1)} \int_0^{\infty} \theta^{\frac{1}{2}(p-1)} (\theta + \alpha)^{\frac{1}{2}(p-1)} e^{-\theta} d\theta. \end{aligned} \right.$$

lequel peut se démontrer sans difficulté, quand p est entier positif impair, en développant les deux membres suivant les puissances de α; cela se fait au moyen de

$$(15) \quad \frac{(\sqrt{1+x} + 1)^p + (\sqrt{1+x} - 1)^p}{\sqrt{1+x}} = S_r \cdot \left| x^r \cdot \frac{\Gamma(p-r) \cdot 2^{p-2r}}{\Gamma(p-2r)\Gamma(r+1)} \right|,$$

où r s'étend depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}(p-1)$. J'ai déduit de cette formule (14) des formules assez remarquables qui se rapportent aux attractions, lesquelles paraîtront dans un numéro prochain du *Cambridge and*

Dublin mathematical Journal. On peut encore démontrer cette formule singulière :

$$(16)\qquad \Gamma(r+a-1)=\frac{1}{2\sin r\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^{r-1}(-ix)^{a-1}e^{ix}\,dx;$$

en effet, pour la vérifier, il suffit de réduire l'intégrale, d'abord à

$$\int_0^{\infty}(ix)^{r-1}(-ix)^{a-1}e^{ix}\,dx+\int_0^{\infty}(-ix)^{r-1}(ix)^{a-1}e^{-ix}\,dx,$$

puis à

$$e^{(r-a)\frac{\pi i}{2}}\int_0^{\infty}x^{r+a-2}e^{ix}\,dx-e^{(a-r)\frac{\pi i}{2}}\int_0^{\infty}x^{r-a-2}e^{-ix}\,dx,$$

dont les deux parties s'obtiennent au moyen d'une formule donnée ci-dessus. Si, au lieu de $(-ix)^{a-1}$, l'on avait $(ix)^{a-1}$, l'intégrale se réduirait à zéro ; mais cela rentre dans une formule plus simple.

J'ajouterai encore ces deux formules-ci,

$$(17)\qquad \begin{cases} 2\pi c^a e^{-c}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-ix)^a}{c+ix}e^{ix}\,dx, \\ 0=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(ix)^a}{c+ix}e^{-ix}\,dx, \end{cases}$$

dont je supprime la démonstration. En écrivant dans la dernière $-x$ au lieu de x, puis ajoutant, on a

$$(18)\qquad \pi c^{a-1}e^{-c}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-ix)^a}{c^2+x^2}e^{ix}\,dx;$$

d'où l'on déduit tout de suite cette formule de M. Cauchy

$$(19)\qquad \frac{\pi}{2}c^{a-1}e^{-c}=\int_0^{\infty}\frac{x^a}{c^2+x^2}\cos\left(\frac{a\pi}{2}-x\right)dx.$$

La formule (7) peut être considérée comme une définition de la fonction Γr au cas de r négatif; et, à ce point de vue, elle a, ce me semble, quelques avantages sur celle que M. Cauchy a donnée au moyen des intégrales extraordinaires. Je passe à la définition, au moyen d'une intégrale définie, de la seconde intégrale eulérienne,

$$(20)\qquad \Gamma(m,n)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}.$$

quand m ou n, ou tous les deux, sont négatifs. Soit d'abord m et n tous les deux positifs, mais n plus petit que l'unité; on obtient au moyen de la formule (7) et de la définition ordinaire des fonctions Γ,

$$\Gamma m \Gamma n = \frac{1}{2\sin n\pi}\int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, x^{m-1}(iy)^{n-1} e^{-(x+y)},$$

et de là, en mettant

$$y = \alpha x, \quad dy = x d\alpha,$$

et intégrant par rapport à x,

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{1}{2\sin n\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \cdot \frac{(i\alpha)^{n-1}}{(1-i\alpha)^{m+n}},$$

ou en écrivant $k + \alpha i$ au lieu de αi, k étant positif,

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{1}{2\sin n\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k+\alpha i)^{n-1} d\alpha}{(1-k-\alpha i)^{m+n}}. \tag{21}$$

formule qui est vraie, même pour les valeurs négatives de n. En effet, si cette formule est vraie pour une valeur quelconque particulière de n, elle sera aussi vraie pour la valeur $n+p$, p étant entier positif quelconque; ce qui se démontre au moyen des formules de réduction : donc il ne s'agit que de la démontrer au cas où n est positif et plus petit que l'unité, et dans ce cas, puisque la fonction à intégrer est toujours finie, on peut écrire sans crainte $k + \alpha i$ au lieu de αi, ce qui la réduit à la formule qui vient d'être démontrée; donc cette formule (21) est la définition cherchée, au cas où n est négatif, ou positif et plus petit que l'unité.

Si, de plus, m est négatif, ou positif et plus petit que l'unité, $1-m$ sera positif, et l'on déduira

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(1-m-n)\Gamma n}{\Gamma(1-m)} \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin m\pi},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin m\pi}\mathfrak{F}(1-m-n, n);$$

ou enfin, par l'équation (21),

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2\sin m\pi \sin n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k + i\alpha)^{n-1} (1 - k - i\alpha)^{m-1} d\alpha$$

laquelle suppose seulement que $m + n$ soit négatif, ou positif et plus petit que l'unité. Elle présente une analogie assez frappante avec l'équation ordinaire

$$\mathfrak{F}(m, n) = \int_0^1 \alpha^{n-1} (1 - \alpha)^{m-1} d\alpha,$$

qui correspond aux valeurs positives de m, n; de même que l'équation (21) est analogue à cette autre forme

$$\mathfrak{F}(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{n-1} d\alpha}{(1+\alpha)^{m+n}},$$

qui correspond aussi aux valeurs positives de m et n.

On peut se proposer de vérifier l'équation (m et n positifs et plus petits que l'unité)

$$\Gamma m \Gamma n = \frac{1}{4\sin m\pi \sin n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (ix)^{m-1} (iy)^{n-1} e^{i(x+y)},$$

en transformant le second membre au moyen de $x = \alpha y$. Pour cela, on distinguera quatre cas, selon que x et y sont tous les deux positifs ou négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif. En mettant dans les deux premiers

$$x = \alpha y, \quad dx = y\, d\alpha,$$

et en intégrant par rapport à y, on trouvera que les deux portions correspondantes de l'intégrale double se réduiront en

$$-\Gamma(m+n) \cdot 2\cos(m+n)\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{m-1} d\alpha}{(1+\alpha)^{m+n}},$$

c'est-à-dire à

$$-2\cos(m+n)\pi \cdot \Gamma m \Gamma n.$$

Pour les deux autres portions de l'intégrale double, en écrivant

$$x = -\alpha y,$$

on verra qu'il faut encore distinguer les deux cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$. Les quatre intégrales ainsi obtenues se réuniront cependant dans les deux

$$2\cos n\pi \,.\, \Gamma(m+n) \cdot \int_0^1 \frac{\alpha^{m-1}\,d\alpha}{(1-\alpha)^{m+n}}, \quad 2\cos m\pi \int_1^\infty \frac{\alpha^{n-1}\,d\alpha}{(\alpha-1)^{m+n}},$$

savoir, après quelques réductions faciles, dans celles-ci,

$$\frac{2\cos n\pi \sin m\pi}{\sin(m+n)\pi}\,\Gamma m\,\Gamma n, \quad \frac{2\cos m\pi \sin m\pi}{\sin(m+n)}\,\Gamma m\,\Gamma n,$$

lesquelles se réuniront en

$$\cos(m-n)\pi \,.\, \Gamma m\,\Gamma n.$$

On obtient donc enfin l'équation identique

$$4\sin m\pi \sin n\pi = 2\cos(m-n)\pi - 2\cos(m+n)\pi;$$

ce qui suffit pour la vérification dont il s'agit.

MÉMOIRE
SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

Dans une Note, publiée au tome précédent de ce Recueil, M. Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, s'est proposé de démontrer qu'*une famille de surfaces représentée par une équation, où entre un paramètre indéterminé, ne peut pas toujours être considérée comme l'une des familles d'un système triple de surfaces orthogonales*. Pour établir cette proposition, M. Bouquet emploie une marche assurément fort simple: il cite des exemples. Il me semble, toutefois, que la démonstration de ce fait résulte naturellement des conditions analytiques auxquelles satisfont les paramètres des trois surfaces qui composent tout système triple de surfaces orthogonales. Ces trois paramètres vérifient, en effet, les trois équations aux différentielles partielles

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dx}\dfrac{d\mu}{dx} + \dfrac{d\rho}{dy}\dfrac{d\mu}{dy} + \dfrac{d\rho}{dz}\dfrac{d\mu}{dz} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\rho}{dx}\dfrac{d\nu}{dx} + \dfrac{d\rho}{dy}\dfrac{d\nu}{dy} + \dfrac{d\rho}{dz}\dfrac{d\nu}{dz} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dx}\dfrac{d\nu}{dx} + \dfrac{d\mu}{dy}\dfrac{d\nu}{dy} + \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{d\nu}{dz} = 0; \end{cases}$$

et, par suite, les quantités ρ, μ, ν semblent déterminées en x, y et z, sauf les arbitraires qui entrent nécessairement dans leur composition.

D'ailleurs, si l'on différentie les équations (1) par rapport à x, y, z, autant que possible, et de manière à n'avoir de dérivées que jusqu'à

l'ordre p inclusivement, on aura (en comptant les équations (1)), un nombre d'équations marqué par $\frac{p(p+1)(p+2)}{2}$, et le nombre des dérivées des quantités μ et ν sera $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - 2$; pour que l'élimination de ces dérivées soit possible, il faut que le premier nombre surpasse le second, ce qui donne

$$p = 6 \quad \text{ou} \quad > 6.$$

Si l'on prend $p = 6$, on aura alors cent soixante-huit équations entre lequelles on pourra éliminer les dérivées de μ et ν au nombre de cent soixante-six, et il restera deux équations aux différentielles partielles du sixième ordre, auxquelles devra satisfaire le paramètre ρ de toute surface susceptible de faire partie d'un système triple. Cette dernière circonstance de deux conditions auxquelles le paramètre ρ est assujetti, permet de penser que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple pourrait bien être assez limité, et la détermination d'une classe de pareils systèmes n'en présente que plus d'intérêt.

Je me propose ici de faire connaître quelques nouveaux systèmes triples de surfaces orthogonales.

II.

Je ferai voir qu'on peut intégrer les équations (1) si l'on assujettit l'un des paramètres, ρ par exemple, à être de la forme

$$\rho = X + Y + Z,$$

X, Y, Z étant trois fonctions indéterminées dont la première ne contient que x, la seconde y et la troisième z. M. Bouquet, dans son Mémoire, a montré que ces fonctions devaient satisfaire à une certaine équation de condition, pour que les surfaces représentées par l'équation (2) pussent faire partie d'un système triple; mais la marche indirecte qu'il a suivie ne lui a pas permis de déterminer les surfaces conjuguées, dans le cas où elles existent.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, les équations (1) devien-

nent, en dénotant les dérivées à la manière de Lagrange,

$$(3)\quad \begin{cases} X'\dfrac{d\mu}{dx} + Y'\dfrac{d\mu}{dy} + Z'\dfrac{d\mu}{dz} = 0, \\ X'\dfrac{d\nu}{dx} + Y'\dfrac{d\nu}{dy} + Z'\dfrac{d\nu}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\mu}{dx}\dfrac{d\nu}{dx} + \dfrac{d\mu}{dy}\dfrac{d\nu}{dy} + \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{d\nu}{dz} = 0, \end{cases}$$

Or, si l'on fait

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{X'} - \int \frac{dy}{Y'} = \alpha, \\ \displaystyle\int \frac{dx}{X'} - \int \frac{dz}{Z'} = \beta, \end{cases}$$

les quantités μ et ν, définies par les deux premières des équations (3), seront des fonctions des deux nouvelles variables α et β; par suite, la troisième équation (3) deviendra

$$(5)\quad \left(\frac{d\mu}{d\alpha} + \frac{d\mu}{d\beta}\right)\left(\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{d\nu}{d\beta}\right) + \frac{X'^2}{Y'^2}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{X'^2}{Z'^2}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} = 0.$$

En outre, comme α et β sont des fonctions de x, y et z, on peut considérer y et z comme des fonctions de α, β et x; en sorte qu'il restera dans l'équation (5) un paramètre indéterminé x, et que cette équation devra être satisfaite indépendamment de x. Les quantités μ et ν devront donc vérifier non-seulement l'équation (5), mais toutes celles que l'on en déduit par la différentiation relative à x seul.

En différentiant une première fois par rapport à x, et remarquant que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y'}{X'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X'},$$

on aura

$$(6)\quad \frac{X'' - Y''}{Y'^2}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + \frac{X'' - Z''}{Z'^2}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} = 0,$$

à moins cependant que X' ne soit nul; mais alors l'équation (2) représenterait des surfaces cylindriques, et nous faisons abstraction de ce cas. Si l'on différentie de nouveau, on aura

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{X'X''' - Y'Y''' - 2Y''(X'' - Y'')}{Y'^2}\dfrac{d\mu}{d\alpha}\dfrac{d\nu}{d\alpha} \\ + \dfrac{X'X''' - Z'Z''' - 2Z''(X'' - Z'')}{Z'^2}\dfrac{d\mu}{d\beta}\dfrac{d\nu}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

La comparaison des équations (6) et (7) fournit la suivante :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &X'X''' - Y'' + Y'Y'''(Z'' - X'') + Z'Z'''(X'' - Y''') \\ &+ 2(Y''' - Z'')(Z'' - X'')(X'' - Y'') = 0, \end{aligned}\right.$$

laquelle exprime la condition pour que les surfaces représentées par l'équation (2) aient des conjuguées orthogonales; c'est la même que M. Bouquet a obtenue par un moyen tout à fait différent, et dont il a déduit la démonstration du théorème qu'il avait en vue.

III.

On aperçoit assez facilement que l'équation (8) résulte de l'élimination des quantités a et b entre les trois suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &X'X''' - 2(X'' - a)(X'' - b) = 0, \\ &Y'Y''' - 2(Y'' - a)(Y'' - b) = 0, \\ &Z'Z''' - 2(Z'' - a)(Z'' - b) = 0; \end{aligned}\right.$$

les valeurs de a et b, tirées de deux de ces équations, des deux premières par exemple, ne peuvent contenir z. Pour une raison semblable, elles ne pourront contenir ni y ni x; elles sont donc constantes. D'où résulte ce théorème : *Pour que les surfaces* (2) *fassent partie d'un système triple, il faut et il suffit que les fonctions* X, Y *et* Z *satisfassent aux équations* (9) *qui sont aux différentielles ordinaires, et du troisième ordre, et qui contiennent deux constantes arbitraires* a *et* b.

Il n'y a d'exception que dans le cas où deux des trois quantités X'', Y'', Z'' se réduisent à une même constante; si, par exemple,

$$X'' = Y'' = 2c,$$

les deux premières des équations (9) se réduisent à

$$(c - a)(c - b) = 0;$$

on doit donc faire l'une des quantités a et b égale à c, mais on peut prendre pour l'autre une fonction arbitraire de z, en sorte que la troisième équation (9) donne pour Z une fonction arbitraire de z. C'est ce que l'on aperçoit de suite à l'inspection de l'équation (8), qui est

satisfaite quel que soit Z, si l'on a

$$X'' = Y'' = 2c.$$

Ce cas particulier ne présente rien de remarquable: deux des trois familles se composent de surfaces de révolution autour de l'un des axes, et la troisième, des plans passant par cet axe: ainsi l'on a pour les trois familles

$$\rho = c(x^2 + y^2) + Z,$$

$$\mu = (x^2 + y^2)\, e^{-4c\int \frac{dz}{Z}},$$

$$\nu = \frac{x}{y}.$$

Les équations (9) s'intègrent aisément quels que soient a et b: nous examinerons d'abord le cas où ces deux constantes sont nulles.

IV

On a alors

$$X'X'' - 2X''^2 = 0,$$

$$Y'Y''' - 2Y''^2 = 0,$$

$$Z'Z'' - 2Z''^2 = 0.$$

On tire de la première

$$X = X_0 + l(x - x_0)^m,$$

X_0, x_0 et m étant les trois constantes naissant de l'intégration: mais on peut négliger les deux premières, dont la première se fondra dans ρ, et dont la seconde ne produit qu'une modification dans la position des axes: on aura donc

$$X = l(x^m), \quad Y = l(y^n), \quad Z = l(z^p),$$

et l'équation (2) sera alors

(2 *bis*) $\rho = l(x^m) + l(y^n) + l(z^p)$, ou, si l'on veut, $\omega = x^m y^n z^p$.

Les équations (4) sont, dans ce cas,

(4 *bis*)
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2m} - \dfrac{y^2}{2n} = \alpha, \\[2ex] \dfrac{x^2}{2m} - \dfrac{z^2}{2p} = \beta, \end{cases}$$

et l'équation (5),

$$(5\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\mu}{d\alpha}+\frac{d\mu}{d\beta}\right)\left(\frac{d\nu}{d\alpha}+\frac{d\nu}{d\beta}\right)+\left(\frac{m}{n}-\frac{2m^2\alpha}{nx^2}\right)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha}\\ &\qquad\qquad+\left(\frac{m}{p}-\frac{2m^2\beta}{px^2}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}=0;\end{aligned}\right.$$

et cette équation ayant lieu quel que soit x, on aura

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha}+\left(1+\frac{m}{p}\right)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}+\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\alpha}+\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta}=0,\\ &\frac{\alpha}{n}\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha}-\frac{\beta}{p}\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta}=0.\end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces deux équations on pourra déterminer μ et ν en fonction de α et β, et, par conséquent, en fonction de x, y et z. Si l'on fait

$$(11)\qquad \frac{d\mu}{d\alpha}=-\,M\frac{d\mu}{d\beta},\quad \frac{d\nu}{d\alpha}=-\,N\frac{d\nu}{d\beta},$$

on aura

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)MN+\left(1+\frac{m}{p}\right)-(M+N)=0,\qquad \frac{\alpha}{n}MN+\frac{\beta}{p}=0,$$

d'où il suit que M et N seront les racines de l'équation du second degré

$$(12)\qquad p\alpha M^2+[(m+n)\beta-(m+p)\alpha]M-n\beta=0.$$

M et N étant connus, on aura μ et ν à l'aide des équations (11); mais il résulte de la méthode d'intégration pour les équations linéaires aux différentielles partielles, qu'il suffira de remplacer M par $\frac{d\beta}{d\alpha}$, puis, après avoir intégré l'équation (12), d'égaler à des fonctions arbitraires de μ et ν, ou simplement à μ et à ν, les deux valeurs que l'on déduira pour la constante arbitraire naissant de l'intégration. En résumé, les paramètres des surfaces conjuguées des surfaces (2) sont les deux valeurs de la constante arbitraire qui se trouve dans l'intégrale de l'équation différentielle

$$(13)\qquad p\alpha\,d\beta^2+[(m+n)\beta-(m+p)\alpha]\,d\alpha\,d\beta-n\beta\,d\alpha^2=0.$$

Cette équation est homogène par rapport à α, β, $d\alpha$ et $d\beta$: on pourra donc aisément l'intégrer; d'ailleurs, en la résolvant par rapport à β,

et conservant M à la place de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on a

$$\beta = \frac{p\,M - (m+p)\,M}{n - (m+n)\,M}\,\alpha,$$

et, sous cette forme, on pourra encore l'intégrer par une méthode connue.

Ce calcul ne présente aucune difficulté, il est seulement un peu compliqué; il se simplifie beaucoup, si l'on suppose

$$p = n = -m = 1,$$

auquel cas la première famille du système triple se compose de paraboloïdes hyperboliques ayant pour équation

$$\rho = \frac{yz}{x}.$$

L'équation (13) devient, dans ce cas,

$$\frac{d\alpha^2}{\alpha} = \frac{d\beta^2}{\beta},$$

dont l'intégrale est

$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \text{une constante};$$

mais, dans ce cas, les équations (4 *bis*) donnent

$$x^2 + y^2 = -2\alpha, \quad x^2 + z^2 = -2\beta;$$

on aura donc pour les équations des trois familles de surfaces orthogonales,

$$(14) \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{yz}{x}, \\ \mu = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + z^2}, \\ \nu = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + z^2}. \end{cases}$$

Voilà donc un système nouveau et fort simple de surfaces orthogonales ou de surfaces qui se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure. Les deux paramètres μ et ν, ou plutôt leurs carrés, sont les racines d'une même équation algébrique du second degré; ou, ce qui revient au même, les surfaces des familles μ et ν sont représentées par la même équation du quatrième degré

$$(15) \qquad (z^2 - y^2)^2 - 2\mu^2(z^2 + y^2 + 2x^2) + \mu^4 = 0.$$

Chacune des surfaces que représente l'équation (15) se compose d'une nappe fermée et de plusieurs nappes non fermées; en sorte que le triple système que nous considérons se compose : 1° de paraboloïdes hyperboliques dont les paraboles principales sont égales; 2° des nappes fermées de l'équation (15); 3° des nappes non fermées de la même équation. En d'autres termes, les deux familles de surfaces représentées par l'équation (15) et la première des équations (14) jouissent de cette propriété remarquable, que l'une des surfaces de l'une quelconque des deux familles est coupée par toutes les surfaces de l'autre famille, suivant *ses deux systèmes de lignes de courbure* [*].

On trouverait une multitude d'autres systèmes de surfaces orthogonales, toutes algébriques, en intégrant généralement l'équation (13). Nous nous bornerons à examiner le cas de $m = n = p = 1$: alors la première famille est représentée par l'équation

$$\rho = xyz,$$

et l'équation (13) se réduit à

$$\beta = \frac{M^2 - 2M}{1 - 2M}\alpha,$$

en conservant M à la place de $\frac{d\beta}{d\alpha}$: on en déduit, par la différentiation et à cause de $d\beta = M d\alpha$,

$$3\frac{d\alpha}{\alpha} = -2\frac{dM}{M} - 2\frac{dM}{M-1} + 3\frac{2dM}{2M-1},$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{2M-1}{(M^2-M)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{\beta}{c} = \frac{2M-M^2}{(M^2-M)^{\frac{2}{3}}},$$

c étant la constante qui naît de l'intégration. Pour éliminer M, je fais la combinaison suivante :

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)(\alpha-2\beta)}{c^3} = \frac{2M^6 - 6M^5 - 15M^4 + 40M^3 - 15M^2 - 6M + 2}{(M^2-M)^2},$$

---

[*] On déduit de là ce théorème de géométrie : *Dans un paraboloïde hyperbolique, dont les paraboles principales sont égales, la somme ou la différence des distances de chaque point d'une même ligne de courbure à deux génératrices rectilignes fixes est constante.*

puis celle-ci,

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}}{c} = \frac{M^3 - M + 1}{(M^2 - M)^{\frac{3}{2}}};$$

d'ou

$$\frac{(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3} = \frac{M^6 - 3M^5 + 6M^4 - 7M^3 + 6M^2 - 3M + 1}{(M^2 - M)^3},$$

et enfin

$$\frac{(\alpha + \beta)(\beta - 2\alpha)(\alpha - 2\beta)(2\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3} = -27.$$

On pourra donc prendre, pour les valeurs de μ et ν,

$$\mu = 8(\alpha + \beta)(\beta - 2\alpha)(\alpha - 2\beta) - 2(4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2)^{\frac{3}{2}},$$
$$\nu = 8(\alpha + \beta)(\beta - 2\alpha)(\alpha - 2\beta) + 2(4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

D'ailleurs,

$$2\alpha = x^2 - y^2, \quad 2\beta = x^2 - z^2;$$

on aura donc, pour les équations des trois familles de ce nouveau système,

$$\rho = xyz,$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= (2x^2 - y^2 - z^2)(2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2) \\ &\quad - 2(x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2)^{\frac{3}{2}}, \\ \nu &= (2x^2 - y^2 - z^2)(2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2) \\ &\quad + 2(x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Ce système conduit à des remarques semblables à celles qui ont été faites au sujet du système (14).

V.

Supposons maintenant que l'une des constantes a et b du paragraphe III, a par exemple, ne soit pas nulle; on aura alors, pour déterminer les fonctions X, Y, Z, trois équations semblables, dont la première sera

$$X'X''' - 2X''(X' - a) = 0;$$

on trouve, en intégrant,

$$X = X_0 - \frac{1}{m^2 a} \mathrm{l} \cos ma(x - x_0),$$

X_0, x_0 et m désignant les constantes naissant de l'intégration; on peut supposer nulles les deux premières, et écrire simplement

$$X = -\frac{1}{m^2 a} \mathrm{l} \cos max, \quad Y = -\frac{1}{n^2 a} \mathrm{l} \cos nay, \quad Z = -\frac{1}{p^2 a} \mathrm{l} \cos paz;$$

et l'on pourra prendre, pour valeur de ρ,

$$(2\ ter) \qquad \rho = (\cos max)^{\frac{1}{m^2}} (\cos nay)^{\frac{1}{n^2}} (\cos paz)^{\frac{1}{p^2}}.$$

D'ailleurs,

$$X' = \frac{1}{m} \operatorname{tang} max, \quad Y' = \frac{1}{n} \operatorname{tang} nay, \quad Z' = \frac{1}{p} \operatorname{tang} paz;$$

et si l'on met $-\frac{1}{a} \mathrm{l}\, \alpha$, $-\frac{1}{a} \mathrm{l}\, \beta$, à la place de α et β, les équations (4) deviendront

$$(4\ ter) \qquad \begin{cases} \sin nay = \alpha \sin max, \\ \sin paz = \beta \sin max; \end{cases}$$

et l'équation (5), où l'on effectue le même changement, se réduit à

$$\cos^2 max \left[m^2 + n^2 \alpha^2 \frac{d\mu\, d\nu}{d\alpha\, d\alpha} + (m^2 + p^2) \beta^2 \frac{d\mu\, d\nu}{d\beta\, d\beta} + m^2 \alpha\beta \left(\frac{d\mu\, d\nu}{d\alpha\, d\beta} + \frac{d\mu\, d\nu}{d\beta\, d\alpha} \right) \right]$$
$$+ n^2 (1 - \alpha^2) \frac{d\mu\, d\nu}{d\alpha\, d\alpha} + p^2 (1 - \beta^2) \frac{d\mu\, d\nu}{d\beta\, d\beta} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux, et si l'on fait, comme précédemment,

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = -M \frac{d\mu}{d\beta}, \quad \frac{d\nu}{d\alpha} = -N \frac{d\nu}{d\beta},$$

on aura

$$m^2 + n^2 \alpha^2 MN + (m^2 + p^2) \beta^2 - m^2 \alpha\beta (M + N),$$
$$n^2 (1 - \alpha^2) MN + p^2 (1 - \beta^2) = 0,$$

et l'on voit que M et N seront les deux racines de l'équation du second degré

$$(17) \quad n^2 (1 - \alpha^2) M^2 - \frac{n^2 (m^2 + p^2) \beta^2 (1 - \alpha^2) - p^2 (m^2 + n^2) \alpha^2 (1 - \beta^2)}{m^2 \alpha\beta} M - p^2 (1 - \beta^2) = 0;$$

et si, dans cette équation (17), on considère M comme représentant $\frac{d\beta}{d\alpha}$, les deux valeurs de la constante arbitraire qui se trouve dans son intégrale seront les valeurs des paramètres μ et ν des surfaces conjuguées et orthogonales de celles que représente l'équation (2 *ter*).

Cette équation se simplifie beaucoup si l'on pose

$$m = 1, \quad n = p = \sqrt{-1};$$

elle devient, en effet, en mettant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ à la place de M,

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \pm \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha\beta \pm \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2} = \text{constante};$$

on pourra donc poser

$$\mu = \alpha\beta + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2},$$
$$\nu = \alpha\beta - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2},$$

et l'on aura finalement, pour les valeurs de ρ, μ, ν, exprimées en x, y, z,

$$(18)\quad \begin{cases} \rho = \dfrac{\cos ay\sqrt{-1}\,\cos az\sqrt{-1}}{\cos ax}, \\[2ex] \mu = \dfrac{\sin ay\sqrt{-1}\,\sin az\sqrt{-1} + \sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 ay\sqrt{-1}}\sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 az\sqrt{-1}}}{\sin^2 ax}, \\[2ex] \nu = \dfrac{\sin ay\sqrt{-1}\,\sin az\sqrt{-1} - \sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 ay\sqrt{-1}}\sqrt{\sin^2 ax - \sin^2 az\sqrt{-1}}}{\sin^2 ax}. \end{cases}$$

équations où les imaginaires n'entrent qu'en apparence, et disparaîtraient en remplaçant $\cos ay\sqrt{-1}$ et $\sin ay\sqrt{-1}$ par leurs valeurs $\frac{e^{ay}+e^{-ay}}{2}$; $\frac{e^{ay}-e^{-ay}}{2\sqrt{-1}}$.

Voilà encore un nouveau système triple de surfaces orthogonales, dont la forme conduit à des remarques semblables à celles qui ont été

faites précédemment; il est le plus simple parmi tous ceux qui correspondent aux formes des fonctions X, Y, Z, que nous avons considérées dans ce paragraphe. On en obtiendrait d'ailleurs une multitude d'autres, en intégrant complétement l'équation (17); mais les résultats auxquels on est conduit sont extrêmement compliqués.

VI.

Supposons, en troisième lieu, que les constantes a et b du paragraphe III soient égales et de signes contraires; on aura, pour déterminer X, Y, Z, trois équations semblables, dont la première sera

$$X'X'' - 2(X''^2 - a^2) = 0;$$

la fonction X déterminée par cette équation est une fonction elliptique identique à la fonction inverse de celle qui représente l'arc de lemniscate : on trouve, en effet, très-simplement, pour équation intégrale de la précédente,

$$x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{ma}} \int^{m(X-X_0)} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

x_0, X_0 et m étant les trois constantes qui naissent de l'intégration : on peut supposer nulles les deux premières, sans altérer la généralité des résultats; et, si l'on pose

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta = \lambda(\varepsilon),$$

on aura, pour les valeurs de X, Y, Z,

$$X = \frac{1}{m}\lambda(x\sqrt{ma}), \qquad Y = \frac{1}{n}\lambda(y\sqrt{na}), \qquad Z = \frac{1}{p}\lambda(z\sqrt{pa}),$$

et pour l'équation de la première famille du système triple de surfaces orthogonales qui en résultent,

$$(2\ quater) \qquad \rho = \frac{1}{m}\lambda(x\sqrt{ma}) + \frac{1}{n}\lambda(y\sqrt{na}) + \frac{1}{p}\lambda(z\sqrt{pa}).$$

Les équations (4) deviennent alors, en introduisant X, Y, Z à la

place de x, y et z, et mettant $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\alpha$, $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\beta$ au lieu de α et β,

$$\operatorname{tang} nY = \alpha \operatorname{tang} mX,$$
$$\operatorname{tang} pZ = \beta \operatorname{tang} mX;$$

alors μ et ν seront fonctions de α et β, et en se rappelant que

$$mX' = \sqrt{ma \sin 2mX}, \quad nY' = \sqrt{na \sin 2nY}, \quad pZ' = \sqrt{pa \sin 2pZ},$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-2\alpha\sqrt{ma}}{\sqrt{\sin 2mX}}, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{2\alpha\sqrt{na}}{\sqrt{\sin 2nY}},$$
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-2\beta\sqrt{ma}}{\sqrt{\sin 2mX}}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = \frac{2\beta\sqrt{pa}}{\sqrt{\sin 2pZ}}.$$

on trouvera facilement une équation de la forme

$$P + Q \operatorname{tang}^2 mX = 0.$$

P et Q ne contenant que α et β, celle-ci se décomposera en deux autres qui seront, toutes réductions faites,

$$(m\alpha^2 + n\alpha)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + (m\beta^2 + p\beta)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} + m\alpha\beta\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta} + \frac{d\nu}{d\alpha}\frac{d\mu}{d\beta}\right) = 0,$$
$$(m\alpha^2 + n\alpha^3)\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\alpha} + (m\beta^2 + p\beta^3)\frac{d\mu}{d\beta}\frac{d\nu}{d\beta} + m\alpha\beta\left(\frac{d\mu}{d\alpha}\frac{d\nu}{d\beta} + \frac{d\nu}{d\alpha}\frac{d\mu}{d\beta}\right) = 0;$$

en posant

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = -M\frac{d\mu}{d\beta}, \qquad \frac{d\nu}{d\alpha} = -N\frac{d\nu}{d\beta},$$

on trouvera que M et N sont les racines d'une équation du second degré, que l'on devra intégrer en y considérant M comme représentant le quotient des différentielles $d\beta$ et $d\alpha$; ensuite, on égalera à μ et ν les deux valeurs de la constante arbitraire résultant de cette intégration : mais les calculs qu'il faut exécuter, même dans les cas les plus simples, sont trop compliqués pour offrir quelque intérêt.

VII.

Les cas que nous venons d'examiner sont les plus remarquables : on peut d'ailleurs intégrer, dans tous les cas, les équations (9), et en de-

duire l'équation de la famille de surfaces

$$\rho = X + Y + Z,$$

susceptible d'avoir des conjuguées orthogonales.

Si l'on considère, en effet, la première des équations (9)

$$X'X'' - 2(X'' - a)(X' - b) = 0,$$

on en déduit, en intégrant une première fois, et désignant par m une constante arbitraire,

$$X' = m(X' - a)^{\frac{a}{2(a-b)}}(X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)}};$$

par suite, on pourra exprimer X et x à l'aide de X'', de la manière suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{m}{2}\displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{2(a-b)} - 1}(X'' - b)^{\frac{b}{2(b-a)} - 1} dX'', \\ X - X_0 = \dfrac{m^2}{2}\displaystyle\int (X'' - a)^{\frac{a}{a-b} - 1}(X'' - b)^{\frac{b}{b-a} - 1} dX''; \end{cases}$$

on pourra donner aux deux constantes x_0 et X_0 telles valeurs déterminées que l'on voudra, et si l'on désigne par $F(x, m)$ la valeur de X, on aura

$$X = F(x, m), \quad Y = F(y, n), \quad Z = F(z, p),$$

et l'équation

$$(20)\qquad \rho = F(x, m) + F(y, n) + F(z, p),$$

où m, n, p désignent trois constantes arbitraires, comprend toutes les familles *de la forme que nous considérons* et qui possèdent des conjuguées orthogonales. Cette équation (20) comprend en particulier les équations (2) des paragraphes IV, V et VI. Il faut pourtant en excepter, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les surfaces cylindriques ou de révolution.

NOTE AU SUJET D'UN MÉMOIRE DE M. CHASLES;

PAR J. LIOUVILLE.

A l'occasion de ses belles recherches sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré, M. Chasles a donné (tome XI de ce Journal, page 112) deux équations qui appartiennent à une droite tangente à deux surfaces homofocales (α), (α_1), et que je me dispense de transcrire ici, supposant que le lecteur ait sous les yeux le Mémoire cité. M. Chasles dit ensuite que « ces équations se transforment en deux » équations différentielles, où ρ, μ, ν (coordonnées elliptiques d'un » point quelconque de l'espace) sont les variables, si l'on remplace » les cosinus (qu'elles contiennent) par les projections ds, ds', ds'' d'un » élément de la droite sur les normales aux trois surfaces (ρ), (μ), (ν), » puis ces éléments ds, ds', ds'', par leurs expressions connues en ρ, μ, » ν, $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$. » Mais il est important, je crois, d'ajouter que les deux équations différentielles ainsi obtenues se laissent ramener à un système de deux équations du genre de celles que M. Jacobi nomme *abéliennes*, en sorte que les considérations géométriques dont M. Chasles s'est servi fournissent les intégrales d'un tel système. De même que dans un plan, où l'on détermine la position des divers points par l'intersection de deux séries de coniques homofocales, l'intégrale fondamentale d'Euler pour les fonctions elliptiques est représentée géométriquement par les droites tangentes à une de ces coniques, de même, dans l'espace, les intégrales du système abélien le plus simple répondent à des droites tangentes à la fois à deux surfaces homofocales (α), (α_1). C'est à l'aide de ces droites, auxquelles on avait déja trouvé de belles et nombreuses propriétés, qu'on étendra aux surfaces du second degré les théorèmes connus pour les coniques concernant le *maximum* et le *minimum* du périmètre des polygones inscrits et circonscrits. Je traiterai en détail tous ces questions dans un prochain cahier.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES ADRESSÉES A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM THOMSON.

« Cambridge, 26 juin 1846.

» ..... Les recherches sur lesquelles je vous ai écrit, le 8 octobre 1845 [*], m'ont conduit à l'emploi d'un système nouveau de coordonnées orthogonales très-commode dans quelques problèmes des théories de la chaleur et de l'électricité. Les surfaces coordonnées dans ce système sont les surfaces engendrées par la rotation, autour d'un axe convenable, d'un système de coordonnées curvilignes dans un plan, et les plans méridiens. En effet, soit M un plan méridien quelconque; les coordonnées d'un point P dans ce plan sont deux cercles qui se coupent à angle droit en ce point, et dont le premier passe par deux points fixes A, A', dans l'axe de révolution X'X, tandis que le second est la courbe orthogonale de la série entière des cercles qui passent par les points A, A'. On démontre facilement que cette courbe est un cercle qui passe par deux points imaginaires B, B', dans la droite Y'OY perpendiculaire à X'OX, à des distances aux deux côtés de O dont chacune est égale à $a\sqrt{-1}$, a étant la valeur des distances égales A'O, OA. En effet, la première série est exprimée par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2uy = a^2, \tag{1}$$

u étant un paramètre variable, et l'on en déduit

$$x^2 + y^2 - 2vx = -a^2. \tag{2}$$

pour l'équation de la courbe orthogonale.

[*] Permettez-moi de vous faire remarquer une faute qui a passé dans l'extrait de cette Lettre que vous avez publié (il est probable que je l'ai faite moi-même). La lettre s, qui ne devait nullement paraître dans les formules, y est plusieurs fois répétée au lieu de n [**].

[**] Cette faute, qui existait, en effet, dans le manuscrit, a été déjà signalée dans l'*errata* du tome X, où la Lettre de M. Thomson se trouve imprimée. (J. LIOUVILLE.)

» Posons

$$u = a \cot \theta, \quad v = a\sqrt{-1}.\cot \psi,$$

θ sera l'angle que la tangente du cercle (1), au point A ou A′, fait avec l'axe X′X, et ψ sera l'angle imaginaire que la tangente du cercle (2), au point B ou B′, fait avec Y′Y. Pour avoir la série entière des cercles (1), il faudrait donner à u toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à ∞, ou à θ toutes les valeurs de 0 à π; et, pour la série (2), il faudrait donner à v toutes les valeurs de a à ∞, et de $-\infty$ à $-a$. On peut considérer un point P comme déterminé sans ambiguïté par les coordonnées θ, ψ (en prenant $\theta + \pi$ au lieu de θ pour l'autre point d'intersection des mêmes cercles). Les équations de transformation, entre les coordonnées (x, y) et (θ, ψ) d'un même point P, sont

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2ay \cot \theta = a^2,$$

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ax \cot \psi \sqrt{-1} = -a^2.$$

On en déduit

$$x = -a \frac{\sin \psi \sqrt{-1}}{\cos \psi - \cos \theta},$$

$$y = a \frac{\sin \theta}{\cos \psi - \cos \theta},$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{\cos \psi + \cos \theta}{\cos \psi - \cos \theta}.$$

Dans les applications physiques, il s'agit d'exprimer la distance Δ, entre deux points P, P′, en fonction des nouvelles coordonnées. On trouve facilement, à l'aide des formules données ci-dessus, dans le cas de P et P′ dans un même plan méridien M,

$$\Delta^2 = 2a^2 \frac{\cos(\psi - \psi') - \cos(\theta - \theta')}{(\cos \psi - \cos \theta)(\cos \psi' - \cos \theta')}.$$

Pour les trois coordonnées d'un point dans l'espace, je prends θ, ψ qui fixent sa position dans un plan méridien, et l'angle φ que ce plan fait avec un plan méridien fixe. Je trouve maintenant, pour la distance entre deux points quelconques P, P′,

$$\Delta^2 = 2a^2 \frac{\cos(\psi - \psi') - [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]}{(\cos \psi - \cos \theta)(\cos \psi' - \cos \theta')}.$$

Pour éviter l'emploi de quantités imaginaires, je pose

$$2\cos\psi = r + \frac{1}{r}, \quad 2\cos\psi' = r' + \frac{1}{r'},$$

d'où l'on déduit

$$2\cos(\psi - \psi') = \frac{r}{r'} + \frac{r'}{r},$$

et l'expression précédente se réduit à

$$\Delta^2 = a^2 \frac{r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')] + r'^2}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)(r'^2 - 2r'\cos\theta' + 1)}.$$

A l'aide de cette expression, on trouve

$$r\frac{d^2(s^{-1}v)}{dr^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left[\sin\theta\frac{d(s^{-1}v)}{d\theta}\right]}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2(s^{-1}v)}{d\varphi^2} = 0,$$

ou

$$s = (r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}},$$

pour l'équation du mouvement uniforme de la chaleur exprimée par les coordonnées r, θ, φ.

» Les surfaces représentées par l'équation

$$r = \text{constante}$$

sont des sphères engendrées par la révolution d'une série de cercles autour de la droite qui contient leurs centres. Supposons que l'espace entre deux de ces sphères (quand chaque sphère est en dehors de l'autre, cet espace sera l'espace infini en dehors des deux sphères), dont les équations sont

$$r = \alpha, \quad r = \alpha_1,$$

soit rempli d'un milieu solide homogène, que les températures de tous les points de chaque surface soient données, et qu'il s'agisse de déterminer la température stationnaire d'un point quelconque dans le solide; on résoudra ce problème avec beaucoup de facilité au moyen de l'analyse de Laplace, en employant les coordonnées que j'ai indiquées. Dans le cas particulier d'une température constante pour chaque sphère, on parvient, après quelques réductions, à trouver la solution que Poisson a donnée pour le problème correspondant de deux sphères électrisées.

» Il y a un système nouveau et très-remarquable de coordonnées, qu'on trouve en posant

$$r\cos\theta = \xi, \quad r\sin\theta\cos\varphi = \eta, \quad r\sin\theta\sin\varphi = \zeta,$$

r, θ, φ appartenant au système expliqué ci-dessus. Dans ce système (ξ, η, ζ), les surfaces coordonnées sont des sphères orthogonales qui passent par un point fixe, et qui touchent, par conséquent, trois plans orthogonaux menés par ce point. Je suis parvenu à considérer ces systèmes de coordonnées en cherchant les *images* des séries de surfaces des systèmes (polaire et rectangulaire) ordinaires, dans des sphères convenablement disposées.

» L'application du système (ξ, η, ζ) aux problèmes de physique, pour le cas de deux systèmes qui se touchent l'un l'autre, en donne les solutions avec beaucoup de facilité; mais il est plus simple de faire directement la recherche de ces coordonnées, que de les déduire du système (r, θ, φ). En effet, soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{x}{\xi} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{y}{\eta} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{\zeta} = 0$$

les équations de trois sphères qui se coupent à un point P (elles se coupent aussi à l'origine O). Je prends ξ, η, ζ pour les coordonnées de ce point $\left(\text{il faudrait substituer } \frac{\xi-1}{a}, \frac{\eta}{a}, \frac{\zeta}{a} \text{ dans ces équations, au lieu de } \xi, \eta, \zeta, \text{ pour retrouver les coordonnées } \xi, \eta, \zeta \text{ indiquées ci-dessus}\right)$. De ces équations on tire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \frac{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)},$$

et l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0$$

devient, pour les nouvelles coordonnées,

$$(a)\qquad \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\xi^2} + \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\eta^2} + \frac{d^2(\rho^{-1}v)}{d\zeta^2} = 0,$$

où

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour exemple de l'emploi qu'on peut faire de ce système de coordonnées, supposons que la température d'un point (α, η, ζ) est une fonction donnée $F(\eta, \zeta)$ des coordonnées η, ζ de sa position sur la sphère α, et que la température d'un point (α_1, η, ζ) est $F_1(\eta, \zeta)$, et qu'il s'agit de déterminer la température permanente d'un point quelconque $P(\xi, \eta, \zeta)$ dans l'espace entre les sphères α, α_1 (c'est-à-dire l'espace entier pour lequel ξ a une valeur intermédiaire à α et α_1), que nous supposerons rempli d'un solide homogène. Suivant la méthode de Fourier, en observant que les valeurs

$$\begin{array}{l} \cos m\eta . \cos n\zeta . \varepsilon^{h\xi}, \\ \cos m\eta . \sin n\zeta . \varepsilon^{h\xi}, \qquad \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

substituées pour $\rho^{-1}v$, sont des solutions particulières de l'équation (a), pourvu que $h^2 = m^2 + n^2$, je trouve, pour la solution du problème proposé,

$$(b)\qquad \left\{ \begin{array}{l} v = \dfrac{\rho}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dm\,dn \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta'\,d\zeta' \dfrac{\cos m(\eta-\eta')\cos n(\zeta-\zeta')}{\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)} - \varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F(\eta', \zeta')}{(\alpha^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\varepsilon^{h(\xi-\alpha_1)} - \varepsilon^{-h(\xi-\alpha_1)}\right] \\ - \dfrac{F_1(\eta', \zeta')}{(\alpha_1^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\varepsilon^{h(\xi-\alpha)} - \varepsilon^{-h(\xi-\alpha)}\right] \end{array} \right\} \end{array} \right\},$$

où ε est la base des logarithmes népériens, et

$$h = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

» Comme exemple de l'usage de cette formule, je ferai

$$F(\eta, \zeta) = F_1(\eta, \zeta) = V,$$

V étant une constante. Pour la réduction de l'expression, dans ce cas, j'observe que

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,dq\,\frac{\cos mp\cos nq}{(\lambda+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\,\frac{\varepsilon^{-(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}}}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta'\,d\zeta'\,\frac{\cos m(\eta-\eta')\cos(\zeta-\zeta')}{(\alpha^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{-h\alpha}}{h},$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta'\,d\zeta'\,\frac{\cos m(\eta-\eta')\cos n(\zeta-\zeta')}{(\alpha_1^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{\pm h\alpha_1}}{h},$$

le signe supérieur ou inférieur étant pris, dans la seconde expression, selon que α_1 est positif ou négatif (je prends α toujours positif et $> \alpha_1$). Ces réductions faites, l'expression (b) se trouve réduite à

$$(\mathrm{I})\qquad v = \frac{V\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dm\,dn\cos m\eta.\cos n\zeta.\frac{\varepsilon^{-(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\xi}}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} v &= \frac{V\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dm\,dn\cos m\eta.\cos n\zeta \\ &\times \frac{(\varepsilon^{-h\alpha_1}-\varepsilon^{h\alpha_1})\,\varepsilon^{h(\xi-\alpha)}+(\varepsilon^{-h\alpha}-\varepsilon^{h\alpha})\,\varepsilon^{-h(\xi-\alpha_1)}}{h\left[\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}\right]}, \end{aligned}\right.$$

suivant les deux cas. L'équation (I) se réduit à

$$v = V,$$

à cause de la valeur qu'on trouve pour l'intégrale définie qui y est contenue [*].

» L'expression pour v, dans le second cas, se trouve réduite en série convergente, si l'on substitue pour $\frac{1}{\varepsilon^{h(\alpha-\alpha_1)}-\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}}$ la série

$$\varepsilon^{-h(\alpha-\alpha_1)}\left[1+\varepsilon^{-2h(\alpha-\alpha_1)}+\varepsilon^{-4h(\alpha-\alpha_1)}+\ldots\right].$$

---

[*] Les intégrales définies (c) et (I) sont des cas particuliers de deux intégrales multiples dont j'ai trouvé les valeurs en cherchant une démonstration de la formule (5), tome X

et puis, pour chaque terme, sa valeur, suivant la formule citée dans le cas (I). On trouve ainsi

$$v = V_0 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{[(2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(\gamma+2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(2\gamma+2\alpha-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots \\ - \dfrac{1}{[(\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(2\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(3\gamma-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{[(\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(\gamma+\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{[(2\gamma+\xi-2\alpha_1)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\ - \dfrac{1}{[(\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(2\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{[(3\gamma+\xi)^2+\eta^2+\zeta^2]^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\},$$

où

$$\gamma = 2(\alpha - \alpha_1).$$

De cette expression on déduit facilement la distribution d'électricité sur deux sphères qui se touchent.

» Le cas (I) correspond à deux sphères dont l'une, (α), est en dedans de l'autre, (α_1). Dans le cas (II), le solide considéré remplit l'espace entier en dehors des deux sphères, et la température est zéro à une distance infinie.

» Il y a une interprétation pour le nouveau système de coordon-

---

de votre Journal, page 141. J'ai trouvé, en effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\frac{dp_1dp_2\ldots dh_n\cos m_1p_1\cos m_2p_2\ldots}{(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{(n-1)\pi^{\frac{n+1}{2}}\,\varepsilon^{-(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}u}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\frac{dm_1dm_2\ldots\cos m_1x_1\cos m_2x_2\ldots\,\varepsilon^{-(m_1^2+m_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}u}}{(m_1^2+m_2^2\ldots)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+u^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

d'où l'on déduit immédiatement les intégrales citées.

nées (r, θ) dans un plan, qui est très-simple. En effet, soient A, A′ deux points fixes, et P un point quelconque dont il s'agit d'exprimer la position. Cela peut se faire au moyen de l'angle APA′, que j'appelle θ, et de la raison r de AP à AP′. Quand θ a une valeur constante, le lieu de P est un cercle qui passe par les points A, A′; et quand r a une valeur constante, le lieu de P est un cercle, dont le centre est dans le prolongement de AA′, d'un côté ou de l'autre, suivant que cette valeur est plus grande ou plus petite que l'unité, et qui a la propriété de couper à angle droit tout cercle décrit par les points A, A′.

» Posons maintenant, pour expliquer le second système,

$$r\cos\theta = \xi, \quad r\sin\theta = \eta.$$

Le lieu de P, quand ξ a une valeur constante, sera tel que, si l'on mène, de A, AD perpendiculaire à A′P, la raison DP : AP sera constante, et l'on trouve ainsi que ce lieu est un cercle qui touche en A′ une droite perpendiculaire à A′A; et l'on trouve semblablement que le lieu de P, quand η a une valeur constante, est un cercle qui touche A′A au point A′. »

« Knock, le 16 septembre 1846.

» ... Depuis que je vous ai écrit la dernière fois, j'ai considéré le problème de la distribution d'électricité sur le segment d'une couche sphérique infiniment mince, fait par un plan, ce corps étant composé de matière conductrice, et j'ai trouvé, en expression finie, la solution complète, en supposant que le corps possède une quantité donnée d'électricité et que la distribution se fait sous l'influence de masses électriques données. J'avais l'intention de rédiger de suite pour vous un petit Mémoire sur ces recherches, mais j'ai rencontré quelque difficulté dans l'exposition de la méthode suivie, et comme je suis à présent très-occupé (les cours à Glasgow commencent le 1er novembre, et il me faudra beaucoup de préparation), il me faut différer cette tâche. Je me bornerai pour le moment aux énoncés de quelques-uns des résultats.

» Soit S le corps conducteur sur lequel il s'agit de déterminer la distribution. Pour premier cas, soit Q un point en dehors de S, sur la même surface sphérique dont S fait partie, et supposons que S soit mis en communication avec le sol par un fil conducteur infiniment mince (ainsi le potentiel dans S sera toujours zéro, quels que soient les

corps électrisés qui en soient voisins). Il s'agit de déterminer la distribution d'électricité sur S sous l'influence d'une quantité donnée d'électricité négative Q, concentrée au point Q. Je démontre que l'intensité d'électricité a la même valeur aux points voisins des deux côtés de la couche S, et, en dénotant par σ cette valeur, pour un point quelconque P de S, je trouve

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi^2} \cdot \frac{(s^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta^2},$$

où a, s et r sont les distances du bord de S, du point Q et du point P, à un point C de S qu'on peut appeler son centre, et Δ est la distance entre Q et P. Il est remarquable que cette expression ne contient pas le rayon de la sphère dont S fait partie. En supposant que ce rayon soit infini, on a l'expression pour la distribution d'électricité sur un disque circulaire, sous l'influence d'un point dans son plan, qui est, en effet, la même que celle que Green a donnée pour ce cas.

» Pour trouver la distribution dans le cas de S isolé et électrisé, je remarque que, si la quantité d'électricité sur S est telle que le potentiel qui en résulte a une valeur donnée V, la distribution sur S sera la même que celle qui aurait lieu si S était situé dans l'intérieur d'une couche électrique qui produit le potentiel — V, S étant dans l'état d'un corps qui n'est pas isolé. On peut prendre pour cette couche une sphère concentrique avec celle dont S fait partie; en supposant l'excès du rayon de la première sphère sur le rayon de la seconde infiniment petit, on réduit le problème à la détermination de la distribution sur S, sous l'influence d'une distribution donnée d'électricité sur la sphère dont S fait partie, ce corps S n'étant pas isolé. Ainsi, par intégration, je déduis du résultat donné ci-dessus les expressions

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 f}\left[\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{arc tang}\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2\pi f},$$

$$\sigma' = \frac{V}{2\pi^2 f}\left[\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \text{arc tang}\left(\frac{f^2 - a^2}{a^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

(où f est le diamètre de la sphère dont S fait partie), pour les intensités sur les deux côtés, convexe et concave, de S en un point P. »

Note au sujet de l'article précédent;

PAR J. LIOUVILLE.

1. La Lettre de M. Thomson m'a suggéré quelques remarques que je crois devoir présenter ici, parce qu'elles montreront, ce me semble, plus clairement encore toute l'importance du travail dont le jeune géomètre de Glasgow nous a donné un extrait rapide.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

PROBLÈME. Soient $x, y, \ldots, z$ et $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ deux groupes contenant un nombre égal ou inégal de variables, les premières $x, y, \ldots, z$ indépendantes, les autres $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ fonctions des premières, en sorte que

$$\xi = f(x, y, \ldots, z), \quad \eta = F(x, y, \ldots, z), \ldots, \quad \zeta = \varphi(x, y, \ldots, z);$$

soit encore

$$p = \psi(x, y, \ldots, z).$$

Désignons d'ailleurs par $\xi', \eta', \ldots, \zeta', p'$ ce que deviennent les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta, p$, quand on y remplace $x, y, \ldots, z$ par $x', y', \ldots, z'$. Cela posé, on demande de déterminer les fonctions $f, F, \ldots, \varphi, \psi$, de manière à avoir généralement

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + \ldots + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \ldots + (z' - z)^2}{p' p}.$$

Pour fixer les idées, nous nous bornerons au cas de trois variables x, y, z, et de trois variables ξ, η, ζ; et la question sera de vérifier l'équation

$$(1) \quad (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{p p'}.$$

La même méthode réussirait pour deux groupes $x, y, \ldots, z$ et $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ quelconques. Il n'y aurait de changement que dans quelques détails.

et seulement si le nombre des variables était différent dans les deux groupes. Au surplus, nous n'aurons besoin plus tard que du cas où ce nombre est le même de part et d'autre, et ne surpasse pas trois, ce qui nous permettra d'interpréter géométriquement les résultats de notre analyse.

Donnons à x', y', z' des valeurs particulières x_0, y_0, z_0 à volonté, et représentons par p_0, ξ_0, η_0, ζ_0 les valeurs correspondantes de p', ξ', η', ζ'. L'équation (1) nous donnera

$$p^2 = \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{p_0^2[(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2]}.$$

Mais, pour plus de simplicité, nous mettrons partout $\xi+\xi_0$, $\eta+\eta_0$, $\zeta+\zeta_0$, $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$, au lieu de ξ, η, ζ, x, y, z, et de même $\xi'+\xi_0$, $x'+x_0$, etc., au lieu de ξ', x', etc., ce qui ne change rien aux différences $\xi'-\xi$, $x'-x$, etc. La valeur de p^2 deviendra

$$p^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{p_0^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

et l'équation (1) subsistera telle qu'elle est.

En faisant

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2,$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2, \quad \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=\rho'^2,$$

on aura

$$p^2=\frac{r^2}{p_0^2\rho^2}, \quad p'^2=\frac{r'^2}{p_0^2\rho'^2},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouvera aisément

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}-2\left(\frac{\xi}{\rho^2}\frac{\xi'}{\rho'^2}+\frac{\eta}{\rho^2}\frac{\eta'}{\rho'^2}+\frac{\zeta}{\rho^2}\frac{\zeta'}{\rho'^2}\right)$$
$$=p_0^4\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}-2\left(\frac{x}{r^2}\frac{x'}{r'^2}+\frac{y}{r^2}\frac{y'}{r'^2}+\frac{z}{r^2}\frac{z'}{r'^2}\right)\right].$$

Maintenant donnons à x', y', z' quatre systèmes de valeurs connues à volonté, à chacun desquels répondront des valeurs déterminées de r', ξ', η', ζ', ρ', et nous aurons ainsi quatre équations du premier

degré qui fourniront les valeurs de

$$\frac{\xi}{\rho^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2}, \quad \frac{1}{\rho^2},$$

considérées comme quatre inconnues, en fonction linéaire de

$$\frac{x}{r^2}, \quad \frac{y}{r^2}, \quad \frac{z}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2}.$$

En désignant donc par A, B, C, D des constantes, et par P, Q, R, S des polynômes du premier degré en x, y, z, ces valeurs seront de la forme

$$\frac{\xi}{\rho^2} = A + \frac{P}{r^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2} = B + \frac{Q}{r^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2} = C + \frac{R}{r^2}, \quad \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2}.$$

En faisant la somme des carrés des trois premières, on trouve une valeur de $\frac{1}{\rho^2}$ qui doit être égale à celle que donne la quatrième équation. Ainsi les deux fonctions

$$D + \frac{S}{r^2}$$

et

$$A^2 + B^2 + C^2 + \frac{2(AP + BQ + CR)}{r^2} + \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{r^4}$$

doivent être égales. Mais la première devient une fonction entière quand on la multiplie par r^2. Il faut donc que la seconde le devienne aussi, et que, par conséquent, $P^2 + Q^2 + R^2$ soit également divisible par r^2. Le quotient ne peut évidemment être qu'une constante, puisque le numérateur et le dénominateur sont du même degré. Soit m^2 cette constante, et

$$P^2 + Q^2 + R^2 = m^2 r^2 = m^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

P, Q, R étant des polynômes du premier degré, je fais

$$P = m(ax + by + cz + g),$$
$$Q = m(a'x + b'y + c'z + g'),$$
$$R = m(a''x + b''y + c''z + g''),$$

et j'en conclus par la comparaison des deux membres, d'une part,

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

équations d'où résultent, comme on sait, les équations inverses

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

et, d'autre part,

$$ag + a'g' + a''g'' = 0, \quad cg + c'g' + c''g'' = 0,$$
$$bg + b'g' + b''g'' = 0, \quad g^2 + g'^2 + g''^2 = 0.$$

Si nous admettions que g, g', g'' sont des constantes réelles, l'équation $g^2 + g'^2 + g''^2 = 0$ nous donnerait $g = 0$, $g' = 0$, $g'' = 0$. Mais, dans tous les cas, on arrivera au même résultat à l'aide des trois précédentes, en ayant égard aux équations de condition entre a, b, c, etc. Pour prouver, par exemple, que $g = 0$, il suffira d'ajouter entre elles les trois équations dont nous parlons après les avoir multipliées par les facteurs respectifs a, b, c. Il nous reste donc

$$P = m(ax + by + cz),$$
$$Q = m(a'x + b'y + c'z),$$
$$R = m(a''x + b''y + c''z),$$

a, b, c, etc., satisfaisant aux équations de condition ci-dessus, les mêmes qu'on rencontre dans la transformation de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires aussi. Et comme les équations

$$\frac{\xi}{\rho^2} = A + \frac{P}{r^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2} = B + \frac{Q}{r^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2} = C + \frac{R}{r^2}$$

donnent

$$\frac{1}{\rho} = \left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2.$$

on en conclut les formules suivantes :

$$\xi = \frac{A + \frac{P}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2},$$

$$\eta = \frac{B + \frac{Q}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2},$$

$$\zeta = \frac{C + \frac{R}{r^2}}{\left(A + \frac{P}{r^2}\right)^2 + \left(B + \frac{Q}{r^2}\right)^2 + \left(C + \frac{R}{r^2}\right)^2}.$$

Mais il faut à présent rétablir $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ au lieu de ξ, η, ζ, et $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ au lieu de x, y, z. Ce changement fait, on aura les formules les plus générales qui puissent satisfaire à l'équation (1). Nous avons donc le théorème suivant :

Les formules générales qui peuvent satisfaire à l'équation (1) s'obtiendront en posant d'abord

$$\begin{aligned} X &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0), \\ Y &= a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0), \\ Z &= a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0), \end{aligned}$$

les coefficients a, b, etc., vérifiant les équations de condition

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{aligned}$$

puis prenant

$$u = A + \frac{mX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad v = B + \frac{mY}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad w = C + \frac{mZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et enfin

$$\xi - \xi_0 = \frac{u}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \eta - \eta_0 = \frac{v}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \zeta - \zeta_0 = \frac{w}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Réciproquement, on peut démontrer que l'équation (1) est satisfaite de cette manière, et trouver la valeur de p qui convient.

D'abord, des trois dernières formules on conclut facilement

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2}{(u^2 + v^2 + w^2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)};$$

les trois précédentes donnent de même

$$(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2 = m^2 \frac{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)};$$

enfin, à cause des équations de condition entre a, b, etc., on trouve

$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Il vient donc, en effet,

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{p^2 p'^2},$$

la valeur de p^2 étant

$$p^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)(u^2 + v^2 + w^2)}{m^2},$$

valeur qu'on pourra aisément exprimer en x, y, z, en observant que le produit $(X^2 + Y^2 + Z^2)(u^2 + v^2 + w^2)$ est égal à

$$(A^2 + B^2 + C^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2Amx + 2Bmy + 2Cmz + m^2,$$

et que X, Y, Z sont connus en fonction de x, y, z. La valeur qu'on trouvera ainsi peut se mettre sous la forme

$$mp^2 = (A^2 + B^2 + C^2)[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2],$$

x_1, y_1, z_1 étant des constantes dont voici les valeurs :

$$x_1 = x_0 - \frac{m(Aa + Ba' + Ca'')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_1 = y_0 - \frac{m(Ab + Bb' + Cb'')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_1 = z_0 - \frac{m(Ac + Bc' + Cc'')}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Si donc nous regardons plus tard x, y, z comme étant les coordon-

nées rectangulaires d'un point quelconque, on voit que la quantité p sera proportionnelle à la distance de ce point (x, y, z) à un point fixe (x_1, y_1, z_1). Il est aisé aussi de s'assurer que

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} = 0.$$

2. Pour avoir explicitement ξ, η, ζ en x, y, z, il suffira de remplacer u, v, w, X, Y, Z par leurs valeurs. La première substitution fournit

$$\xi - \xi_0 = \frac{A(X^2 + Y^2 + Z^2) + mX}{(A^2 + B^2 + C^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2Amx + 2Bmy + 2Cmz + m}.$$

Le dénominateur est précisément la valeur de mp^2 dont on vient de donner l'expression en x, y, z, savoir,

$$mp^2 = (A^2 + A^2 + C^2)[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2].$$

Il ne reste donc plus qu'à chercher le numérateur. Le calcul deviendra d'ailleurs fort simple si l'on retranche des deux membres la quantité

$$\frac{A}{A^2 + B^2 + C^2},$$

car alors le second membre pourra se réduire à une fraction ayant pour numérateur un polynôme du premier degré en X, Y, Z, et, par conséquent aussi, en x, y, z. En désignant donc par X un tel polynôme, et posant, pour abréger,

$$\xi_0 + \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2} = \xi^0,$$

on pourra écrire

$$\xi - \xi^0 = \frac{X}{p^2},$$

et de même

$$\eta - \eta^0 = \frac{Y}{p^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{Z}{p^2},$$

η^0, ζ^0 étant des constantes, et Y, Z des fonctions linéaires de x, y, z. Les polynômes X, Y, Z s'obtiendraient sans peine par ce qu'on vient de dire; mais on les trouve sous une forme plus commode en opérant

comme il suit. Il est aisé de voir qu'en attribuant une valeur infinie à une ou plusieurs des quantités x, y, z, ou, si l'on veut, en faisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = \infty,$$

on a

$$\xi = \xi^0, \quad \eta = \eta^0, \quad \zeta = \zeta^0, \quad \frac{p^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{m}.$$

Si donc on introduit cette hypothèse de $x^2 + y^2 + z^2 = \infty$ dans l'équation générale

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{(x' - x + y' - y + z' - z)^2}{p^2 p'^2},$$

il viendra

$$(\xi' - \xi^0)^2 + (\eta' - \eta^0)^2 + (\zeta' - \zeta^0)^2 = \frac{m}{(A^2 + B^2 + C^2) p'^2},$$

d'où, en effaçant les accents,

$$(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2 + (\zeta - \zeta^0)^2 = \frac{m}{(A^2 + B^2 + C^2) p^2}.$$

Mais, d'un autre côté,

$$(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2 + (\zeta - \zeta^0)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{p^4};$$

donc

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{m p^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

c'est-à-dire

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

De là, par un calcul tout semblable à celui qu'on a effectué dans le numéro précédent pour l'équation

$$P^2 + Q^2 + R^2 = m^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

on conclut qu'en représentant par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'$, etc., des constantes assujetties aux équations de condition

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$

du même genre que celles entre a, b, etc., on devra prendre

$$\begin{aligned} X &= \alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1), \\ Y &= \alpha'(x - x_1) + \beta'(y - y_1) + \gamma'(z - z_1), \\ Z &= \alpha''(x - x_1) + \beta''(y - y_1) + \gamma''(z - z_1). \end{aligned}$$

Et, réciproquement, il est facile de vérifier qu'en adoptant ces valeurs de X, Y, Z, les formules

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

qui résultent de notre analyse en faisant, pour abréger,

$$\frac{m}{A^2 + B^2 + C^2} = n, \quad \text{d'où} \quad p^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n}$$

entraîneront l'équation demandée (1) dont la solution générale est exprimée ainsi d'une manière nouvelle et plus simple. En effet, on trouve d'abord

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{n^2[(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]}{(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)},$$

puis

$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

à cause des équations de condition entre α, β, etc. Et de là on tire

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \frac{n^2[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}{(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)},$$

c'est-à-dire l'équation (1), en prenant

$$p^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n} = \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}{n}.$$

3. On pourrait former inversement les valeurs de x, y, z en ξ, η, ζ; mais il est clair sans calcul, et à priori, que ces valeurs doivent s'exprimer par des formules du même genre que celles qui donnent ξ, η, ζ en x, y, z. En effet, p étant une fonction de x, y, z, on peut concevoir cette quantité comme fonction de ξ, η, ζ. Soit donc

$$p = \frac{1}{\varpi}, \quad p' = \frac{1}{\varpi'},$$

ϖ étant une certaine fonction de ξ, η, ζ, et ϖ' la même fonction de ξ', η', ζ'. L'équation (1) se changera dans l'équation nouvelle

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\frac{(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2}{\varpi\varpi'},$$

d'une forme toute semblable à l'équation (1) elle-même, et qui, par conséquent, donnera x, y, z en ξ, η, ζ de la même manière que l'équation (1) a donné ξ, η, ζ en x, y, z.

4. On voit que, par l'échange des lettres x, y, z et ξ, η, ζ les unes dans les autres, une solution particulière de l'équation (1), je veux dire une solution dans laquelle les constantes auraient des valeurs particulières, en donnera une autre, la plupart du temps différente, quoique rentrant toujours, bien entendu, dans le type général indiqué tout à l'heure. Il est aisé aussi de voir que deux solutions données en fournissent une troisième. Supposons, en effet, qu'en prenant pour ξ, η, ζ, q des fonctions de U, V, W, on ait

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2=\frac{(U'-U)^2+(V'-V)^2+(W'-W)^2}{q\,q'^2},$$

et que, de même, en prenant pour U, V, W, p, des fonctions de x, y, z, on ait

$$(U'-U)^2+(V'-V)^2+(W'-W)^2=\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{p\,p'^2},$$

il est clair qu'on pourra exprimer aussi q, ξ, η, ζ en x, y, z, et qu'il viendra

$$(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2=\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{p\,q^2\,p'^2q'^2},$$

d'où une solution nouvelle de notre problème.

On peut dire, en d'autres termes, que diverses transformations qui résolvent ce problème étant opérées successivement, la transformation unique composée de cet ensemble le résout aussi. Et par la manière dont nous avons vérifié ci-dessus notre solution générale, il est manifeste que cette solution n'est que le résultat d'une suite de solutions particulières ainsi ajoutées entre elles pour ainsi dire.

5. Il y a une solution particulière de l'équation (1) que nous devons

étudier spécialement parce qu'elle constitue, à proprement parler, l'élément essentiel de nos formules générales, et qu'elle nous servira d'ailleurs à en bien montrer le sens géométrique. Elle a été employée par M. Thomson, et consiste à poser

$$\xi = \frac{nx}{x^2+y^2+z^2}, \quad \eta = \frac{ny}{x^2+y^2+z^2}, \quad \zeta = \frac{nz}{x^2+y^2+z^2},$$

d'où résulte, en effet, l'équation

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = n^2 \frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)},$$

c'est-à-dire l'équation (1), en prenant

$$p^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{n}.$$

On a alors

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{n}{x^2+y^2+z^2},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{n\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

valeurs de même composition en ξ, η, ζ que les précédentes en x, y, z.

On peut interpréter géométriquement ces formules en regardant x, y, z, par exemple, comme des coordonnées rectangulaires, et ξ, η, ζ comme des paramètres. Les surfaces (ξ), (η), (ζ) pour lesquelles un de ces paramètres conserve même valeur sont des sphères qui se coupent deux à deux orthogonalement, et par l'intersection de trois desquelles M. Thomson détermine la position de chaque point (x, y, z) ou (ξ, η, ζ). Sous ce point de vue, ξ, η, ζ sont des coordonnées curvilignes qui se rapportent à la même figure que les coordonnées rectilignes x, y, z. Mais il est plus commode, je crois, d'introduire dans nos recherches une de ces transmutations de figures si familières aux géomètres, et qui ont tant contribué aux progrès de la science dans ces derniers temps. La transformation dont il s'agit est bien connue, du reste, et des plus simples; c'est celle que M. Thomson lui-même a

jadis employée sous le nom de principe des *images* [*]. Considérez x, y, z comme les coordonnées d'un point quelconque m d'une figure rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et ξ, η, ζ comme celles d'un point μ d'une autre figure rapportée à trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, rectangulaires aussi, et auxquels nous donnons la même origine O, et respectivement les mêmes directions, une de ces figures dérivant de l'autre, et le point μ, en particulier, correspondant au point m, en vertu des relations par lesquelles ξ, η, ζ s'expriment en x, y, z, ou x, y, z en ξ, η, ζ. Il est évident que les deux points correspondants m, μ sont en ligne droite avec l'origine O, et que le produit $Om.O\mu$ des rayons vecteurs Om, $O\mu$ est constant et $= n$. Une des figures se déduit donc de l'autre en prenant sur chacun des rayons vecteurs menés du point O à un point quelconque de la première figure d'autres rayons vecteurs en raison inverse des premiers; les extrémités de ces nouveaux rayons vecteurs déterminent la seconde figure. Nous donnerons à cette transformation le nom de transformation *par rayons vecteurs réciproques*, relativement à l'origine O. Si, pour un point m, on a $Om = \sqrt{n}$, on aura aussi $O\mu = \sqrt{n}$, et les points m et μ qui se correspondent ainsi dans les deux figures coïncideront. En disposant de n, on peut faire en sorte qu'un point donné m reste fixe dans la transformation; il suffit de prendre $n = \overline{Om}^2$, et alors tous les points situés sur la sphère dont O est le centre et Om le rayon, resteront fixes aussi, mais tous les autres seront déplacés.

6. A l'aide de cette transformation *par rayons vecteurs réciproques*, on déduira d'une figure donnée une infinité d'autres figures, soit en changeant l'origine O d'où partent les rayons vecteurs, soit en prenant diverses valeurs de n avec une même origine O, ce qui ne donne, au surplus, lieu qu'à des figures transformées toutes semblables entre elles, du moins tant que n garde le même signe; car les figures qui répondent à deux valeurs de n égales et de signes contraires sont symétriques. On peut d'ailleurs effectuer, l'une après l'autre, des transformations relatives à des origines différentes. Mais je dis que nos formules générales du n° 2 peuvent toujours s'interpréter à l'aide d'une

* Tome X de ce journal, page 364.

seule transformation de cette espèce, en sorte qu'on n'obtiendrait rien de vraiment nouveau en ajoutant d'autres transformations à celle-là.

En effet, dans le cas le plus général, nous pouvons encore considérer x, y, z et ξ, η, ζ comme les coordonnées de deux points m, μ appartenant à deux figures différentes et rapportés à deux systèmes d'axes rectangulaires des x, y, z et ξ, η, ζ. Et voici comment s'opère la transformation de l'une des figures dans l'autre.

D'abord on passe de x, y, z à X, Y, Z par les formules

$$\begin{aligned} X &= \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0), \\ Y &= \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0), \\ Z &= \alpha''(x - x_0) + \beta''(y - y_0) + \gamma''(z - z_0). \end{aligned}$$

Or, à cause des équations de condition entre α, β, etc., ce passage n'est qu'un changement de coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires, qui n'altère en rien la première figure à laquelle il est appliqué; on peut le supposer opéré d'avance, et confondre dès lors X, Y, Z avec x, y, z.

De là nous irons aux formules

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

et nous aurons ainsi une transformation de X, Y, Z en $\xi - \xi^0$, $\eta - \eta^0$, $\zeta - \zeta^0$, que nous regarderons comme des coordonnées rectangulaires prises par rapport aux mêmes axes. Cette transformation est à rayons vecteurs réciproques, comme nous l'avons vu n° 5. Elle s'opère en portant sur les rayons vecteurs menés de l'origine actuelle des longueurs inversement proportionnelles à ces rayons vecteurs; l'ancienne figure se trouve ainsi changée en celle qui résulte des extrémités de toutes ces longueurs. Passer ensuite de $\xi - \xi^0$, $\eta - \eta^0$, $\zeta - \zeta^0$ à ξ, η, ζ, n'est qu'un simple déplacement de l'origine, les axes restant parallèles à eux-mêmes; cela ne produit dans la figure transformée aucune altération.

Nos formules du n° 2 résultent donc d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, combinée avec des changements ordinaires de coordonnées. De telles transformations en nombre quelconque donnent toujours naissance à une équation de la forme (1).

et l'interprétation géométrique des formules par lesquelles nous avions d'abord lié (n° 1) x, y, z et ξ, η, ζ semblait en demander deux, relatives à deux origines différentes, l'une pour le passage de x, y, z à u, v, w, l'autre pour le passage de u, v, w à ξ, η, ζ; mais on voit, par ce qui précède, et grâce aux formules plus simples du n° 2, qu'une seule transformation suffit pour conduire au résultat le plus général : il était important de le démontrer.

7. Les considérations géométriques dont nous venons de faire usage, pour interpréter les formules qui conduisent à l'équation (1), donnent lieu à des conséquences remarquables dont nous allons dire quelques mots. Dans les deux figures que déterminent respectivement les coordonnées x, y, z et les coordonnées ξ, η, ζ, considérons, d'une part, deux points quelconques m, m', et, d'autre part, les points correspondants μ, μ'. Soient D la distance des deux premiers, Δ celle des deux autres, en sorte que

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$
$$\Delta^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2.$$

L'équation (1), qui pourra s'écrire

$$\Delta^2 = \frac{D^2}{p\,p'}, \quad \Delta = \frac{D}{pp'}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{pp'}{D},$$

fournit une relation entre la distance Δ de deux points μ, μ' dans l'une des figures et les quantités D, p, p'. Nous venons de dire que D est la distance des deux points m, m' correspondants dans l'autre figure; quant à p et p', ce sont, à un facteur constant près, les distances des points m, m' à un certain point fixe. Toute relation métrique entre deux ou plusieurs distances Δ dans l'une des figures fournira donc immédiatement une relation analogue dans l'autre figure. Mais il ne faut pas croire que les divers points correspondants à ceux de la droite Δ soient sur la droite D; cela arrive pour les points extrêmes par la définition même de ces droites, mais n'a pas lieu, en général, pour les points intermédiaires. En général, la suite des points correspondants à ceux d'une droite de la première figure forme dans la seconde figure une circonférence de cercle, laquelle ne se réduit à une ligne droite que dans un cas particulier, celui où son rayon est infini.

Ayant en ξ, η, ζ l'équation d'une surface ou les équations d'une ligne appartenant à la première figure, il suffit de substituer à ξ, η, ζ leurs valeurs pour former en x, y, z l'équation de la surface ou les équations de la ligne correspondante. On trouve bien facilement, de cette manière, que des plans et des sphères se transforment en des sphères qui peuvent se réduire à des plans quand le rayon devient infini; que, de même, des droites et des circonférences de cercle se transforment en des circonférences de cercle, etc. Mais, pour suivre le mécanisme de ces transformations, il suffit de considérer la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui combinée avec des changements de coordonnées donne, comme on l'a vu, la transformation la plus générale. Soit donc

$$\xi = \frac{nx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{nx}{r}, \quad x = \frac{n\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\xi}{\rho},$$

$$\eta = \frac{ny}{x^2+y^2+z^2} = \frac{ny}{r}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\eta}{\rho},$$

$$\zeta = \frac{nz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{nz}{r}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{n\zeta}{\rho},$$

$$\Delta = \frac{D}{pp'} = \frac{nD}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}} = \frac{nD}{rr'},$$

l'ensemble des formules relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques. On en conclut immédiatement ce que nous venons d'avancer, concernant les plans et les sphères, les droites et les circonférences de cercle. Mais on voit, de plus, et même sans calcul, que les plans qui passent par le point O, origine des rayons vecteurs, sont les seuls qui restent des plans dans la transformation: avant et après, leur position est la même, quoique leurs divers points, bien entendu, se soient déplacés pour se substituer les uns aux autres, ceux qui étaient loin de l'origine en étant à présent devenus voisins, et *vice versâ*. Tout autre plan se transforme en une sphère passant par le point O où la transformation amène tous les points situés à l'infini et ayant son centre sur la perpendiculaire au plan menée du point O: la perpendiculaire et le diamètre de la sphère ont un produit égal à la constante n, et se déduisent ainsi facilement l'une de l'autre. Il est inutile

l'ajouter que deux sphères qui correspondent à deux plans parallèles se touchent au point O. De même, deux sphères ainsi posées se transformeraient en deux plans parallèles. Mais une sphère qui ne passe pas par le point O doit rester une sphère, puisqu'elle ne peut acquérir aucun point à l'infini. Les droites passant par le point O restent des droites, et conservent leur position invariable. Toute autre droite donne lieu à une circonférence de cercle dont le plan est déterminé par la droite et par le point O, et dont le centre est situé sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite; le diamètre est le quotient de la constante n par cette perpendiculaire. Les circonférences provenant de droites parallèles sont toutes tangentes à une parallèle menée par le point O à ces droites. On peut voir, enfin, que la transformée d'une circonférence est une droite quand la circonférence passe par le point O, et, dans tout autre cas, reste une circonférence.

Une propriété remarquable de ce genre de transformation consiste en ce que les deux triangles formés par trois points infiniment voisins quelconques de la figure primitive et les trois points correspondants de sa transformée sont semblables l'un à l'autre, en sorte que si deux lignes se coupent dans l'une des deux figures sous un certain angle, les lignes correspondantes de l'autre figure se couperont sous le même angle [*]. La démonstration de cette propriété repose sur l'équation (1), à laquelle nous avons donné la forme

$$\Delta = \frac{D}{pp'}.$$

Supposons, en effet, que les deux points m, m', ou (x, y, z), (x', y', z'), soient infiniment voisins, et que leur distance D soit représentée par ds. Représentons par dz celle des deux points correspondants μ, μ'.

---

[*] De la similitude des triangles infiniment petits correspondants, il résulte encore que la figure transformée est semblable à la figure primitive, ou à sa symétrique, dans ses éléments infiniment petits. En s'en tenant au premier cas, qui est proprement celui de nos formules, où nous prenons naturellement la constante n positive, on aura, à trois dimensions, une sorte de représentation des corps, analogue au tracé des cartes géographiques, pour lesquelles le rapport de similitude des éléments correspondants est variable aussi d'un lieu à l'autre.

Comme p et p' n'auront pas de différence sensible, il nous viendra

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2}.$$

Les éléments $d\sigma$, ds ont donc en chaque lieu un rapport constant qui dépend de p et change, en général, d'un lieu à l'autre. Considérons un troisième point m'' infiniment voisin des deux premiers, et désignons par ds' et ds'' ses distances à m et à m'; $d\sigma'$, $d\sigma''$ étant les distances correspondantes dans la seconde figure, on aura encore

$$d\sigma' = \frac{ds'}{p^2},$$

$$d\sigma'' = \frac{ds''}{p^2}.$$

Donc

$$d\sigma : d\sigma' : d\sigma'' :: ds : ds' : ds''.$$

Ainsi, le triangle infinitésimal $mm'm''$ est semblable au triangle correspondant $\mu\mu'\mu''$. L'angle de ds avec ds' est, par conséquent, le même que celui de $d\sigma$ avec $d\sigma'$. Cette démonstration, on le voit, n'exige pas même que l'équation (1) ait lieu pour deux points situés à une distance finie; elle demande seulement que cette équation ait toujours lieu pour deux points infiniment voisins. On doit en dire autant d'un théorème que je vais établir, et qui n'est qu'un corollaire de la proposition précédente.

Une surface appartenant à l'une des deux figures étant donnée, représentez-vous les lignes de courbure de cette surface, et les deux séries de surfaces développables, orthogonales entre elles et à la surface donnée, qui sont formées par les normales successives. Dans la seconde figure, les séries de surfaces correspondantes resteront orthogonales entre elles et à la transformée de la surface donnée; par suite, en vertu du beau théorème de M. Ch. Dupin, elles traceront encore sur cette transformée des lignes de courbure. Ces lignes de courbure résulteront ainsi des lignes de courbure de la première surface donnée, et seront immédiatement connues si les autres le sont. Il sera aisé d'appliquer ce théorème aux surfaces du second degré, comme aussi aux systèmes triples de surfaces orthogonales que M. Serret a indiqués

dans une Note récente [*], et qui, par notre transformation, en donneront d'autres non moins curieux, etc.

Proposons-nous, par exemple, de trouver les lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères qui touchent trois sphères données, problème que M. Ch. Dupin a résolu jadis dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome I, page 22. Soient O et P les points d'intersection de ces trois sphères; prenons le point O pour origine, et opérons une transformation par rayons vecteurs réciproques, ce qui nous fournira une seconde figure d'où nous reviendrons aisément à la première. Dans la seconde figure, les trois sphères données seront remplacées par trois plans qui se couperont en un point H correspondant au second point P d'intersection de nos trois sphères. La surface enveloppe des sphères tangentes à ces trois plans sera (en se bornant à un des angles solides et à son opposé) celle d'un cône droit à base circulaire ayant son sommet au point H, et circonscrit à une quelconque des sphères tangentes aux trois plans. Les lignes de courbure de cette surface conique sont : 1° les génératrices rectilignes qui passent toutes par le point H : dans le retour à la première figure, ces droites deviendront des cercles passant tous par le point P, dont les tangentes en P feront toutes le même angle avec la tangente au cercle dans lequel se transforme l'axe du cône, d'où résultera un nouveau cône droit, et passant toutes aussi avec des circonstances semblables par le point O : 2° des cercles, dont les plans sont tous parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe du cône, et qui, lors du retour à la première figure, deviendront des cercles coupant à angle droit ceux qui résultent des génératrices rectilignes. Les lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données sont donc des circonférences de cercle.

On démontre avec la même facilité le théorème de M. Dupin concernant la courbe que trace sur chacune des trois sphères données la sphère variable qui les touche. En effet, quand les trois sphères données sont remplacées par trois plans, il est clair que la suite des points suivant lesquels la sphère variable touche un quelconque des plans est une ligne droite passant par le point d'intersection H. Donc, en revenant

[*] Page 241 du présent volume.

aux trois sphères données, la courbe demandée est une circonférence de cercle qui passe par les points O et P. Il peut arriver, bien entendu, que les points O et P soient imaginaires; mais il n'y a alors aucun changement essentiel à faire dans ce que nous venons de dire, et nos conclusions subsistent.

La circonstance d'une origine O imaginaire aurait plus d'inconvénient s'il s'agissait de résoudre le problème d'une sphère tangente à quatre autres, en le ramenant au problème très-simple de trouver une sphère tangente à une sphère donnée et à trois plans donnés; mais on y remédierait en augmentant d'une même quantité les rayons des quatre sphères données, ce qui ne change pas la position du centre de la sphère tangente. De même, en se bornant à considérer des points tous situés dans un plan passant par l'origine O, on ramènera la détermination du cercle tangent à trois autres à celle d'un cercle qui touche un cercle donné et deux droites données.

En général, les systèmes de sphères ou de cercles, et spécialement de sphères ou de cercles passant par un point donné, jouissent de propriétés curieuses dont beaucoup deviennent intuitives par la transformation dont nous venons de nous occuper. On peut appliquer en particulier cette remarque aux théorèmes que M. Miquel a donnés dans son Mémoire sur les angles curvilignes [*]. Pour nous borner au cas le plus simple, il est évident que, dans un triangle ABC formé par trois arcs de cercles passant tous par un même point O, la somme des angles vaut 2 droits, puisque notre transformation rend ce triangle rectiligne sans altérer ses angles.

8. Le passage des relations métriques d'une figure à l'autre, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, en allant des coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées x, y, z, s'opère à l'aide de la formule

$$\Delta = \frac{n\mathrm{D}}{rr'},$$

ou simplement

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}}{rr'}.$$

[*] Tome IX de ce Journal, page 20.

en posant $n = 1$, ce qui n'a aucun inconvénient. Mais en désignant par O l'origine, dans la seconde figure seulement, et en employant les autres lettres A, B, etc., pour représenter à la fois les points de la première figure et les points correspondants de la seconde figure, cette formule revient à dire que, dans toute relation entre des distances AB, BD, etc., il faut remplacer chaque distance telle que AB par $\frac{AB}{OA.OB}$. Voilà donc une règle pratique très-commode; cette règle convient aussi bien au cas du plan qu'à celui de l'espace. Deux exemples suffiront.

Que des droites partant d'un point fixe A coupent chacune un cercle en deux points B et C, B′ et C′, etc., on aura

$$AB \times AC = AB' \times AC' = \text{constante}.$$

Donc, dans la figure transformée,

$$\frac{AB}{OA.OB} \times \frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB'}{OA.OB'} \times \frac{AC'}{OA.OC'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{AB}{OB} \times \frac{AC}{OC} = \text{constante}.$$

D'ailleurs les points A, B, C, qui étaient en ligne droite, se trouvent à présent sur une circonférence de cercle passant par le point O. Nous voyons par là que les cercles passant par deux points fixes A, O coupent un cercle donné en deux points B, C tels, que le rapport des produits des distances $AB \times AC$ et $OB \times OC$ a une valeur constante pour tous ces cercles.

Que les côtés BC, AC, AB d'un triangle rectiligne ABC soient coupés en trois points A′, B′, C′ par une transversale, on aura

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB'.$$

Donc, dans la figure transformée,

$$\frac{AC'}{OA.OC'} \times \frac{BA'}{OB.OA'} \times \frac{CB'}{OC.OB'} = \frac{BC'}{OB.OC'} \times \frac{CA'}{OC.OA'} \times \frac{AB'}{OA.OB'},$$

ce qui redonne

$$AC' \times BA' \times CB' = BC' \times CA' \times AB'.$$

Mais cette relation s'applique à présent à un triangle curviligne ABC formé par trois cercles qui passent tous au point O et dont les cotés sont coupés en A′, B′, C′ par un quatrième cercle passant aussi au point O. Il est, du reste, inutile d'ajouter que AC′, BA′, etc., sont les plus courtes distances des points A et C′, B et A′, etc., et non des segments mesurés sur les côtés du triangle curviligne.

On généraliserait aisément de la même maniere le théoreme relatif à un polygone gauche coupé par un plan. Mais en voilà assez sur ce sujet.

9. Étant données deux sphères qui ne se coupent pas, on peut toujours placer l'origine sur la droite qui joint leurs centres, en un point réel tel, qu'après la transformation par rayons vecteurs réciproques, ces deux sphères seront concentriques. Prenons la droite des centres pour axe des x; désignons par h la distance inconnue du point O au centre de la première sphère, et par $h+l$ sa distance au centre de la seconde sphère; soient k, k' les rayons. Les équations des deux spheres seront, avant la transformation,

$$(x-h)^2+y^2+z^2=k^2,$$
$$(x-h-l)^2+y^2+z^2=k'^2,$$

et après la transformation, qui consistera à remplacer x, y, z par

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

elles deviendront

$$\left(x-\frac{h}{h^2-k^2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{k^2}{(h^2-k^2)^2},$$
$$\left[x-\frac{h+l}{(h+l)^2-k'^2}\right]^2+y^2+z^2=\frac{k'^2}{[(h+l)^2-k'^2)]^2}.$$

Pour que le centre soit le même à présent, il faut et il suffit que

$$\frac{h}{h^2-k^2}=\frac{h+l}{(h+l)^2-k'^2},$$

d'où

$$lh^2+(l^2+k^2-k'^2)h+lk^2=0,$$

équation du second degré qui donnera pour h deux valeurs,

$$h = -\frac{l^2 + k^2 - k'^2}{2l} \pm \frac{1}{2l}\sqrt{G},$$

en posant

$$G = (l - k - k')(l - k + k')(l + k - k')(l + k + k');$$

et il est aisé de voir que G sera positive si les deux spheres qu'on a données d'abord ne se coupent pas.

10. Ce théoreme pourra être utile en géométrie; mais il aura surtout une application importante dans les questions de physique mathématique. Essayons ici d'indiquer rapidement l'usage, en ce genre de questions, de la transformation générale qui donne l'équation (1). La Lettre de M. Thomson nous servira de guide; nous y ajouterons quelques développements. La généralité plus ou moins grande de la solution par laquelle on satisfait à l'équation (1) ne change en rien la marche à suivre, qui reste la même dans tous les cas.

Et d'abord de l'équation

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{pp'}{D}$$

on peut conclure, avec M. Thomson, que, si une fonction U de ξ, η, ζ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2} = 0,$$

cette même fonction, divisée par p et exprimée en x, y, z, vérifiera l'équation de même forme

$$\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2} + \frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2} + \frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2} = 0.$$

De là une liaison entre deux problemes distincts concernant tous deux l'équilibre de température dans les corps homogènes, mais relatifs à deux systèmes dont l'un résulte de l'autre par la transformation qui lie ξ, η, ζ à x, y, z.

Que le premier systeme soit formé de deux spheres qui ne se coupent pas, que la température soit donnée en chaque point de leurs surfaces,

et demandons quelle est la loi des températures permanentes dans l'espace compris entre elles, si l'une est intérieure à l'autre, ou dans l'espace infini extérieur à toutes deux, si l'une est en dehors de l'autre, en ajoutant dans ce dernier cas la condition que la température soit nulle à l'infini. On ramènera cette question au cas très-facile de deux sphères concentriques. Cela résulte du théorème établi ci-dessus et en montre toute l'importance. En indiquant cette application à la théorie de la chaleur, M. Thomson ajoute, du reste, avec raison qu'elle s'étend d'elle-même à la théorie de l'électricité.

Dans la théorie de l'électricité ou du magnétisme, et, en général, dans la théorie de l'attraction, la quantité que G. Green et M. Gauss nomment *potentiel*, c'est-à-dire la quantité qu'on obtient en faisant la somme des éléments attractifs ou répulsifs d'une masse divisés par leurs distances à un point, joue un rôle capital. On connaît le problème de M. Gauss : « Distribuer sur une surface donnée une masse attractive ou répulsive, de telle sorte que le potentiel ait en chaque point de la surface une valeur donnée. » On a résolu ce problème pour différentes surfaces, en particulier pour l'ellipsoïde. Or la solution relative à une surface quelconque donne la solution pour toutes les surfaces qui se déduisent de celle-là par une transformation pour laquelle l'équation (1) ait lieu. Ayant, en effet, l'équation

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q$$

pour la première surface, on aura pour la seconde surface une équation du même genre, en remplaçant par leurs nouvelles valeurs Δ et $d\omega'$. On a

$$\Delta = \frac{D}{pp'}.$$

Quant à $d\omega'$, j'observe que les éléments linéaires correspondants $d\sigma$ et ds sont liés par la formule

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2}.$$

Donc entre deux éléments superficiels correspondants $d\omega$, da, on aura

$$d\omega = \frac{da}{p^4}, \quad d\omega' = \frac{da'}{p'^4};$$

par suite,

$$\int\int \frac{\gamma'}{p'^3}\frac{da'}{D} = \frac{Q}{p},$$

ce qui résout le problème de M. Gauss pour la surface transformée.

On peut voir aussi que les équations désignées par (A), (B), (C) dans mes Lettres à M. Blanchet [*], et qui sont d'un si grand usage dans la plupart des questions physico-mathématiques concernant l'ellipsoïde, ont leurs analogues, qu'on en déduit immédiatement pour les surfaces transformées de l'ellipsoïde [**].

On peut considérer encore l'équation

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2},$$

et lui faire subir la transformation de ξ, η, ζ en x, y, z.

A cause de l'équation

$$d\sigma = \frac{ds}{p^2},$$

qui peut s'écrire

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz}{p^4},$$

on trouve, par des formules connues, que la quantité

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2}$$

est égale à

$$p^6\left(\frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dx}}{dx} + \frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dy}}{dy} + \frac{d.\frac{1}{p^2}\frac{dU}{dz}}{dz}\right),$$

---

[*] *Voyez* le tome XI de ce Journal.

[**] Parmi ces surfaces, il faut distinguer celle que donne la transformation *par rayons vecteurs réciproques*, en mettant l'origine au centre même de l'ellipsoïde. On sait qu'elle est aussi le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à un autre ellipsoïde dont les axes ont pour valeurs les inverses des valeurs des axes de l'ellipsoïde donné. Une propriété analogue a lieu dans le plan, pour la lemniscate par exemple, qui peut ainsi être engendrée de deux manières différentes

c'est-à-dire à

$$p^4\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)-2p^3\left(\frac{dU}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dp}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dp}{dz}\right),$$

ou enfin à

$$p^5\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right),$$

en se rappelant que

$$\frac{d^2\frac{1}{p}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{p}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{p}}{dz^2}=0.$$

Par là on voit d'abord que l'équation

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{d^2U}{d\eta^2}+\frac{d^2U}{d\zeta^2}=0$$

revient à celle-ci :

$$\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}=0,$$

ce que nous savions déjà. On voit ensuite que l'équation

$$\frac{d^2U}{dt^2}=\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{d^2U}{d\eta^2}+\frac{d^2U}{d\zeta^2}$$

se transforme en

$$\frac{d^2U}{dt^2}=p^5\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right),$$

ou, mieux encore, en

$$\frac{d^2.p^{-1}U}{dt^2}=p^4\left(\frac{d^2.p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2.p^{-1}U}{dz^2}\right).$$

Réciproquement, cette dernière équation, où le coefficient p varie proportionnellement à la distance du point (x, y, z) à un point fixe, se

---

au moyen d'une hyperbole équilatère, circonstance dont M. Chasles a tiré un heureux parti dans ses recherches *sur les arcs égaux de la lemniscate* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI, séance du 21 juillet 1845).

ramène à l'équation

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2},$$

qui est à coefficients constants, résultat qui trouve une application utile dans la théorie du son.

On peut enfin ajouter que les équations aux différences partielles

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)^2 = Q$$

et

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = \frac{Q}{p},$$

sont des transformées l'une de l'autre, ce qui pourra servir dans les questions de dynamique, où MM. Hamilton et Jacobi ont introduit de telles équations aux différences partielles.

On me pardonnera, je l'espère, ces développements que j'ai cru pouvoir donner, à la suite des deux Lettres si intéressantes de M. Thomson, sans le gêner dans ses recherches. Mon but sera rempli, je le répète, s'ils peuvent aider à bien faire comprendre la haute importance du travail de ce jeune géomètre, et si M. Thomson lui-même veut bien y voir une preuve nouvelle de l'amitié que je lui porte et de l'estime que j'ai pour son talent.

Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit de deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface;

PAR J. LIOUVILLE.

1. Dans le beau Mémoire intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, M. Gauss a fait voir que l'expression du produit RR des deux rayons de courbure principaux en un point quelconque M d'une surface (produit dont la valeur inverse donne ce qu'il nomme la mesure de courbure en ce point) dépend uniquement de l'expression générale de l'élément linéaire ds qui joint deux points infiniment voisins quelconques de cette surface. Supposons, en effet, les trois coordonnées rectangles x, y, z de chaque point de la surface exprimées au moyen de deux variables indépendantes u, v; et soit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

E, F, G désignant des fonctions de u, v. M. Gauss détermine le produit RR′ au moyen des trois quantités E, F, G et de leurs dérivées du premier et du second ordre par rapport à u, v. Pour calculer RR′, on n'a donc besoin que des coefficients E, F, G, et non des expressions de x, y, z en u, v; de sorte que, si E, F, G ont les mêmes valeurs en u, v pour deux surfaces différentes, le produit RR′ sera aussi le même pour ces deux surfaces.

Une surface étant donnée, traçons-y deux systèmes de lignes dont l'intersection puisse nous servir à fixer la position des divers points M sur la surface, et prenons pour variables u, v des quantités dépendantes de ces lignes, dont les valeurs restent les mêmes pour les différentes surfaces que l'on peut déduire de la proposée, en la déformant, par une simple flexion, à la manière des surfaces développables qui se déduisent ainsi du plan. Si l'on considère une ligne quelconque sur la surface donnée, et la ligne correspondante sur une autre surface

qui en dérive, comme nous venons de l'indiquer, il est clair non-seulement que les éléments des deux lignes seront égaux chacun à chacun, mais encore qu'ils auront tous deux la même valeur en u, v, fournie par la formule unique

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Il y a, du reste, on le conçoit, une infinité de systèmes de variables u, v pour lesquels l'expression de ds^2 reste ainsi constante d'une de nos surfaces à l'autre. Par exemple, u et v pourront être les plus courtes distances, mesurées sur la surface donnée par des lignes géodésiques, du point M à deux points fixes A, B; ces distances géodésiques ne changeront pas dans les transformations éprouvées par la surface, et le point M résultera toujours de l'intersection de deux courbes tracées par les extrémités mobiles de deux fils de longueurs constantes ayant A et B respectivement pour extrémités fixes et tendus sur la surface. On pourrait aussi ne considérer qu'un seul point fixe et prendre pour les variables u et v la longueur de l'arc géodésique AM et l'angle qu'il fait avec un autre arc géodésique fixe AB. L'expression de ds sera, suivant les cas, plus ou moins simple. Il est aisé de voir que l'on aura $F = 0$ si u et v sont les paramètres de deux systèmes de lignes orthogonales entre elles, de sorte que la valeur de ds^2 se réduit alors à

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Nous verrons même qu'on peut arriver à avoir, pour une surface quelconque, $E = G$, ou $E = 1$. Mais, quel que soit le système de coordonnées ainsi adopté, l'identité d'expression des éléments linéaires correspondants ds suffit à M. Gauss pour en conclure que le produit RR′ sera aussi constant aux divers points correspondants de toutes nos surfaces.

2. J'ai dit qu'en choisissant convenablement les variables u, v, on peut supposer le coefficient F réduit à zéro et les deux autres coefficients égaux entre eux. En écrivant α, β au lieu de u, v, et désignant par λ la valeur commune des deux coefficients, on a ainsi la formule

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

qui est beaucoup plus simple, et dont l'emploi permet d'arriver assez

facilement au beau théorème concernant le produit RR′, que M. Gauss a déduit de calculs très-pénibles. Pour effectuer la réduction dont nous parlons, il faudrait, il est vrai, savoir intégrer une certaine équation différentielle du premier ordre, ou, si l'on veut, trouver le facteur à l'aide duquel on rend son premier membre une différentielle exacte. Mais, pour le but que nous nous proposons ici, on a besoin seulement d'être assuré que la valeur de ds^2 est susceptible de la forme indiquée; il n'est pas nécessaire d'avoir effectué le calcul qui doit l'y ramener.

Rappelons d'abord en peu de mots comment on prouve qu'il est toujours permis de supposer

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Le second membre de l'équation

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

qui est du second degré par rapport aux différentielles du, dv, et qui, par sa nature même, doit rester > 0 tant que l'on n'a pas à la fois $du = 0$ et $dv = 0$, est le produit des deux expressions esssentiellement imaginaires

$$du\sqrt{E} + \frac{dv}{\sqrt{E}}(F + \sqrt{EG - F^2}\sqrt{-1})$$

et

$$du\sqrt{E} + \frac{dv}{\sqrt{E}}(F - \sqrt{EG - F^2}\sqrt{-1}).$$

Soit $\mu + \nu\sqrt{-1}$ le facteur à l'aide duquel la première de ces expressions devient une différentielle exacte (on aurait aisément ce facteur si l'on savait intégrer l'équation différentielle qu'on obtient en égalant l'expression citée à zéro), et désignons par $d(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ la différentielle résultant de la multiplication par ce facteur; la seconde expression, multipliée par $\mu - \nu\sqrt{-1}$, donnera de même la différentielle $d(\alpha - \beta\sqrt{-1})$. On aura donc, en multipliant les deux différentielles,

$$(\mu^2 + \nu^2)ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

d'où

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}.$$

Les deux variables α, β constituent un genre remarquable de coordonnées sur la surface. Le rectangle $d\alpha d\beta$ manquant dans l'expression $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$, les équations

$$\alpha = \text{constante}, \quad \beta = \text{constante}$$

représentent deux familles de courbes qui se coupent à angle droit [*], et chaque point M de la surface est déterminé par la rencontre de deux de ces courbes. On sait aussi que les éléments ds'', ds' de ces deux

---

[*] Il suffit que le rectangle $d\alpha d\beta$ manque dans l'expression $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$, pour que les courbes déterminées sur la surface par les paramètres α, β se coupent à angle droit. Mais l'égalité des coefficients de $d\alpha^2$ et $d\beta^2$ donne à ces deux systèmes de courbes orthogonales conjuguées un caractère tout particulier. En supposant les différentielles $d\alpha$, $d\beta$ constantes, on prouve aisément qu'ils divisent la surface en rectangles semblables, et même en carrés si $d\alpha = d\beta$. Cette propriété les distingue de tous les autres. Je confonds avec eux, bien entendu, ceux qu'on en déduirait en remplaçant α par une fonction de α, et β par une fonction de β, car les lignes (α), (β) resteraient les mêmes.

Au reste, comme il y a une infinité de facteurs qui rendent le premier membre d'une équation une différentielle exacte, il y a aussi une infinité de systèmes de variables α, β qui donnent $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$. En effet, au lieu du facteur $\mu + \nu\sqrt{-1}$ qui produit la différentielle $d(\alpha + \beta\sqrt{-1})$, on peut employer le facteur $\varpi(\alpha - \beta\sqrt{-1})(\mu + \nu\sqrt{-1})$ qui produira la différentielle

$$\varpi(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = d\Pi(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

en prenant pour α' la partie réelle, et pour β' le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le second membre, on aura encore $ds^2 = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2)$, ce qu'on peut aisément vérifier. La formule

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$$

fournit, au surplus, la solution la plus générale du problème proposé. On peut le démontrer comme il suit. Pour que les deux systèmes (α, β), (α', β') donnent

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

courbes (α), (β) sont exprimés par

$$ds'' = \sqrt{\lambda}\,.\,d\beta, \quad ds' = \sqrt{\lambda}\,.\,d\alpha$$

3. Maintenant je vais démontrer le théorème de M. Gauss, en prouvant qu'on a

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2\log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2\log\lambda}{d\beta^2}\right),$$

---

il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{d\beta}\right)^2$$

et

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\alpha'}{d\beta} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0.$$

La seconde équation exige que l'on ait

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} : \frac{d\alpha'}{d\alpha} = -\frac{d\alpha'}{d\beta} : \frac{d\beta'}{d\beta} = \omega,$$

d'où

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} = \omega\frac{d\alpha'}{d\alpha}, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = -\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha'}{d\beta},$$

et la première équation donne ensuite

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2 = \omega^2\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = \mp\omega\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \mp\frac{d\beta'}{d\alpha}.$$

ce qui, à cause de l'équation

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\alpha'}{d\beta} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

fournit encore

$$\frac{d\beta'}{d\beta} = \pm\frac{d\alpha'}{d\alpha}.$$

Il est aisé d'en conclure

$$\frac{d(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})}{d\beta} = \pm\sqrt{-1}\,\frac{d(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})}{d\alpha}.$$

et, par conséquent,

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

les signes des rayons R, R′ étant pris comme dans la formule ordinaire

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2},$$

où p, q, r, s, t sont les dérivées du premier et du second ordre de l'ordonnée z exprimée en x et y, savoir :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Donnons aux axes des x, y, z une position particulière. Mettons l'origine des coordonnées au point M de la surface, et faisons coïncider l'axe des z avec la normale en M, et les axes des x et des y avec les tangentes aux deux lignes (β), (α) qui passent par ce point M. En augmentant ou en diminuant chaque quantité α, β d'une constante, on pourra faire en sorte que α et β soient nulles au point M : c'est ce que nous admettrons désormais. D'après la position particulière de nos axes, quand on fera $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on pourra confondre dx avec ds', dy avec ds''.

Les valeurs générales de dx et dy étant représentées par

$$dx = kd\alpha + ld\beta, \quad dy = md\alpha + nd\beta,$$

développons les coefficients k, l, m, n suivant les puissances ascendantes des quantités α, β qui sont très-petites dans les environs du point M, en concevant toutefois les séries complétées par des restes, et bornées ainsi à un nombre limité de termes, pour n'avoir pas à nous occuper de leur convergence. Posons, par exemple,

$$k = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots.$$

k_0 étant une constante, k_1 un polynôme homogène en α, β, du premier degré, k_2 un polynôme homogène du second degré, etc. En adoptant une notation semblable pour tous les coefficients, on aura

$$dx = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)\,d\alpha + (l_0 + l_1 + l_2 + \ldots)\,d\beta,$$
$$dy = (m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)\,d\alpha + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)\,d\beta.$$

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ces valeurs deviennent

$$dx = k_0 d\alpha + l_0 d\beta, \quad dy = m_0 d\alpha + n_0 d\beta.$$

Mais alors on doit avoir $dx = ds'$, $dy = ds''$. Or ds' ne contient pas $d\beta$, et ds'' ne contient pas $d\alpha$; donc $l_0 = 0$, $m_0 = 0$, ce qui réduit les valeurs générales de dx et dy à

$$dx = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)\,d\alpha + (l_1 + l_2 + \ldots)\,d\beta,$$
$$dy = (m_1 + m_2 + \ldots)\,d\alpha + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)\,d\beta$$

De plus, les conditions d'intégrabilité des seconds membres donnent, par la comparaison des parties homogènes,

$$\frac{dk_1}{d\beta} = \frac{dl_1}{d\alpha}, \quad \frac{dk_2}{d\beta} = \frac{dl_2}{d\alpha}, \ldots,$$
$$\frac{dm_1}{d\beta} = \frac{dn_1}{d\alpha}, \quad \frac{dm_2}{d\beta} = \frac{dn_2}{d\alpha}, \ldots.$$

Enfin, puisqu'on doit avoir $z = 0$ et $dz = 0$ au point M, on pourra écrire

$$z = \frac{a\alpha^2}{2} + b\alpha\beta + \frac{c\beta^2}{2} + \ldots,$$

les termes qui viennent après les trois premiers étant d'un ordre supérieur au second. De là

$$dz = (a\alpha + b\beta + \ldots)\,d\alpha + (b\alpha + c\beta + \ldots)\,d\beta,$$

les termes à ajouter entre les parenthèses étant au moins du second ordre.

D'après les valeurs précédentes de dx et dy, on a $x = k_0\alpha$, $y = n_0\beta$, aux termes près du second ordre en α, β, et, par conséquent, $x^2 = k_0^2\alpha^2$, $xy = k_0 n_0 \alpha\beta$, $y^2 = n_0^2\beta^2$, aux termes près du troisième ordre. Il s'ensuit qu'en négligeant les puissances de x et y supérieures à la seconde, on a

$$z = \frac{ax^2}{2k_0^2} + \frac{bxy}{k_0 n_0} + \frac{cy^2}{2n_0^2};$$

de sorte qu'au point M, l'expression de RR′ est fournie par

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = \frac{ac - b^2}{k_0^2 n_0^2}.$$

Maintenant j'observe que la valeur de ds^2 doit être de la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Donc

$$\lambda = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)^2 + (m_1 + m_2 + \ldots)^2 + (a\alpha + b\beta + \ldots)^2$$
$$= (l_1 + l_2 + \ldots)^2 + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)^2 + (b\alpha + c\beta + \ldots)^2,$$

et

$$0 = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)(l_1 + l_2 + \ldots) + (m_1 + m_2 + \ldots)(n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)$$
$$+ (a\alpha + b\beta + \ldots)(b\alpha + c\beta + \ldots).$$

En développant cette dernière équation pour égaler séparément à zéro les termes homogènes, on a

$$k_0 l_1 + n_0 m_1 = 0,$$
$$k_0 l_2 + k_1 l_1 + n_0 m_2 + m_1 n_1 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = 0, \quad \text{etc.}$$

La comparaison des deux valeurs de λ entre elles donne d'autres résultats. On trouve d'abord

$$k_0^2 = n_0^2, \quad \text{d'où} \quad n_0 = \pm k_0.$$

Il est d'ailleurs évident qu'on peut toujours prendre le signe supérieur, sauf à changer, s'il le faut, α en $-\alpha$; nous ferons donc

$$n_0 = k_0.$$

On trouve ensuite

$$2k_0 k_1 = 2n_0 n_1, \quad \text{d'où} \quad n_1 = k_1;$$

et

$$k_1^2 + 2k_0 k_2 + m_1^2 + (a\alpha + b\beta)^2 = l_1^2 + n_1^2 + 2n_0 n_2 + (b\alpha + c\beta)^2.$$

Mais cette dernière équation et les deux premières qu'on avait obtenues peuvent être simplifiées. A cause de $n_0 = k_0$, l'équation

$$k_0 l_1 + n_0 m_1 = 0$$

devient, en effet,

$$m_1 = -l_1;$$

les deux autres se réduisent ensuite à

$$k_0 l_2 + k_0 m_2 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = 0,$$
$$2k_0 k_2 + (a\alpha + b\beta)^2 = 2k_0 n_2 + (b\alpha + c\beta)^2.$$

Nous avons besoin encore des valeurs de

$$\lambda, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha}, \quad \frac{d\lambda}{d\beta}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\beta^2},$$

au point M, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$. En les déduisant de la formule

$$\lambda = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)^2 + (l_1 + l_2 + \ldots)^2 + (a\alpha + b\beta + \ldots)^2,$$

on trouve aisément, pour les valeurs citées $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$\lambda = k_0^2, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} = 2k_0\frac{dk_1}{d\alpha}, \quad \frac{d\lambda}{d\beta} = 2k_0\frac{dk_1}{d\beta},$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2} = 2\left(\frac{dk_1}{d\alpha}\right)^2 + 2k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} + 2\left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2 + 2a^2,$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\beta^2} = 2\left(\frac{dk_1}{d\beta}\right)^2 + 2k_0\frac{d^2k_2}{d\beta^2} + 2\left(\frac{dm}{d\beta}\right)^2 + 2b^2$$

On en conclut sans peine l'expression de la quantité

$$\frac{1}{2\lambda^2}\left[\lambda\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2} + \lambda\frac{d^2\lambda}{d\beta^2} - \left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{d\lambda}{d\beta}\right)^2\right] = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2\log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2\log\lambda}{d\beta^2}\right),$$

qui figure dans la formule que nous voulons démontrer. En observant que, par ce qui précède,

$$\frac{dm_1}{d\alpha} = -\frac{dl_1}{d\alpha} = -\frac{dk_1}{d\beta}, \quad \frac{dm_1}{d\beta} = \frac{dn_1}{d\alpha} = \frac{dk}{d\alpha},$$

cette expression devient

$$\frac{1}{k_0^4}\left(k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} + k_0\frac{d^2k_2}{d\beta^2} - a^2 + b^2\right).$$

Mais l'équation

$$2k_0k_2 + (a\alpha + b\beta)^2 = 2k_0n_2 + (b\alpha + c\beta)^2,$$

différentiée deux fois de suite par rapport à α, donne

$$k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} = k_0\frac{d^2n}{d\alpha^2} + b^2 - a^2.$$

D'un autre côté, on a

$$\frac{dk_2}{d\beta} = \frac{dl_2}{d\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2k_2}{d\beta^2} = \frac{d^2l_2}{d\alpha d\beta}:$$

et l'équation

$$k_0 l_2 + k_0 m_2 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = 0,$$

différentiée par rapport à α, puis par rapport à β, donne

$$k_0 \frac{d^2 l_2}{d\alpha d\beta} = -k_0 \frac{d^2 m_2}{d\alpha d\beta} - ac - b^2 = -k_0 \frac{d^2 n_2}{d\alpha^2} - ac - b^2.$$

Donc

$$k_0 \frac{d^2 k_2}{d\beta^2} = -k_0 \frac{d^2 n_2}{d\alpha^2} - ac - b^2.$$

En substituant ces valeurs de

$$k_0 \frac{d^2 k_2}{d\alpha^2}, \quad k_0 \frac{d^2 k_2}{d\beta^2},$$

il vient enfin

$$\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2 \log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log\lambda}{d\beta^2}\right) = \frac{b^2 - ac}{k_0^4}.$$

Mais

$$\frac{1}{RR'} = \frac{ac - b^2}{k_0^2 n_0^2} = -\frac{b^2 - ac}{k_0^4}.$$

Donc

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2 \log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log\lambda}{d\beta^2}\right);$$

comme nous l'avions annoncé. Les valeurs de λ et des dérivées de λ sont relatives au point M; mais on peut d'ailleurs se débarrasser de la condition que α et β soient nulles, en rétablissant ou supprimant les constantes dont on avait diminué ou augmenté d'abord ces variables pour en mettre l'origine au point M. Cela ne changera rien à la formule, qui est, par conséquent, tout à fait générale [*].

Quand une surface est applicable sur une autre surface, l'élément

---

[*] Peut-être aurait-on rendu l'analyse précédente un peu plus simple en développant d'abord x et y suivant les groupes homogènes des divers ordres en α, β, pour en déduire ensuite dx et dy, tandis que nous avons pris pour point de départ les valeurs de ces différentielles mises sous la forme $dx = kd\alpha + ld\beta$, $dy = md\alpha + nd\beta$, puis développé k, l, m, n. Les conditions d'intégrabilité des seconds membres, que nous avons dû introduire, auraient été alors satisfaites d'elles-mêmes. C'est au lecteur à choisir celui des deux procédés qui lui paraîtra le plus facile; la marche générale des calculs est d'ailleurs la même dans les deux cas.

linéaire ds peut s'exprimer par nos variables α, β de la même manière pour les deux surfaces; la valeur de λ étant identique de part et d'autre, le produit RR′ devra donc être aussi le même, ce qu'il fallait démontrer.

4. Si, par exemple, une surface est applicable sur un plan, auquel cas elle rentre dans la classe des surfaces qu'on nomme *développables*, il faudra qu'on ait pour cette surface, comme pour le plan,

$$\frac{1}{RR'} = 0.$$

C'est de là que M. Gauss tire l'équation aux différences partielles connues

$$rt - s^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0,$$

qui a lieu pour ce genre de surfaces. Mais j'ajoute que, réciproquement, si l'on a

$$rt - s^2 = 0,$$

la surface sera développable ou applicable sur un plan.

Il s'ensuivra, en effet,

$$\frac{1}{RR'} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{d^2 \log \lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log \lambda}{d\beta^2} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \log \lambda &= \varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) \\ &= \Phi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + \Psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

en désignant par des lettres majuscules ce que deviennent les fonctions φ et ψ lorsqu'on y change le signe de $\sqrt{-1}$.

En posant donc

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + \Psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) &= 2f(\alpha + \beta\sqrt{-1}), \\ \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + \Phi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) &= 2F(\alpha - \beta\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

on aura

$$\log \lambda = f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F(\alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

expression dans laquelle les deux fonctions se changent l'une dans l'autre lorsqu'on change le signe de $\sqrt{-1}$.

Ayant ainsi

$$\lambda = e^{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})} e^{F(\alpha - \beta\sqrt{-1})},$$

faisons

$$\int e^{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})} d(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = X + Y\sqrt{-1},$$
$$\int e^{F(\alpha - \beta\sqrt{-1})} d(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = X - Y\sqrt{-1},$$

et il nous viendra

$$\lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2) = dX^2 + dY^2,$$

quantité qui peut se construire sur un plan par des coordonnées rectangulaires X, Y; d'où l'on conclut que la surface est réellement applicable sur ce plan, les divers éléments ds venant se placer chacun à chacun sur leurs correspondants.

5. Si l'on voulait retrouver cette autre propriété des surfaces développables d'être engendrées par un plan mobile dont l'équation contient un seul paramètre variable, il faudrait intégrer l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

Mise sous la forme

$$\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} = 0,$$

cette équation donne

$$\frac{dq}{dx} : \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy} : \frac{dp}{dy} = \omega,$$

d'où

$$dq = \omega dp,$$

et, par conséquent,

$$q = f(p), \quad dq = f'(p)\, dp.$$

Maintenant posons

$$px + qy - z = \zeta;$$

nous aurons, en différentiant,

$$d\zeta = x\,dp + y\,dq = [x + y f'(p)]\,dp,$$

et nous en conclurons que $x + y f'(p)$ et ζ sont des fonctions de p. Soit, d'après cela,

$$\zeta = \varphi(p), \quad x + y f'(p) = \varphi'(p).$$

L'intégrale demandée résultera de l'élimination de p entre les deux équations

$$z = px + y f(p) - \varphi(p),$$
$$0 = x + y f'(p) - \varphi'(p).$$

Ces équations appartiennent toutes deux à des plans, quand on regarde p comme un paramètre; et cela indique déjà que la surface est formée par des lignes droites. Mais, de plus, la seconde équation est la dérivée de la première par rapport à p : donc la surface est l'enveloppe du plan mobile représenté par la première équation.

6. On pourrait encore obtenir une expression simple du produit RR′ et démontrer, sans de trop longs calculs, le théorème de M. Gauss, en employant de nouvelles variables dont je vais dire un mot.

La formule générale

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2$$

se réduit à

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

quand les équations $u = constante$, $v = constante$ sont celles de deux groupes de lignes se coupant à angle droit. Supposons, de plus, que la seconde équation, $v = constante$, représente toujours des lignes géodésiques, ce qui arrivera, par exemple, dans le second des deux systèmes particuliers de coordonnées que nous avons cités au n° 1, et, par conséquent, est applicable à une surface quelconque. Je dis qu'alors le coefficient E est une simple fonction de u, en sorte qu'on peut remplacer $\int du\sqrt{E}$ par une simple lettre u et écrire

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

En effet, les lignes géodésiques sont celles que parcourt un mobile

assujetti à rester sur la surface et qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Il faut donc que les équations

$$\frac{d.\mathrm{E}\frac{du}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

$$\frac{d.\mathrm{G}\frac{dv}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

soient satisfaites par $v =$ *constante*. Or cela donne $\frac{d\mathrm{E}}{dv} = 0$, et, par conséquent, $\mathrm{E} =$ *fonction de* u, puisque la valeur constante de v peut d'ailleurs être quelconque. On remarquera en passant, que si l'équation $u =$ *constante* représentait aussi des lignes géodésiques, on pourrait prendre de même $\mathrm{G} = 1$: l'expression de ds^2 se réduirait donc à

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

ce qui ne peut arriver que pour une surface développable. C'est donc un caractère spécial de ces surfaces que deux groupes rectangulaires de lignes puissent y être à la fois géodésiques.

Au contraire, l'équation

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

peut être admise pour une surface quelconque, et, en l'employant, on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = \frac{1}{4\mathrm{G}}\left[\left(\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)^2 - 2\mathrm{G}\frac{d^2\mathrm{G}}{du^2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d^2.\sqrt{\mathrm{G}}}{du^2}.$$

Cette dernière formule (dont M. Gauss s'est beaucoup servi dans son Mémoire) est élégante et commode. Mais c'est assez d'avoir développé ici le calcul de la formule du n° **3**, qui a aussi ses avantages, et dont M. Gauss n'a point parlé. Voyez, au surplus, dans le Mémoire de M. Gauss, la démonstration de la formule générale applicable à un système quelconque de variables.

NOTE

Sur la continuité considérée dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin;

PAR M. ERNEST LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

En publiant la Note insérée dans ce Journal (tome XI, pages 129 et suivantes), j'ai eu pour objet de préciser les caractères distinctifs que toute fonction présente selon qu'elle est ou qu'elle n'est pas développable en série convergente, d'après un des types réductibles aux formules de Taylor ou de Maclaurin. M. Aug. Cauchy ayant démontré antérieurement que la série de Maclaurin est convergente, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être continue, j'avais remarqué que les termes de cette proposition, souvent mal comprise, se prêtaient à de fausses interprétations. Pour plus de rigueur et de clarté, il me parut utile d'établir nettement que la condition de continuité pouvait toujours être omise en ce qui concerne la dérivée, et qu'elle était, d'ailleurs, insuffisante, à moins qu'elle n'impliquât une certaine périodicité de la fonction.

Selon moi, la continuité proprement dite peut subsister indépendamment de toute périodicité, et il y a avantage à ne point confondre ces deux caractères. Cela posé, j'ai cru devoir énoncer, comme il suit le théorème en question :

« Toute fonction est développable en série convergente, suivant
» la formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste
» moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction

» cesse d'être continue, ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Hors de là, la série devient divergente. »

Dans une Note, que renferme le volume déjà cité (pages 313 et suivantes), M. Cauchy conteste la dernière partie de l'énoncé que je viens de reproduire. Il rappelle, en outre, que, dès 1844, il a fourni lui-même des explications catégoriques sur le sens et les restrictions que comporte l'énoncé qui lui appartient. Ces explications, je me hâte de le dire, m'avaient échappé jusqu'ici. Conformes, en partie, à mes propres remarques, elles ont sur elles l'avantage de la priorité. Toutefois, je ne puis les admettre sans réserve, pas plus que l'exemple choisi par l'illustre géomètre pour démontrer l'inexactitude de l'énoncé rappelé ci-dessus. Les points sur lesquels nous restons divergents, n'étant dépourvus à mes yeux ni d'intérêt ni d'importance, il convient que je cherche à les élucider par de nouveaux développements.

Tel est l'objet de la présente Note.

§ Ier.

Théorie de la continuité.

Considérant les caractères distinctifs que doit offrir une fonction pour être développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin, j'ai dit, relativement à la condition de continuité, qu'elle était insuffisante à moins qu'elle n'impliquât une certaine périodicité de la fonction.

M. Cauchy fait observer que si j'avais eu sous les yeux le Mémoire qu'il a publié sur les fonctions continues, et que j'eusse rapproché certain passage de ce Mémoire des principes exposés dans son *Analyse algébrique*, je ne serais certainement borné à dire que, dans le théorème en question, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner, vu que cette condition implique une certaine périodicité de la fonction.

Il est incontestable qu'en définissant, ainsi qu'il l'a fait dans le passage qu'il cite, ce qu'il entend par fonction continue, M. Cauchy a voulu comprendre la condition d'une certaine périodicité au nombre de celles que toute fonction doit remplir pour être développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin. Quant aux prin-

cipes exposés par l'auteur dans son *Analyse algébrique*, je ne pense pas qu'ils soient généralement interprétés dans le sens qu'il leur attribue. C'est, du moins, ce que j'ai cru remarquer en lisant plusieurs passages de divers écrits, et notamment ce paragraphe que j'extrais textuellement des *Leçons de Calcul différentiel et intégral*, publiées par M. l'abbé Moigno (tome II, pages 327 et 328) :

« *Il est enfin une autre formule très-générale démontrée aussi par* » *M. Cauchy, et qu'il importe de rappeler en finissant. Désignons par* z » *une variable imaginaire dont* r *soit le module et* t *l'argument, par* Fz » *une fonction qui reste finie et continue ainsi que sa dérivée* $F'(z)$, » *pour toute valeur du module* R, *inférieure à une certaine limite* » *donnée* R. *Supposons*, DE PLUS, *que*, r *restant constant, la fonc-* » *tion* $F(z)$ *soit une fonction périodique qui reprenne pour* $t = \alpha + 2\pi$, » *la valeur qu'elle avait pour* $t = \alpha$. »

Sans insister sur ce point, voyons comment M. Cauchy procède pour *établir directement* que toute fonction d'une variable imaginaire ne peut être continue, sans être en même temps périodique.

La variable étant d'abord réelle, M. Cauchy donne la définition suivante [*] :

« Supposons que, dans la fonction $f(x)$, on fasse varier x par de- » grés insensibles en attribuant à cette variable une série de valeurs » infiniment rapprochées les unes des autres. La fonction $f(x)$ restera » continue pour toutes ces valeurs de x, si pour chacune d'elles elle » acquiert constamment une valeur unique et finie, et si d'ailleurs un » accroissement infiniment petit, attribué à l'une quelconque de ces » valeurs de x, produit toujours un accroissement infiniment petit de » la fonction elle-même. »

Il ajoute ensuite :

« Énoncée en ces termes, la définition des fonctions continues n'est » pas seulement applicable au cas où x reste réel ; on pourra l'appli- » quer encore, sans difficulté, au cas même où x devient imaginaire.

Puis, vient une démonstration dont je vais reproduire les points principaux.

---

[*] *Voir* la Note insérée dans ce Journal (tome XI, page 315).

ε désignant une quantité positive infiniment petite, et la variable imaginaire x ayant pour expression

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

M. Cauchy remarque que si l'on pose successivement $\theta = \pi - \varepsilon$, puis $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, on trouve, dans la première hypothèse,

$$x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}},$$

et, dans la seconde,

$$x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

On voit donc qu'en passant de l'une de ces hypothèses à l'autre, la variable imaginaire x, qui reste toujours très-peu différente de $-r$, ne varie qu'infiniment peu.

Cela posé, M. Cauchy conclut que la fonction $f(x)$ ne peut rester fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, qu'autant qu'elle varie elle-même infiniment peu, quand on passe de la supposition $\theta = \pi - \varepsilon$ à la supposition $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, ce qu'on peut exprimer encore, ajoute-t-il, en disant que la fonction $f(x)$ ne pourra rester fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, si elle ne reprend pas la même valeur, quand l'argument θ passe de la valeur $+\pi$ à la valeur $-\pi$.

Ici se présentent plusieurs observations.

S'agit-il d'abord de la définition considérée en elle-meme : je remarquerai que, prise en toute rigueur, elle rendrait inutile la démonstration qui la suit. En effet, la variable imaginaire

$$x = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

étant périodique, il est évident que la fonction devrait subir la même loi de périodicité, par cela seul qu'elle serait assujettie à n'admettre qu'une valeur unique pour chaque valeur de la variable. Une interprétation aussi étroite conduirait à des résultats, qui déjà sont inadmissibles [*].

[*] Dira-t-on, par exemple, que la fonction

$$f(x) = x + \arccos x$$

est discontinue parce qu'à la valeur unique $x = 0$ répondent les deux valeurs

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

alors même qu'on s'en tient exclusivement au système des valeurs réelles. Je ne puis donc m'y arrêter. Il est clair, d'ailleurs, que M. Cauchy lui-même la repousse, puisqu'il a jugé une démonstration nécessaire.

S'agit-il ensuite de cette démonstration; je dois déclarer qu'elle ne me paraît pas concluante.

En effet, ou bien l'argument θ est pris pour variable indépendante, les variables imaginaires x et $f(x)$ en étant toutes deux fonction; ou bien la variable x, quoique imaginaire, reste variable indépendante.

Dans le premier cas, et c'est le seul que nous admettions comme offrant un sens précis, on ne peut rien conclure de ce que les fonctions x et $f(x)$ subissent ou non un changement brusque, lorsque la variable indépendante θ, passant de la valeur $+\pi$ à la valeur $-\pi$, change elle-même brusquement de grandeur numérique.

Dans le second cas, la suite continue des valeurs $r^{+\sqrt{-1}}$ *étant donnée à priori*, c'est faire une supposition toute gratuite que de considérer ces valeurs de la variable imaginaire comme impliquant, par rapport à celles de l'argument θ qui leur correspondent, les deux suites exprimées respectivement l'une par $\pi - \varepsilon$, l'autre par $-(\pi - \varepsilon)$. Pourquoi ces deux suites, entre lesquelles il y a solution de continuité, plutôt que la suite continue $\pi \mp \varepsilon$? Je vois bien que le procédé suivi rend possible une démonstration qui ne le serait pas autrement. Mais comment justifier ce procédé, alors même qu'il serait permis de prendre pour variable *indépendante* l'expression imaginaire

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Dans le système des valeurs réelles, la variable indépendante croissant ou décroissant avec continuité, chacune des valeurs qu'elle affecte se résout en un ensemble où les parties intégrantes se confondent, sans qu'il y ait lieu d'établir entre elles aucune distinction. Peu importe d'ailleurs qu'il s'agisse du tout ou d'une partie. L'un comme l'autre devant être conçu de toutes pièces, il y a toujours unité de conception, et nulle difficulté ne surgit. Pour passer de là au système des valeurs imaginaires, il suffit d'observer que celles-ci se composent de deux parties réelles que le signe $\sqrt{-1}$ permet de réunir symboli-

quement, sans qu'elles cessent pour cela de rester essentiellement distinctes. Dès lors tout se réduit à la considération des quantités réelles, seules saisissables et intelligibles. Que deux de ces quantités soient réunies dans une même expression, où la présence d'un symbole particulier élève entre elles une barrière qui les isole complétement, la nécessité de ne les point confondre, et de maintenir pour chacune d'elles les règles et conventions généralement établies, n'en subsiste pas moins que si, figurant dans des équations distinctes, elles étaient effectivement séparées.

Essayons d'exposer, à ce point de vue, la théorie de la continuité.

L'idée de fonction est complexe. Elle implique, avant tout, la conception d'une variable qui subsiste par elle seule ou dont on dispose arbitrairement. Cette variable, dite *indépendante*, ne peut qu'être réelle.

On distingue, par rapport à la variable indépendante, deux modes de variations. Lorsqu'on se donne une suite de valeurs numériques, telles que a, b, c, d, etc., et que, *passant brusquement de l'une à l'autre*, l'on assujettit la variable à les prendre toutes successivement, le mode de variation est discontinu. Il est continu lorsque la variable est supposée croissante ou décroissante, *de la même manière* que croît ou décroît la distance comprise entre deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile. Une condition facile à saisir caractérise ce mode. Elle consiste en ce que nul changement ne s'accomplit entre deux limites quelconques, sans que la variable ait passé préalablement par tous les degrés de grandeur intermédiaires.

Il est visible que chacun de ces modes a son essence propre. On s'est efforcé néanmoins de ménager entre eux une sorte de transition, qui permît de les résoudre l'un dans l'autre. Des efforts, dirigés vers ce but, ne pouvaient aboutir à rien de rationnel : il a fallu d'ailleurs, pour qu'on les poursuivît, céder à une étrange illusion. Au lieu de la quantité, telle qu'elle est et qu'il faut la concevoir, c'est-à-dire avec les propriétés qui subsistent en elle, *indépendamment de tout degré de grandeur*, on n'a vu que ce qu'elle offre de saisissable aux sens, et là où elle leur échappait, on s'est figuré qu'elle changeait de nature, et que, suspendue entre l'être et le néant, elle participait à la fois de ces deux extrêmes. Il semblerait que de telles aberrations n'ont pas be-

sont d'être réfutées et qu'il suffit de les signaler pour en faire justice. Remarquons, toutefois, qu'elles ont pour elles l'appui *tacite* de presque tous les géomètres.

Par cela seul qu'elle varie, la variable échappe à toute mesure directe. Elle est, mais croissant toujours ou toujours décroissant. On peut, sans doute, se représenter isolément chacun des degrés de grandeur que comprennent entre elles les limites choisies pour origine et fin de la variation; mais comme entre ces limites la variable ne subsiste que par la loi qui régit ses changements, il serait évidemment absurde et contradictoire de lui attribuer, à titre de détermination effective, l'un quelconque de ces degrés de grandeur. Comment comprendre en effet, qu'elle pût affecter une pareille détermination si, en même temps, elle ne cessait pas d'être variable?

On observera que dans le cas le plus simple, alors qu'il s'agit d'une grandeur quelconque déterminée, il ne suffit point, *pour qu'elle soit* ou, ce qui revient au même, *pour qu'on puisse la concevoir*, de lui assigner un certain degré qui la limite; il faut ajouter, en outre, ou au moins sous-entendre que ce degré se conserve en elle. N'est-ce pas là, d'ailleurs, ce que renferme en soi la dénomination de *constantes* affectée aux grandeurs complétement définies? Cette remarque s'applique aux diverses valeurs par lesquelles la variable passe. Nulle ne peut être isolée, et devenir ainsi l'objet d'une conception distincte, sans que la pensée, qui se fixe sur elle, lui imprime forcément le caractère de durée nécessaire à sa détermination. De là l'extrême confusion où l'esprit tombe inévitablement, lorsque, considérant la suite infinie des degrés que la variable franchit entre deux limites déterminées, il transporte, dans chacune des valeurs intermédiaires, l'élément de durée qui n'appartient qu'à l'ensemble formé par leur succession continue. De là ces difficultés insolubles, qu'on ne songerait pas même à soulever, si l'on prenait garde que la grandeur qui reste constante, et celle qui change incessamment, puisent toutes deux leur réalité dans la durée qui leur est commune, et qui, divisible à l'infini, offre toujours, de part et d'autre, un terme commun de comparaison.

La faculté d'abstraire constitue sans contredit une des ressources les plus précieuses dont nous disposions. Mais n'est-ce pas en abuser étrangement que de pousser les abstractions au point d'obscurcir, disons

plus, de rendre inintelligibles les premières notions de la science [*]?

Que l'on veuille bien y réfléchir, et l'on sera conduit à admettre avec nous les principes suivants :

Être et durer, c'est-à-dire continuer d'être, sont pour toute grandeur, constante ou variable, deux conditions qui s'impliquent mutuellement.

Quel que soit le mode suivant lequel une grandeur quelconque subsiste pendant une certaine durée, ce mode est toujours réductible à deux types primitifs. L'un de ces types répond aux parties de la durée totale pendant lesquelles la grandeur conserve une même détermination; l'autre, à celles où la variation est incessante.

Tant qu'une grandeur varie de manière à ce que tout changement qu'elle subit exige pour s'accomplir une certaine durée de la variation, on dit de cette grandeur qu'elle varie avec continuité.

Il n'est point de variation incessante qui ne soit tout entière continue, ou qui ne se compose exclusivement d'une suite de variations

---

[*] La considération des quantités infinitésimales crée un obstacle invincible à la notion de continuité. Elle implique, d'ailleurs, deux impossibilités radicales, savoir : 1° l'existence des prétendus infiniment petits; 2° l'existence des prétendus infiniment grands. J'admets qu'en dépit de leur commune absurdité, l'une de ces conceptions puisse, moyennant certaines précautions, servir, en général, de correctif à l'autre. Je ne comprends pas, néanmoins, qu'on affecte de les prendre au sérieux, et que, sans s'inquiéter de propager l'erreur, on les présente comme base d'une science où la certitude des déductions repose essentiellement sur la rigueur absolue des principes fondamentaux. Que dire, par exemple, du sens qui s'attache naturellement à ces lignes extraites du programme des cours donnés, en 1846, à l'École Polytechnique :

Du rapport entre l'accroissement d'une fonction et l'accroissement d'une variable. VALEUR QUE PREND CE RAPPORT QUAND LES ACCROISSEMENTS DEVIENNENT INFINIMENT PETITS.

Dans l'essai que j'ai publié sur les principes de l'analyse transcendante, j'ai montré ce qu'est, en réalité, une différentielle, à savoir, une différence ordinaire prise dans une certaine hypothèse. J'ai, d'ailleurs, créé une méthode qui, sans cesser d'être purement algébrique et toujours rigoureuse, offre au plus haut degré la simplicité désirable. En m'imposant cette tâche, je ne me suis point dissimulé que, si peu rationnels que soient certains procédés fort en vogue, il suffit qu'un long usage les ait rendus familiers pour qu'on trouve plus commode de s'y tenir. Je poursuivrai néanmoins, persuadé que la vérité peut plus que l'erreur, et qu'à elle seule l'avenir appartient.

continues, ayant toutes une certaine durée. L'hypothèse inverse serait un non-sens d'une absurdité en quelque sorte palpable.

Concluons que toute durée d'une grandeur se compose nécessairement d'une suite de parties qui se succèdent sans intervalle, et pendant chacune desquelles la grandeur reste continue, soit qu'elle varie, soit qu'elle persiste dans une même détermination. Lorsqu'à la limite commune à deux de ces parties, la grandeur subit un changement brusque, on dit qu'il y a solution de continuité. Plusieurs solutions de continuité sont possibles entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra. Dans tous les cas, et quel qu'en soit le nombre, comme elles ne constituent jamais que des accidents transitoires, *essentiellement dépourvus de durée*, il reste démontré qu'on peut dire avec une entière rigueur :

Tout mode d'existence d'une grandeur quelconque est constamment régi par une même loi générale, la loi de continuité.

Avant d'aller plus loin, je crois utile de présenter plusieurs observations.

Les grandeurs, soumises au calcul, n'y figurent point comme quantités concrètes. C'est par le nombre abstrait, exprimant pour chacune le rapport existant entre elle et son unité propre, qu'elles y sont introduites. Ce mode de représentation n'entraîne aucune difficulté pour les grandeurs constantes. Quant à la grandeur variable, comme elle n'est définie que par la loi particulière qui régit sa variation, c'est cette loi qu'il faut traduire numériquement. On y parvient en fixant d'une manière générale le changement qui s'accomplit durant une partie quelconque de la variation. Veut-on, d'ailleurs, abstraire l'élément de durée, ainsi qu'on le fait habituellement ; cette abstraction devient possible dès qu'il y a deux grandeurs subsistant et variant ensemble à partir d'une même origine. En effet, à chaque partie de la durée qui leur est commune, répond de part et d'autre un changement déterminé. De là donc, relation nécessaire entre deux quelconques des changements qui s'accomplissent simultanément dans l'une et l'autre grandeur ; de là, possibilité évidente de former deux suites toujours comparables entre elles et susceptibles de s'exprimer directement l'une par l'autre. On atteint le même résultat lorsque, au lieu des change-

ments qui se correspondent pour une même durée quelconque de la variation, l'on fixe les valeurs qui subsisteraient ensemble, si, à l'expiration de cette durée, la variation cessant tout à coup, les grandeurs que l'on considère demeuraient constantes.

En général, l'élément de durée n'apparaît point explicitement dans les relations où se trouve exprimée la loi qui régit la génération simultanée de plusieurs variables : il convient, en outre, d'observer que presque toujours il s'élimine de lui-même. Que cette abstraction se fasse spontanément, ou bien qu'elle résulte de l'application des procédés que je viens de décrire, elle offre dans tous les cas un avantage précieux, c'est de ne laisser en présence que les grandeurs sur lesquelles on veut opérer, et de faciliter le cours des déductions, rendues ainsi plus directes et plus simples. Toutefois, il ne faut point perdre de vue que dans l'idée de variation est implicitement comprise l'idée de durée, base fondamentale de toute conception intellectuelle.

Cela posé, occupons-nous des fonctions proprement dites, et, les prenant d'une manière absolue, ne voyons en elles que la suite des valeurs qu'elles expriment numériquement.

Considérons d'abord la variable indépendante.

Déterminée par elle seule, c'est-à-dire toujours une et non complexe, la variable indépendante est conçue le plus simplement possible, lorsqu'on admet qu'elle croît ou décroît proportionnellement à la durée pendant laquelle elle varie, ou, ce qui revient au même, qu'elle ne subit aucun changement qui n'exige, pour s'accomplir, une durée proportionnelle de la variation. Elle est, dès lors, essentiellement continue.

Considérons ensuite la variable dépendante, ou, en d'autres termes, la fonction.

On entend par fonction une expression complexe qui, variant et cessant de varier en même temps que la variable dont elle dépend, est généralement déterminée pour toute valeur attribuée à cette variable. Lorsque, pour une même suite de valeurs affectées par la variable, la fonction comporte plusieurs systèmes de valeurs distinctes, on isole par la pensée ces différents systèmes, et l'on considère chacun d'eux comme constituant par lui seul une fonction particulière. D'un système à l'autre, la continuité et la discontinuité sont possibles de la

même manière que pour la suite des valeurs appartenant à l'un d'eux pris séparément.

La fonction ne pouvant demeurer constante pour toutes valeurs de la variable comprises entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra, la variation qu'elle subit, lorsque cette variable croît ou décroît avec continuité, est nécessairement incessante. Doit-on en inférer qu'elle est constamment continue, ou bien composée de parties qui se suivent immédiatement et durant chacune desquelles la continuité subsiste sans interruption? Nul doute pour une fonction quelconque puisant sa réalité dans l'existence effective ou idéale d'une grandeur dont elle est l'expression numérique. Pour tout autre fonction, la question plus complexe veut être traitée directement. J'essayerai tout à l'heure de résoudre cette difficulté.

Tant qu'il y a continuité, tout changement de la fonction exige, pour s'accomplir, une certaine durée de la variation, et, par conséquent, un certain accroissement de la variable indépendante. Une condition inhérente à ce mode, tel qu'il vient d'être défini, suffit, d'ailleurs, pour le caractériser. Elle consiste en ce que le passage d'une valeur à une autre ne peut jamais avoir lieu sans que la fonction ait franchi successivement toutes les valeurs intermédiaires.

Lorsque la discontinuité survient, c'est par un changement brusque qui s'opère instantanément. Voyons en quoi consistent, pour une fonction, les changements brusques dont elle est susceptible.

Les opérations à effectuer sur la variable indépendante pour construire la fonction sont réductibles à deux classes principales : je range dans la première, l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances; dans la seconde, la soustraction, la division, l'extraction des racines.

Tant qu'on procède par voie d'addition, de multiplication, ou d'élévation aux puissances, chaque valeur de la variable fournit pour la fonction une valeur unique, toujours réelle et déterminée. La soustraction donne, pour résultat accidentel, zéro, et plus généralement des quantités tantôt positives, tantôt négatives. En s'introduisant comme diviseur, le zéro répond à une impossibilité fortuite. Lorsqu'une quantité, soumise à un radical de degré pair, passe du positif au négatif, les valeurs fournies par ce radical perdent leur réalité.

Que les valeurs de la fonction, supposées numériquement exprimables, cessent tout à coup de l'être, c'est là, sans aucun doute, un changement brusque. On voit ainsi que les fonctions admettent, comme solution de continuité, le passage du réel à l'imaginaire, et, pour ne servir des termes usités, le passage du fini à l'infini.

La discontinuité peut encore provenir d'un accident fortuit, qui, par une cause quelconque, dépendante ou non de l'impossibilité qu'exprime le symbole $\frac{1}{0}$, exclurait transitoirement toute détermination particulière de la fonction. Hors de là, elle n'est possible que par un changement brusque qui ferait succéder, l'une à l'autre, deux valeurs numériques tout à coup différentes; ce qui exige que ce changement ait lieu dans le mode indiqué pour construire la fonction, ou, si ce mode reste le même, dans le résultat des opérations par lesquelles il se réalise.

Supposons d'abord un intervalle où le mode indiqué pour construire la fonction ne change point, et cherchons si, la fonction n'affectant jamais qu'une seule détermination transitoire, deux quelconques de ces déterminations successives peuvent être toujours brusquement différentes. Dans cette hypothèse, c'est la variation continue attribuée à la variable indépendante qui produit les changements brusques incessamment subis par la fonction. Or, lorsque la variable croît ou décroît continûment, les valeurs qu'elle franchit se succèdent en étant tour à tour commensurables et incommensurables. Dans le premier cas, elles affectent, en général, l'une des trois formes fractionnaires $\frac{2p+1}{2q+1}$, $\frac{2p+1}{2q}$, $\frac{2p+2}{2q+1}$; dans le second, elles n'ont point de représentation numérique; on peut, toutefois, en empruntant à volonté l'une ou l'autre de ces formes, les exprimer avec tel degré d'approximation qu'on désire. Cela posé, et eu égard à la nature des opérations fondamentales par lesquelles une fonction se construit, je remarque que c'est uniquement à raison de leur forme et non point de leur degré de grandeur, que les valeurs successives de la variable peuvent introduire dans la fonction une série non interrompue de déterminations brusquement différentes. Il suit de là qu'admettre des changements brusques incessants, c'est faire dépendre ces changements de la diversité

des formes affectées par les valeurs fractionnaires, et, par conséquent, attribuer à chacune de ces formes une influence qui rend forcément impossible toute détermination répondant aux valeurs incommensurables. C'est donc aussi admettre implicitement que, si peu différentes que soient entre elles deux valeurs de la variable, elles comprennent, néanmoins, une valeur intermédiaire pour laquelle la fonction n'est pas déterminée. Mais si pareille valeur existe nécessairement entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra, il faut qu'entre ces mêmes limites il y en ait une infinité. Dès lors, ce qui domine, en général c'est le défaut de détermination, et, privée de son caractère essentiel, la fonction prétendue n'est plus une fonction.

Après avoir reconnu que là où le mode de construction demeure invariable, toute fonction proprement dite subit la loi de continuité, il est aisé de voir que, si des changements brusques surviennent dans ce mode, et, par suite, dans la fonction, ils sont toujours en nombre limité. En effet, pour qu'il y ait fonction, il faut d'abord que le mode de construction soit généralement déterminé. Veut-on, d'ailleurs, que ce mode ne cesse pas de changer brusquement: il faut, pour l'exprimer, une fonction particulière qui remplisse elle-même cette condition : or c'est là précisément ce qui vient d'être démontré impossible.

Ces considérations permettent d'étendre aux fonctions proprement dites la loi de continuité précédemment établie pour tout mode d'existence d'une grandeur quelconque.

Nous n'avons point entrevu jusqu'ici comment il est possible de réaliser une fonction qui subisse instantanément un changement brusque de détermination numérique. Le rôle que les radicaux, les fonctions circulaires et les valeurs limites sont appelés à remplir en certains cas, est très-propre à jeter quelque jour sur cette question délicate.

En ce qui concerne les radicaux, je ferai d'abord observer que, si l'on convenait, avec M. Cauchy, de désigner toujours par la notation $\sqrt{a^2}$ la racine positive, c'est-à-dire $+a$ ou $-a$, suivant que a est positif ou négatif, l'expression $\frac{\sqrt{(x-b)^2}}{x-b}$ deviendrait égale à -1 ou $+1$, selon que x serait moindre ou plus grand que b. Il suffirait donc que cette expression, ou toute autre analogue, entrât dans une fonc

tion pour qu'elle y produisît, en général, un changement brusque de détermination numérique.

L'exemple que je viens de choisir soulève une difficulté. La quantité soumise au radical est variable, et à chacune des valeurs qu'elle reçoit répondent deux racines numériquement égales, mais affectées de signes contraires. De là résultent deux systèmes distincts, susceptibles d'être pris isolément et comprenant, en général, l'un les racines positives, l'autre les racines négatives. Toutefois, comme zéro est une des valeurs affectées par le radical, il y a lieu de se demander si le passage par cette valeur ne doit pas être considéré comme accompagné d'un changement de signe, l'une des suites se substituant à l'autre, et réciproquement.

Quelques détails éclairciront ce point.

Je prends pour accordé qu'on n'est point maître d'établir arbitrairement toute espèce de convention. Celles-là seules me paraissent admissibles, qui sont conformes aux principes fondamentaux du calcul, et je regarde comme un de ces principes celui qui permet de substituer l'une à l'autre deux expressions numériques ayant identiquement même valeur.

Cela posé, je remarque, relativement à la notation exponentielle :

1°. Que, dans le cas où l'exposant est une fraction, deux opérations sont indiquées, l'une par le numérateur, l'autre par le dénominateur ;

2°. Que, sans altérer la valeur de l'exposant entier ou fractionnaire, on peut introduire haut et bas, comme facteur, un même nombre quelconque ;

3°. Que le résultat à obtenir doit rester indépendant de l'introduction de ce facteur ;

4°. Que, pour remplir cette condition, il faut observer la règle suivante :

Dans les deux opérations à faire, commencer toujours par celle qui dépend du dénominateur.

En appliquant cette règle, on trouve

$$\sqrt{(x-b)^2} = (x-b)^{\frac{2}{2}} = \left[\pm\sqrt{(x-b)}\right]^2 = x-b;$$

il y a donc changement de signe à partir de $x = b$, et l'on a constam-

ment

$$\frac{\sqrt{(x-b)}}{x-b} = 1.$$

Cette expression cessant, ainsi qu'on le voit, de présenter un changement brusque de détermination numérique, prenons la fonction α liée à la variable indépendante θ par les deux équations simultanées

$$\rho \cos \alpha = 1 + r \cos \theta,$$
$$\rho \sin \alpha = r \sin \theta,$$

et posons en même temps

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta} = \sqrt{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta)},$$

r affectant une valeur quelconque positive et θ variant de zéro à 2π.

Tant que la valeur attribuée à r est différente de l'unité, θ varie sans jamais annuler la quantité soumise au radical. Si donc on distingue, ainsi qu'il convient, les deux systèmes de valeurs fournies par le radical, on peut prendre l'un ou l'autre à volonté et s'y tenir exclusivement. Or, en adoptant le système des racines positives, il est aisé de voir que, pour toute valeur de r moindre que l'unité, la fonction α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, tandis que, pour toute valeur de r supérieure à l'unité, elle passe en même temps que θ par les mêmes multiples de la circonférence. On ne peut donc franchir la limite $r = 1$ sans que la valeur de α, qui répond à $\theta = 2\pi$, toujours égale à zéro, pour $r < 1$, et à 2π pour $r > 1$, ne change brusquement de grandeur.

Dans la Note que renferme ce Journal (tome XI, page 140), j'ai dit que pour $r = 1$ et $\theta = \pi$, il y avait changement brusque, α passant tout à coup de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. C'est une erreur que je dois rectifier. Lorsque $r = 1$, on a

$$\rho = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\sin^2\tfrac{1}{2}(\theta+\pi)} = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\pi).$$

Il faut donc admettre, en même temps, que les valeurs de ρ, constamment positives pour toutes valeurs de θ moindres que π, sont constamment négatives pour toutes valeurs de θ supérieures à π.

Il suit de là que, tant qu'il s'agit uniquement de la valeur $r = 1$, α reste fonction continue de θ, et que pour $\theta = 2\pi$ l'on n'a point, ainsi que je l'ai supposé, $\alpha = 0$, mais bien $\alpha = \pi$.

Quant aux fonctions que je considérais alors, si l'on observe que, dans l'hypothèse $r = 1$, elles deviennent

$$\varphi(r, \theta) = [2 \sin \tfrac{1}{2}(\theta + \pi)]^m \cos m\alpha,$$
$$\psi(r, \theta) = [2 \sin \tfrac{1}{2}(\theta + \pi)]^m \sin m\alpha,$$

on voit aisément que, pour toute valeur de m entière et positive, elles ne cessent pas d'être continues et de prendre respectivement mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

Cette erreur rectifiée, je passe à la considération des valeurs limites. Un exemple suffira.

Soit l'intégrale définie

$$\int_0^h \frac{\sin pz}{z}\, dz.$$

Si l'on suppose que l'indice h croisse indéfiniment, cette intégrale converge vers une limite fixe exprimée par $+\frac{\pi}{2}$ ou par $-\frac{\pi}{2}$, suivant que p est positif ou négatif. Il vient donc, dans cette hypothèse,

$$\lim \int_0^h \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz = \int_0^\infty \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz = \pm \frac{\pi}{2};$$

le signe $+$ subsistant pour toute valeur de x moindre que b, le signe $-$ pour toute valeur plus grande.

Pour $x = b$, il y a changement brusque du mode de construction. En effet, quelle que soit alors la valeur affectée par h, on n'a plus de limite à considérer, et il vient constamment zéro pour résultat.

On voit, par cet exemple, comment, en introduisant dans une fonction une expression symbolique de la forme $\int_0^\infty \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz$, il est possible d'y réaliser un changement brusque de détermination numérique.

Dans ce qui précède, j'ai eu pour objet principal l'étude des fonctions réelles, et de leur variation considérée dans ses rapports directs

avec celle de la variable indépendante. La question que je me suis proposé de résoudre était là tout entière : il ne me reste plus qu'à montrer comment les principes établis ci-dessus s'appliquent d'eux-mêmes et immédiatement au cas général des valeurs imaginaires.

On sait que toute expression imaginaire est réductible au type fondamental

$$P + Q\sqrt{-1},$$

les quantités que P et Q représentent, étant toujours réelles.

On sait également que, pour opérer sur une expression imaginaire, il faut d'abord la réduire à ce type, ou, du moins, l'y supposer réduite.

Soit, par exemple, la fonction $l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$. Elle n'est que par l'identité

$$l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = l\,r + \theta\sqrt{-1}.$$

Si donc on fait varier θ, c'est dans le second membre et non dans le premier qu'il faut étudier les modifications subies par la fonction. Il est visible, en effet, que si l'on opérait directement sur le premier membre, il y aurait absurdité et contradiction lorsque, donnant à θ les deux valeurs 0 et 2π, l'on obtiendrait pour résultat unique.

$$l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = l\,(r).$$

Considérons une fonction imaginaire ramenée à la forme

$$P + Q.\sqrt{-1};$$

P et Q seront des fonctions réelles de la variable indépendante, subsistant chacune isolément et non réductibles entre elles.

La fonction donnée étant représentée par y, il vient identiquement

$$y = P + Q\sqrt{-1};$$

et ce qu'il faut voir dans y, ce sont deux grandeurs, l'une égale à P, l'autre à Q, toutes deux réunies symboliquement, mais toujours distinctes et toujours séparables.

Il suit évidemment de là que la variation de l'imaginaire y doit être considérée comme s'identifiant avec celle des fonctions P et Q, prises à part et simultanément.

Pour éviter toute méprise, je ferai remarquer que l'on peut avoir, entre certaines limites,

$$y = f(x) + \sqrt{-1}.F(x);$$

puis, entre d'autres limites,

$$y = \varphi(x) + \sqrt{-1}.\psi(x),$$

les fonctions exprimées par P et Q changeant en même temps qu'on passe du premier intervalle au second, et, par conséquent, restant toujours réelles.

J'observerai aussi que l'on doit distinguer le cas où la quantité Q s'évanouit par suite d'une valeur particulière attribuée à la variable indépendante, et celui où elle disparaît d'elle-même pour toute l'étendue d'un certain intervalle. Dans le premier cas, la valeur affectée par y, quoique réelle en apparence [*], ne cesse point d'appartenir au système général des valeurs imaginaires. Dans le second, il y a transition d'un système à l'autre, et, par suite, solution *relative* de continuité.

Une fonction peut être tantôt réelle, tantôt imaginaire, la variable dont elle dépend restant toujours réelle. Néanmoins elle n'affecte ainsi qu'une partie des déterminations compatibles avec son mode de construction. Si donc on veut l'étudier dans toutes les modifications qu'elle comporte, il faut substituer aux valeurs réelles de la variable un système qui, sans exclure aucune de ces valeurs, comprenne en

---

[*] J'appelle l'attention du lecteur sur la fonction $(-a)^x$. La variable x demeurant réelle, on a

$$(-a)^x = a^x.\left[\cos(2k+1)\pi x + \sqrt{-1}.\sin(2k+1)\pi x\right],$$

ce qui montre que, contrairement à l'idée qu'on s'en forme, en général, la fonction $(-a)^x$ est essentiellement imaginaire et continue. A chaque valeur du nombre entier k répond un système distinct de déterminations particulières. Il n'y a solution de continuité que lorsqu'on passe d'un système à l'autre.

même temps toutes les valeurs imaginaires possibles [*]. Pour satisfaire à cette condition, x étant la variable, on doit poser

$$x = p + q\sqrt{-1}$$

Il faut admettre, en outre, que les quantités p et q sont susceptibles d'acquérir directement, et indépendamment l'une de l'autre, toutes les valeurs réelles. Dès lors x devient fonction de ces deux variables, et celles-ci seules peuvent être dites *indépendantes*.

En assujettissant la variable x à franchir successivement, et avec continuité, toutes les valeurs imaginables, on ne détermine aucun des modes particuliers suivant lesquels la variation peut s'accomplir effectivement. Il est permis de rester à ce point de vue général, comme aussi de considérer spécialement l'un ou l'autre de ces modes, le choix à faire dépendant de la nature des questions à résoudre et offrant ainsi le moyen d'établir, entre la variable et la fonction données, l'ordre de relation le plus propre à remplir l'objet qu'on se propose. Dans tous les cas, la continuité n'est possible pour x, qu'autant qu'elle subsiste pour chacune des quantités réelles p et q, prises à part et simultanément. Nous admettrons désormais que cette condition nécessaire est constamment satisfaite.

Si nous reprenons la fonction

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(p + q\sqrt{-1}) = \mathrm{l}(re^{q\sqrt{-1}}),$$

il viendra, sans rien statuer sur le mode de variation des quantités p et q,

$$\mathrm{l}(p + q\sqrt{-1}) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(p^2 + q^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{q}{p}.$$

Cette identité démontre la continuité absolue de la fonction $\mathrm{l}(x)$, pour tout mode de variation qui exclut la simultanéité des valeurs particulières $p = 0$, $q = 0$.

---

[*] Le système des valeurs imaginaires comprend, comme cas particuliers, toutes les valeurs réelles. Dès qu'on entre dans ce système, il n'y a plus lieu d'établir entre les unes et les autres aucune distinction. Cette remarque est très-importante au point de vue de la continuité.

Cela bien compris, et sans qu'il soit besoin d'insister davantage sur la distinction qu'il importe d'établir entre le système général de tous les modes possibles de variation continue et l'un quelconque d'entre eux, je vais passer à l'examen de celui de ces modes qu'on choisit habituellement pour l'attribuer à la variable imaginaire.

Il semblerait naturel d'opérer directement sur les quantités p et q, en faisant correspondre successivement l'une quelconque des valeurs de p à toutes les valeurs de q, ou réciproquement. Dans l'un et l'autre de ces modes, p et q seraient les variables indépendantes. Il est d'ailleurs visible qu'on y réaliserait pour x toutes les valeurs imaginables. Tel n'est point le procédé généralement suivi. Moins simple en apparence, il offre, en réalité, certains avantages qui le font préférer. Voici en quoi il consiste :

Faisant

$$r\cos\theta = p, \tag{1}$$

$$r\sin\theta = q, \tag{2}$$

on en déduit

$$r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{q}{p}.$$

Cela posé, l'on remarque que, quelles que soient les valeurs respectives attribuées séparément aux quantités p et q, on peut toujours satisfaire aux équations (1) et (2) en attribuant à r la valeur positive $\sqrt{p^2 + q^2}$, et à l'arc θ, soit la valeur unique qui, dans l'intervalle de 0 à 2π, remplit les conditions voulues, soit cette même valeur, augmentée d'un multiple quelconque de la circonférence.

Au lieu de l'équation

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

il est donc permis d'écrire

$$x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta),$$

et, changeant le mode de variation, de prendre r et θ pour variables indépendantes.

Veut-on n'attribuer à r que des valeurs positives, et restreindre entre les limites 0 et 2π la variation de θ; cela suffit pour réaliser un mode de variation continue où la variable x passe successivement par toutes les valeurs imaginables. Cela ne suffit point, en général, si l'on veut que la fonction acquière elle-même toutes les déterminations qu'elle comporte.

En principe, et par cela seul qu'elles sont indépendantes, les variables r et θ doivent être considérées comme susceptibles de prendre ensemble et séparément toutes les valeurs réelles. On remplit cette condition le plus simplement possible, et sans que la discontinuité puisse jamais survenir dans le mode de variation attribuée à la variable x, lorsque, partant de zéro, l'on fait correspondre successivement l'une quelconque des valeurs de r à toutes les valeurs de θ, ou réciproquement.

Qu'on le remarque bien, il s'agit de deux variations simultanées, subies, l'une par la variable x, l'autre par une fonction de cette variable. On peut, sans doute, étendre ou restreindre à volonté ces variations. Toutefois, il ne faut jamais perdre de vue qu'elles ne restent comparables qu'entre les limites où toutes deux s'accomplissent à la fois.

Dira-t-on que, la variable x étant périodique, il est superflu d'attribuer à θ aucune des valeurs où entre un multiple quelconque de la circonférence; je répète qu'on est parfaitement libre d'admettre telle ou telle limitation du mode suivant lequel r et θ varient. Il faut seulement en tenir compte et se garder de prétendre que les valeurs de la fonction sont toujours épuisées en même temps que celles de la variable imaginaire.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = x^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\theta}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{q}\right).$$

n'est-il pas manifeste que, pour n'exclure aucune des déterminations qu'elle comporte, et, en particulier, pour lui faire exprimer les diverses racines de l'unité, il est indispensable d'assigner, comme limites à la variation de θ, des valeurs prises de plus en plus grandes à mesure que q augmente?

Lorsqu'on entre dans le système des valeurs imaginaires, il est à observer que, sauf les cas d'impossibilité fortuite, il n'est, pour la fonction de même que pour la variable, aucune détermination particulière que toutes deux n'admettent nécessairement. La seule chose qui change d'une fonction à une autre, c'est l'ordre dans lequel ces déterminations se succèdent, ou bien encore le degré de périodicité. Supposons, en effet, que la variable soit prise pour fonction, et réciproquement. La fonction, prise pour variable, reçoit immédiatement toutes les valeurs possibles. D'un autre côté, à chacune de ces valeurs il en correspond une que la variable, devenue fonction, acquiert forcément. Si donc, agissant directement sur la variable, on lui fait prendre successivement toutes les valeurs possibles, il faut que la fonction remplisse elle-même cette condition générale.

De là résulte un principe que j'énoncerai comme il suit :

Toute variation limitée des quantités r et θ, qui ne permet pas de réaliser dans la fonction le système entier des valeurs imaginaires, est, par cela seul, nécessairement incomplète.

Appliquant ce principe à la fonction particulière

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}\, r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{l}\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1},$$

on reconnaît immédiatement que la variation de θ ne peut être complète par rapport à la fonction qu'autant qu'elle est illimitée.

L'exemple que je viens de choisir est très-propre à montrer comment, en certains cas, le série des valeurs imaginaires est à peine entamée par la variation continue de la fonction, tandis qu'elle est déjà complétement épuisée par celle de la variable. L'explication de ce fait est toute simple. Il dépend de la multiplicité des valeurs qui dans la fonction répondent à une seule et même détermination de la variable imaginaire. L'inverse est également possible : je citerai, pour exemple, la fonction

$$x^m = r^m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m = r^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta).$$

Essentiellement continue pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, cette fonction est en même temps périodique, et, par

elle, la série des valeurs imaginaires est m fois épuisée lorsqu'elle ne l'est qu'une fois par la variable x.

Je crois en avoir dit assez pour établir nettement en quoi la continuité consiste, *indépendamment de toute convention*, et pour montrer avec évidence que rien en elle n'implique ni n'exclut, par rapport à la fonction, la condition d'une certaine périodicité. Lorsque, conformément aux principes, on opère directement sur les quantités r et θ, en leur conservant le caractère de variables indépendantes, il n'y a pas même l'apparence d'une difficulté. qu'importe, en effet, à la continuité relative de la fonction qu'il y ait ou non périodicité dans la suite des valeurs que la variation continue de θ fait prendre à la variable ainsi qu'à la fonction? qu'importe que cette variation soit plus ou moins limitée, pourvu que, de part et d'autre, on ne considère jamais que l'intervalle où elle s'accomplit?

La variable x demeurant continue, imaginons que, pour toutes valeurs de r comprises entre deux limites déterminées, la fonction varie périodiquement suivant un certain mode, et qu'au delà de ces limites, le mode change brusquement. Il est clair que ces limites ne pourront être franchies sans qu'il y ait, en général, changement brusque de détermination, et, par conséquent, solution de continuité. Si donc une fonction a d'abord un certain degré de périodicité, puis qu'elle le perde brusquement, ou que, ne l'ayant pas, elle l'acquière tout à coup, la discontinuité surgit en même temps. Cette remarque explique peut-être l'erreur où l'on est tombé en faisant dépendre la continuité de la périodicité, et confondant ainsi deux caractères essentiellement distincts.

Avant de terminer ce sujet, je crois utile d'ajouter quelques mots sur la construction géométrique des valeurs imaginaires et sur les avantages spéciaux que ce mode de représentation peut offrir dans la question qui nous occupe.

Soient t et u deux coordonnées rectangulaires. Si l'on pose, en général,

$$P + Q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1},$$

toute valeur de l'imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ fixe la position d'un point; et réciproquement, tout point du plan des coordonnées répond à l'une des valeurs de cette imaginaire.

On voit ainsi que toute expression imaginaire, considérée dans l'ensemble des déterminations qu'elle comporte, et abstraction faite des solutions de continuité qu'elle peut offrir accidentellement, dans les cas d'impossibilité fortuite, est exactement représentée par la suite infinie des points que comprend une surface plane.

Cherchons quel est, par rapport à la génération de cette surface, le sens exprimé par les divers modes de variation continue, sur lesquels notre attention s'est portée plus particulièrement.

Soit d'abord

$$x = p + q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1};$$

si l'on fait correspondre à chaque valeur de p toutes les valeurs de q, on a pour chaque valeur de p une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses, et c'est par le déplacement de cette droite, transportée parallèlement à elle-même, que la génération du plan s'effectue. Lorsqu'on procède inversement, c'est-à-dire en faisant correspondre à une valeur de q toutes les valeurs de p, puis en donnant successivement à q toutes les valeurs possibles, la génération a lieu par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Soit ensuite

$$x = r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta = t + u\sqrt{-1}.$$

De là résulte

$$t = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta,$$

et, suivant qu'on élimine r ou θ,

$$u = t.\tang\theta,$$

ou bien

$$u^2 + t^2 = r^2.$$

Dans le premier cas, chaque valeur de θ, se combinant avec toutes les valeurs de r, fournit une droite qui passe par l'origine et fait avec l'axe des abscisses un angle égal à θ. Lorsque θ varie, cette droite tourne, et c'est par sa rotation autour de l'origine que le plan se trouve engendré.

Dans le second cas, il y a combinaison directe de chaque valeur

de r avec toutes les valeurs de θ. Chacune de ces combinaisons donne une circonférence de cercle ayant son centre à l'origine, et la quantité r pour rayon. r variant à son tour, la circonférence se développe progressivement, et la génération du plan s'effectue.

Considérons maintenant quelques fonctions particulières, et, pour abréger, adoptons exclusivement, en ce qui concerne la variable x, le mode de variation continue qui se traduit par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine.

Soit, en premier lieu, la fonction x^m; on a

$$x^m = (r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta)^m = r^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta).$$

C'est donc aussi par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine que se traduit la variation relative de la fonction x^m; dans ce mouvement, la vitesse change avec l'exposant m. Soit encore la fonction $\mathrm{l}\,x$; il vient

$$\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1}.$$

Ici c'est par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe des abscisses que se réalise dans la génération du plan le système complet des valeurs imaginaires. Lorsqu'on restreint la variation de θ entre les limites 0 et 2π, les positions extrêmes de la génératrice sont données par les équations

$$u = 0, \quad u = 2\pi,$$

et la surface engendrée se réduit à la bande que comprennent entre elles ces positions extrêmes.

Ces exemples suffisent; par eux on saisit clairement ce qu'exprime tout mode de variation continue susceptible d'être attribué à la variable imaginaire. Ils mettent, d'ailleurs, en évidence la relation qui s'établit entre l'un quelconque de ces modes et celui qui lui correspond dans la variation simultanée de la fonction. De part et d'autre il y a d'abord à considérer le mouvement d'un point, et, par suite, la génération de deux lignes, répondant l'une à la variable, l'autre à la fonction; puis vient, avec ou sans changement de forme, le déplacement de ces lignes; de là résultent deux aires planes, qui s'engendrent simultanément et se correspondent de la même manière que leurs

génératrices respectives. Par hypothèse, l'un de ces deux systèmes est essentiellement continu, c'est-à-dire que dans le mouvement du point décrivant une position quelconque de la génératrice, comme dans celui de la génératrice décrivant une portion d'aire quelconque, il n'y a jamais ni lacune ni saut brusque. Tant que l'autre système remplit les mêmes conditions, il y a continuité relative.

En résumé, soit une fonction quelconque réelle ou imaginaire, la variable peut être assujettie à varier continûment entre certaines limites. Quelle que soit, en ce cas, la détermination particulière du mode de variation, il reste caractérisé par l'absence de tout changement brusque, et la fonction varie, en général, de la même manière. Aussi longtemps que cette condition, supposée remplie par la variable, l'est également par la fonction, on dit de celle-ci qu'elle est et demeure fonction continue de la variable que l'on considère.

D'après tout ce qui précède, je crois être en droit de poser la conclusion suivante :

Dans le théorème de M. Cauchy, relatif au développement des fonctions en série, la condition de continuité n'est pas la seule qu'on doive mentionner. Elle est insuffisante, vu qu'elle n'implique, en aucune manière, une certaine périodicité de la fonction, condition essentiellement distincte de la première et non moins nécessaire.

§ II.

Application de la théorie qui précède à la solution de plusieurs difficultés.

L'énoncé que j'ai reproduit dans la première partie de cette Note (*voir* page 306), se termine par ces mots : *hors de là, la série devient divergente.*

M. Cauchy n'admet pas que la discontinuité de la fonction entraîne toujours la divergence du développement. Loin de là, il fait la remarque suivante :

« J'ai précisément émis l'opinion contraire à celle qu'énonce ici » M. Lamarle, dans un précédent Mémoire où je me suis spécialement » occupé *des fonctions dont les développements restent convergents, tandis qu'elles deviennent discontinues.* M. Lamarle lui-même ne

» pourra révoquer en doute l'existence de fonctions qui présentent ce
» double caractère. Il me suffira de prendre pour exemple la fonc-
» tion même qu'il a choisie comme propre à montrer une application
» du théorème général, savoir :

$$(1+x)^m,$$

» et de considérer spécialement le cas où, le module r de x étant
» inférieur à l'unité, l'exposant m devient fractionnaire, et de la
» forme $\frac{p}{q}$, p, q étant des nombres entiers. »

Observons d'abord que je n'ai point entendu parler des fonctions dans lesquelles il surviendrait tout à coup un changement brusque du mode de construction. Si l'on avait, par exemple,

$$y = (1+x)^m \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{4}-x\right)z + \sin\left(\frac{1}{3}-x\right)z}{z}\,dz,$$

il est clair que la série resterait convergente pour toute valeur de x inférieure à l'unité; et cependant il y aurait changement brusque pour les valeurs particulières $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{3}$.

La restriction que je viens d'indiquer résulte de la nature même de la question. On est naturellement conduit à la faire, et elle peut rester sous-entendue sans crainte d'aucune méprise. Aussi n'est-ce pas sur ce point que porte l'objection qui m'est opposée.

Avant d'aborder la discussion de chacun des exemples produits par M. Cauchy à l'appui de son opinion, il convient que je rappelle en quelques mots la marche que j'ai suivie pour fixer d'une manière précise le sens des opérations à effectuer dans les diverses applications du théorème qui nous occupe.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, supposée réelle : si l'on y remplace x par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, il vient

$$(1) \qquad f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \psi(r, \theta)\sqrt{-1},$$

φ et ψ étant deux fonctions réelles.

Imaginons maintenant que, pour toute valeur de x inférieure au

nombre R, $f(x)$ soit développable en série convergente d'après la formule de Maclaurin. On aura

$$(2)\qquad f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

et, par suite,

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \left\{\begin{array}{l} a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots \\ + \sqrt{-1}\,(br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots) \end{array}\right\}$$

De là résulte

$$(3)\qquad \varphi(r, \theta) = a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$(4)\qquad \psi(r, \theta) = br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots.$$

Tant que ces équations subsistent, c'est-à-dire tant que le module r reste compris entre $+$ R et $-$ R, les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ se trouvent assujetties à remplir plusieurs conditions importantes :

1°. Pour toute valeur de r, elles varient continûment avec θ;

2°. Pour toute valeur de θ, elles varient continûment avec r;

3°. Elles affectent une certaine périodicité, en vertu de laquelle on a constamment

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \theta + 2k\pi), \qquad \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + 2k\pi),$$

et, en outre,

$$\varphi(r, \theta) = \varphi[-r, \theta + (2k+1)\pi], \quad \psi(r, \theta) = \psi[-r, \theta + (2k+1)\pi],$$

$2k\pi$ représentant un multiple quelconque de la circonférence.

Bien que ces conditions, prises avec toute l'extension qu'elles comportent, doivent être considérées comme une conséquence nécessaire de la possibilité du développement, on peut néanmoins les restreindre sans qu'elles cessent pour cela d'être suffisantes. C'est ainsi qu'en les réduisant au plus petit nombre possible, on est conduit à faire abstraction des valeurs négatives du module, à limiter la variation de l'argument θ par les valeurs extrêmes 0 et 2π, enfin à exprimer la condition de périodicité par les équations particulières

$$(5)\qquad \varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi).$$

Tel est le sens que j'ai attaché à l'énoncé suivant :

Pour qu'une fonction soit développable en série convergente, d'après la formule de Maclaurin, il faut deux conditions distinctes, à la fois nécessaires et suffisantes.

La première, c'est que la continuité subsiste à partir de $r = 0$, pour toute valeur du module égale ou inférieure à celle que l'on considère;

La seconde, c'est que, dans cet intervalle, chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ reprenne, pour $\theta = 2\pi$, la valeur qu'elle prend pour $\theta = 0$.

Quant à la marche à suivre dans les diverses applications, elle est toute tracée par les considérations qui précèdent. On commence par effectuer la séparation indiquée par l'équation (1); puis, prenant à part les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, on examine si, pour toute valeur de r, moindre qu'un certain nombre R, elles satisfont à la condition des limites exprimée par les équations (5). En supposant cette condition remplie, il faut s'assurer, en outre, que la continuité subsiste à partir de $r = 0$, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ ne subissent aucun changement brusque :

1°. Lorsque, le module r affectant une valeur quelconque moindre que R, l'argument θ varie avec continuité entre les limites 0 et 2π;

2°. Lorsque, θ demeurant quelconque et constant, r varie continûment à partir de 0 jusqu'à la limite R.

Cela posé, cherchons si les fonctions choisies pour exemple par M. Cauchy présentent effectivement le double caractère qui leur est attribué, c'est-à-dire s'il est vrai qu'elles deviennent discontinues, tandis que leurs développements demeurent convergents.

Soit d'abord la fonction

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} = (1 + r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta)^{\frac{p}{q}} = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Pour déterminer chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, je fais

$$1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha.$$

De là résulte

$$\varphi(r, \theta) = \rho^{\frac{p}{q}}\cos\frac{p}{q}\alpha, \quad \psi(r, \theta) = \rho^{\frac{p}{q}}\sin\frac{p}{q}\alpha.$$

Il vient, d'ailleurs, en adoptant pour ρ la racine positive fournie par

le radical,

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta}.$$

Par hypothèse, r est plus petit que l'unité. On a donc constamment

$$\cos\alpha > 0.$$

Quant à $\sin\alpha$, il change de signe et s'annule avec $\sin\theta$.

Il suit de là que, tandis que θ varie entre 0 et π, l'angle α part de 0, croît continûment jusqu'à une certaine limite moindre que $\frac{\pi}{2}$, puis décroît de manière à redevenir nul pour $\theta = \pi$. Au delà, c'est-à-dire lorsque θ passe de la valeur π à la valeur 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif. En d'autres termes, si l'on désigne par ε et ε' deux valeurs de α correspondantes, l'une à θ, l'autre à $2\pi - \theta$, il est visible qu'on a généralement

$$\varepsilon' = -\varepsilon.$$

Les valeurs de α qui répondent à $\theta = 0$ et à $\theta = 2\pi$, se réduisant à une seule et même valeur, zéro, la condition des limites est évidemment satisfaite. Il en est de même de la condition de continuité, les variables ρ, $\cos\frac{p}{q}\alpha$, $\sin\frac{p}{q}\alpha$ ne subissant aucun changement brusque. On voit donc que si, pour toute valeur du module moindre que l'unité, la fonction

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}}$$

est développable en série convergente d'après la formule de Maclaurin, elle est en même temps continue pour tout cet intervalle.

D'accord avec moi sur les principales données de cette question, M. Cauchy y introduit une convention arbitraire, et, par elle, il crée une discontinuité factice. La convention dont je parle consiste à n'admettre pour l'angle α *que des valeurs positives, comprises entre les limites* 0 *et* 2π. Dans ce système, l'angle α prend tout à coup deux valeurs, lorsqu'on fait $\theta = \pi$: l'une est 0, l'autre 2π. La première subsiste comme limite de la suite qui commence à $\theta = 0$ et finit à $\theta = \pi$; la se-

conde, comme origine des valeurs qui se succèdent à partir de $\theta = \pi$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. De là vient la discontinuité. Elle dépend, ainsi qu'on le voit, d'une condition particulière, arbitrairement introduite dans un mode de variation qui déjà se trouve complétement déterminé. L'angle α n'est point une variable dont on dispose, c'est une fonction de la variable indépendante θ. Dira-t-on que, θ variant entre les limites 0 et 2π, la fonction α doit être assujettie à varier entre ces mêmes limites? Une pareille prétention serait insoutenable. Comment, d'ailleurs, justifier la bizarre anomalie que présenterait la fonction α, si, n'affectant jamais qu'une valeur unique, elle en acquérait deux pour $\theta = \pi$?

Ce premier point étant éclairci, passons aux exemples cités par M. Cauchy, dans le Mémoire qu'il a publié sur les fonctions dont les développements restent convergents, tandis qu'elles deviennent discontinues (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XIX, page 142).

Ces exemples sont au nombre de deux; je les examinerai successivement.

Considérons d'abord la fonction

$$y = \left[1 - x^2 + x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[1 - x^2 - x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

M. Cauchy fait observer que, *pour des valeurs réelles* de la variable x, la fonction y cesse d'être continue à partir de $x = 1$. Il démontre, d'ailleurs, que le développement de cette fonction, ordonné suivant les puissances ascendantes de x, ne cesse pas d'être convergent, tant que l'on a

$$x^2 < 2.$$

Posons

$$1 - x^2 = \cos\alpha, \quad x\sqrt{2 - x^2} = \sin\alpha.$$

Nous aurons, en substituant,

$$y = 2\cos\frac{\alpha}{3} = 2\cos\frac{\arccos(1 - x^2)}{3}.$$

La forme sous laquelle je viens d'écrire la fonction y montre évidemment que, *pour des valeurs réelles* de la variable x, cette fonction ne cesse pas d'être continue, à partir de $x = 1$, comme le suppose

M. Cauchy, mais seulement à partir de $x^2 = 2$. Il n'y a donc rien d'extraordinaire à ce que son développement demeure convergent jusqu'à cette dernière limite. Ici encore la discontinuité prétendue n'existe que comme résultat d'une convention purement arbitraire. Cette convention, reproduite dans l'ouvrage déjà cité de M. l'abbé Moigno, consiste en ce que le changement de signe de la partie réelle $1 - x^2$ est regardé comme impliquant une solution de continuité.

Prenant, en second lieu, la fonction

$$y = \sqrt{2 - 3x + x^2} = \sqrt{(1 - x)(2 - x)},$$

et posant

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

d'où résulte

$$y = \sqrt{2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta - (3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta)\sqrt{-1}},$$

M. Cauchy remarque que la partie réelle de l'expression placée sous le radical, savoir,

$$2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta = 2\left(\frac{3}{4} - r\cos\theta\right)^2 + \frac{7}{8} - r^2,$$

s'évanouit quand on pose

$$r = \sqrt{\frac{7}{8}}, \quad \cos\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{r},$$

et, par conséquent, devient négative pour certaines valeurs de θ, alors que r est compris entre $\sqrt{\frac{7}{8}}$ et 1. Il conclut de là que la fonction y, qui reste continue par rapport à r et θ pour toute valeur du module inférieure à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, devient discontinue à partir de cette limite.

D'un autre côté, M. Cauchy constate que si l'on développe la fonction $y = \sqrt{1 - x}\sqrt{2 - x}$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, la série ainsi obtenue ne cesse pas d'être convergente pour des valeurs de x supérieures à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, mais inférieures à l'unité. Après avoir produit ce dernier exemple d'une fonction dont le déve-

loppement reste convergent, tandis qu'elle devient discontinue. M. Cauchy ajoute :

« Au reste, il est important d'observer que les deux expressions

$$(2 - 3x + x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - x)^{\frac{1}{2}}(2 - x)^{\frac{1}{2}},$$

» sont deux formes différentes d'une seule et même fonction, *tant* » *que le module de x reste inférieur à la limite* $\sqrt{\frac{7}{8}}$. Mais quand le » module de x devient supérieur à cette limite, les deux expressions » dont il s'agit *représentent deux fonctions distinctes*, qui ne sont » plus identiquement égales entre elles pour toutes les valeurs réelles » de l'angle θ. De ces deux fonctions, la seconde seule reste continue » pour un module de x supérieur à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, mais inférieur à l'unité, et » représente constamment dans cet intervalle la somme de la série » qu'on avait obtenue en développant la première fonction. »

En reproduisant ce passage, où les règles fondamentales du calcul semblent être en défaut, j'ai voulu montrer le danger des conventions sur lesquelles repose le paradoxe énoncé par M. Cauchy. Comment concevoir, en effet, qu'il ne soit pas permis d'écrire *identiquement*

$$\sqrt{2 - 3x + x^2} = \sqrt{1 - x}\sqrt{2 - x}.$$

La difficulté, qui se présente ici, disparaît d'elle-même, lorsque, laissant de côté toute convention arbitraire, on procède suivant la marche que nous avons tracée.

L'expression à transformer étant

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta - (3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta)\sqrt{-1}} \\ &= \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}.\psi(r, \theta), \end{aligned}$$

je pose

$$2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta = \rho\cos\alpha, \quad 3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta = \rho\sin\alpha.$$

De là résulte

$$\varphi(r, \theta) = \rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \psi(r, \theta) = -\rho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

On a, d'ailleurs, en adoptant la valeur positive fournie par le radical,

$$\rho = \sqrt{(1 - 2r\cos\theta + r^2)(4 - 4r\cos\theta + r^2)}.$$

Si l'on remarque que la valeur de $\rho \sin\alpha$ peut se mettre sous la forme

$$\rho \sin\alpha = r \sin\theta\,(3 - 2r\cos\theta),$$

et que ρ n'est jamais nul, si ce n'est pour les valeurs particulières $r = 1$, $r = 2$, combinées avec $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, on voit immédiatement que, pour toute valeur de r moindre que $\frac{3}{2}$ et autre que l'unité, $\sin\alpha$ change de signe et s'annule avec $\sin\theta$.

Cela posé, soit d'abord

$$r < \sqrt{\tfrac{7}{8}};$$

comme on a

$$\rho\cos\alpha = 2\left(\tfrac{3}{4} - r\cos\theta\right)^2 + \tfrac{7}{8} - r^2,$$

il est visible que $\cos\alpha$ reste constamment positif.

Il suit de là que, tandis que θ varie entre 0 et π, l'angle α part de zéro, croît continûment jusqu'à une certaine limite moindre que $\frac{\pi}{2}$, puis décroît de manière à redevenir nul pour $\theta = \pi$. Au delà, c'est-à-dire lorsque θ passe de la valeur π à la valeur 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif.

La condition des limites est évidemment satisfaite. On voit également que la continuité n'est pas interrompue.

Soit ensuite

$$r = \sqrt{\tfrac{7}{8}}.$$

Rien ne change, si ce n'est que la variation de α s'étend, sans la dépasser, jusqu'à la limite $\frac{\pi}{2}$.

Soit maintenant

$$r > \sqrt{\tfrac{7}{8}} < 1.$$

En écrivant la valeur de $\rho \cos \alpha$, sous la forme suivante

$$\rho \cos \alpha = 2\left(r \cos \theta - \frac{3+\sqrt{8r^2-7}}{4}\right)\left(r \cos \theta - \frac{3-\sqrt{8r^2-7}}{4}\right),$$

il est aisé de voir que rien ne change encore, si ce n'est que la valeur $\frac{\pi}{2}$ est dépassée et qu'elle répond à une valeur de θ qui se rapproche indéfiniment de zéro, à mesure que le module r converge vers l'unité.

En ce cas, α part de zéro, croît jusqu'à une certaine limite moindre que π, puis décroît et redevient nul. Cette variation, toujours continue, s'accomplit en même temps que θ croît de 0 à π. Au delà, c'est-à-dire quand θ croît à partir de π jusqu'à 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif.

Cette discussion montre que la condition des limites ne cesse pas d'être satisfaite et qu'il y a toujours continuité.

Soit encore

$$r = 1:$$

il vient alors

$$\cos \alpha = \frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \sin\frac{\theta}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{3-2\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\rho = 2 \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{5-4\cos\theta}.$$

Le seul changement qui s'introduise, relativement au mode de variation qui précède, consiste en ce que l'angle α ne part plus de zéro, mais bien de $\frac{\pi}{2}$. Cette circonstance empêcherait que la condition des limites fût remplie, si ρ ne s'annulait point aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Quant à la continuité, il est visible qu'elle subsiste sans interruption. Il est vrai que, pour toute valeur de r moindre que l'unité, l'angle α part de zéro, tandis que pour $r = 1$, sa valeur initiale est $\frac{\pi}{2}$. Toutefois, il n'y a pas de changement brusque dans les fonctions $\varphi(r, \theta)$,

$\psi(r, \theta)$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, tandis que le module converge vers l'unité, les valeurs de ρ et de α, qui répondent à des valeurs de θ très-voisines des limites 0 et 2π, se rapprochent indéfiniment de celles qui, dans l'hypothèse $r = 1$, répondent à ces limites.

Supposons, en dernier lieu, que la valeur du module soit comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$.

En ce cas, les valeurs extrêmes de l'angle α sont respectivement $+\pi$ et $-\pi$. D'un autre côté, ρ ne s'annule point. La condition des limites n'est donc plus satisfaite pour la fonction $\psi(r, \theta)$, et, par conséquent, la série cesse d'être convergente. Néanmoins, et c'est là une circonstance qu'il importe de signaler, il suffit que la valeur attribuée à ρ reste constamment positive, pour que la continuité ne soit pas interrompue.

On voit, par ce qui précède, que, contrairement à l'opinion de M. Cauchy, et eu égard à ce qu'il n'est pas permis de considérer le changement de signe de la partie réelle

$$\rho = 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta,$$

comme impliquant, par lui seul, une solution de continuité, la fonction

$$y = \sqrt{2 - 3x + x^2}$$

est constamment continue, non-seulement pour des valeurs du module inférieures à l'unité, mais, en outre, pour des valeurs plus grandes, les quantités r et ρ conservant, par hypothèse, un seul et même signe.

On observera qu'en détruisant l'objection qui m'était opposée, j'ai fait aussi disparaître le paradoxe énoncé dans le passage reproduit ci-dessus (page 337).

Dans la Note à laquelle je réponds, M. Cauchy exprime l'opinion suivante :

« La nature des conventions a une influence marquée sur le caractère des fonctions considérées comme continues ; de sorte qu'en passant d'un système de convention à un autre, on peut rendre discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement.

« D'après cette remarque, il n'y pas lieu de s'étonner que les développements de certaines fonctions restent convergents, dans le cas où » ces fonctions deviennent discontinues, puisqu'en modifiant les conventions admises, on peut quelquefois enlever à une fonction dont » le développement était convergent le caractère de continuité. Pour » rendre plus souvent applicable le théorème sur la convergence des » développements, il est évidemment utile d'adopter les conventions » qui conservent ce caractère le plus longtemps possible aux fonctions » employées dans le calcul. »

Selon moi, le caractère d'où dépend la continuité est un caractère absolu qu'on n'est point maître de modifier, et qui se conserve intact dans tout système de convention susceptible d'être introduit dans le calcul, sans porter atteinte aux principes fondamentaux. Quoi qu'il en soit, M. Cauchy reconnaîtra, sans doute, qu'en adoptant ma manière de voir, l'on restitue aux fonctions qu'il a choisies pour exemple la continuité dont elles se trouvent dépouillées dans le système de conventions qui lui appartient. Sous ce rapport, et alors même qu'on serait libre d'opérer autrement, il y aurait donc avantage à se conformer aux principes que j'ai développés ci-dessus. Ce n'est point en appliquant ces principes, mais pour s'en être écarté, que M. Cauchy a introduit la discontinuité là où, en réalité, elle n'existe point.

Avant de terminer cet article, j'ajouterai quelques mots sur la condition de continuité considérée par rapport aux fonctions dérivées.

Lorsque j'ai dit de cette condition qu'elle pouvait être omise, j'ai entendu exprimer qu'elle devait l'être nécessairement. M. Cauchy fait observer *qu'on pourrait à la vigueur se passer de la considération des fonctions dérivées*, mais qu'il vaut mieux ne pas l'abandonner entièrement, attendu qu'elle sert, en certains cas, à déterminer le module des séries.

On sait que les limites entre lesquelles la série de Maclaurin est convergente sont les mêmes pour la fonction que pour l'une quelconque de ses dérivées, et réciproquement. En faisant cette remarque dans mon premier travail sur le théorème de M. Cauchy, j'ai été conduit à observer que, bien que la considération de la dérivée fût superflue et indirecte, il pouvait être quelquefois plus simple d'y recourir. Dans ce cas, la dérivée se substitue à la fonction, et celle-ci

cesse d'exiger aucune vérification directe. En général, le contraire a lieu, c'est-à-dire qu'on opère sur la fonction, sans avoir à s'inquiéter de la dérivée. Les calculs à faire n'étant pas toujours aussi simples qu'il serait désirable, il est bon que l'énoncé du théorème ne laisse aucun doute sur l'inutilité d'une double opération où la fonction et sa dérivée devraient toutes deux intervenir. Il convient, d'ailleurs, au point de vue de la rigueur mathématique, qu'une condition, démontrée surabondante, ne figure point au nombre de celles qui sont réputées nécessaires.

Une observation du même genre m'a été suggérée par la lecture d'un Mémoire [*] cité dans la Note à laquelle je réponds. Après avoir posé l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

M. Cauchy ajoute :

« Cette équation suppose que la fonction $f(x)$ reste finie et continue » par rapport à la variable x, depuis la limite $x = x_0$ jusqu'à la limite $x = X$. »

Je ferai remarquer, comme je l'ai dit ailleurs, que l'équation dont il s'agit suppose, en général, non pas que la dérivée $f(x)$, mais bien que la fonction $F(x)$, demeure continue dans l'intervalle que l'on considère.

---

[*] Voir *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, page 1073.

NOTE

SUR LA THÉORIE DES NORMALES A UNE MÊME SURFACE;

PAR M. J. BERTRAND

Dans un Mémoire qui fait partie du tome IX de ce Journal, j'ai démontré un théorème qui, combiné avec une formule bien connue d'Euler, définit d'une manière complète la disposition des normales à une même surface autour d'un point donné. J'ai déduit, comme corollaire de ce théorème, une proposition qui peut être utile, dans certains cas, pour décider si des droites sont ou ne sont pas normales à une même surface :

« Pour que des droites dont la direction est donnée en fonction des » coordonnées de leur point de départ, soient normales à une série » de surfaces, il faut et il suffit qu'en prenant un point A dans l'es- » pace et la droite AZ qui répond à ce point, si dans le plan normal » à AZ nous menons deux lignes infiniment petites, égales, AB, AC, » se coupant à angle droit, l'angle du plan ZAB avec la normale au » point B soit égal à l'angle du plan ZAC avec la normale au point C.

Le but de cette Note est de généraliser la proposition précédente et d'établir une relation analogue entre les positions de deux normales menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits, égaux, tracés sur la surface à partir du point A et faisant entre eux un angle quelconque donné.

Il est facile d'apercevoir, à priori, qu'une pareille relation doit exister; la position des normales à une surface autour d'un point donné ne dépend, en effet, que de trois éléments, savoir : la direction de l'une des lignes de courbure, et les deux rayons principaux. Or, pour définir la position de deux normales en des points donnés, il faut quatre angles; ces angles ne dépendant que de trois quantités, il doit nécessairement exister entre eux une relation.

Soient A la position d'un point sur une surface, AZ la normale en ce point, AB, AC deux arcs infiniment petits égaux, tracés sur la surface et faisant entre eux un angle θ. On peut définir les normales aux points B et C, par les angles φ et φ' que ces normales font avec les plans ZAB, ZAC, et, par les inclinaisons ψ et ψ' de leurs projections sur ces plans avec l'axe AZ. On sait que ces derniers angles ψ et ψ' sont proportionnels aux courbures des sections faites dans la surface par les plans ZAB, ZAC; nommons x l'angle de la direction AB avec l'une des lignes de courbure, et r, R les deux rayons de courbure de la surface, enfin ds la valeur commune des arcs AB, AC.

Nous aurons, par le théorème connu d'Euler,

$$(1)\qquad \frac{\psi}{ds} = \frac{1}{R}\cos^2 x + \frac{1}{r}\sin^2 x,$$

$$(2)\qquad \frac{\psi'}{ds} = \frac{1}{R}\cos^2(x+\theta) + \frac{1}{r}\sin^2(x+\theta).$$

D'ailleurs, d'après une formule démontrée dans mon Mémoire sur la théorie des surfaces (tome IX, page 140), on a

$$(3)\qquad \varphi = \frac{1}{2}ds\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\sin 2x,$$

$$(4)\qquad \varphi' = \frac{1}{2}ds\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\sin 2(x+\theta).$$

Si, entre ces quatre formules, nous éliminons x, R et r, nous obtiendrons la relation cherchée entre les angles φ, φ', ψ, ψ' et θ.

En divisant membre à membre les deux équations (3) et (4), il vient

$$\frac{\sin 2(x+\theta)}{\sin 2x} = \frac{\varphi'}{\varphi};$$

on en tire facilement

$$(5)\qquad \operatorname{tang} 2x = \frac{\varphi\sin 2\theta}{\varphi' - \varphi\cos 2\theta}.$$

$$(6)\qquad \operatorname{tang} 2(x+\theta) = \frac{\varphi'\sin 2\theta}{\varphi'\cos 2\theta - \varphi}.$$

D'ailleurs les équations (1) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$(7)\qquad \frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\cos 2x\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

$$(8)\qquad \frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\cos 2(x+\theta)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Remplaçons, dans les formules (7) et (8), $\frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ par $\frac{2\varphi}{ds \sin 2x}$ et $\frac{2\varphi'}{ds \sin 2(x+\theta)}$; puis, dans le résultat, écrivons, au lieu de tang $2x$ et de tang $2(x+\theta)$, leurs valeurs fournies par les formules (5) et (6), il viendra

$$(9) \qquad \frac{\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{ds}\,\frac{\varphi' - \varphi\cos 2\theta}{\sin 2\theta},$$

$$(10) \qquad \frac{\psi'}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{ds}\,\frac{\varphi'\cos 2\theta - \varphi}{\sin 2\theta};$$

soustrayant ces deux équations l'une de l'autre et supprimant le facteur ds, les quantités R et r s'éliminent en même temps, et nous avons

$$(11) \qquad \psi - \psi' = \frac{(\varphi + \varphi')(\cos 2\theta - 1)}{\sin 2\theta} - (\varphi + \varphi')\operatorname{tang}\theta,$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad \frac{\psi - \psi'}{\varphi' + \varphi} = -\operatorname{tang}\theta.$$

Si l'on prend $\theta = 90^\circ$, on doit avoir $\varphi' = -\varphi$; ce qui est précisément le théorème que je rappelais en commençant cette Note. La formule (12) peut, par conséquent, être considérée comme une généralisation de ce théorème.

Cette formule (12) peut aussi nous conduire à l'expression générale de la valeur de l'angle φ. Si, en effet, nous donnons à θ une valeur infiniment petite, $d\theta$, on pourra faire

$$\operatorname{tang}\theta = d\theta, \quad \psi' - \psi = d\psi, \quad \varphi' + \varphi = 2\varphi,$$

et il viendra

$$(13) \qquad 2\varphi = \frac{d\psi}{d\theta};$$

θ pouvant être compté à partir d'une direction arbitraire, nous pouvons supposer que ce soit à partir de l'une des lignes de courbure, en sorte que, par la formule d'Euler, on aura

$$\psi = ds\left(\frac{1}{R}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta\right).$$

d'où

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \sin 2\theta . ds,$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \sin 2\theta,$$

ce qui est précisément la formule (3).

Il est facile de voir que cette formule (12), de même que le théorème dont elle est la généralisation, caractérise complétement les dispositions que peuvent présenter autour d'un point donné les normales à une même surface; de telle sorte que, si un faisceau de droites vérifie cette formule pour deux directions particulières quelconques AB, AC, autour d'un point A, on peut affirmer qu'autour de ce point, ces droites sont normales à une même surface. Il ne serait pas difficile de démontrer cette proposition d'une manière rigoureuse; mais, pour éviter les calculs, je me bornerai à présenter ici le raisonnement suivant :

Si des droites sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, leurs directions étant définies par des fonctions continues des coordonnées de leur point de départ, la droite AZ, qui correspond au point A étant connue, la position des droites menées par les points infiniment voisins de A situés dans un plan perpendiculaire à AZ, dépendra de quatre constantes; en sorte que, si, à partir du point A, on mène dans deux directions données des arcs infiniment petits, égaux, AB, AC, les droites qui partent des points B et C étant définies chacune par deux angles seulement, on peut dire, à cause des quatre indéterminées dont ces quatre angles dépendent, qu'il n'existe entre eux aucune relation nécessaire. Si donc on sait que l'équation (12) est vérifiée, elle établira une relation entre les quatre constantes qui déterminent la position des droites autour du point A; et comme une seule relation entre ces mêmes constantes suffit pour exprimer que les droites sont normales à une même surface, celle que l'on trouverait par le procédé que j'indique ayant été démontrée nécessaire, on en peut conclure qu'elle est aussi suffisante.

Expériences sur le moteur hydraulique à flotteur oscillant. — Principes de quelques-unes de ses modifications ;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

La principale expérience a été approuvée par l'Institut, le 7 octobre 1844.

Description de l'appareil et objet de ces expériences.

Le moteur hydraulique de mon invention, objet de ces expériences, a été décrit dans un Rapport de M. Combes, tome IV de ce Journal, page 243, ainsi que dans deux Rapports favorables faits à l'Académie des Sciences, le premier, rédigé par M. Coriolis, le 13 janvier 1840, le second, par M. Lamé, le 7 octobre 1844. La description suivante de l'appareil d'essai que j'ai exécuté aux bassins de Chaillot, sous les auspices de M. l'ingénieur en chef Mary, suffira pour rappeler en quoi consiste ce système, qu'il ne faut confondre ni avec mes machines à élever de l'eau, ni avec mes fontaines intermittentes, sur lesquelles diverses Notes ont été publiées dans les tomes III, VI et VIII de ce Journal. M. Corot, ingénieur civil, ancien élève de l'École centrale des Arts et Manufactures, attaché à la direction des eaux de Paris, a bien voulu m'aider dans la plupart des expériences suivantes, dont j'ai répété les principales devant une Commission de l'Institut et deux réunions de savants, dont faisaient partie plusieurs inspecteurs généraux et plusieurs ingénieurs en chef des Ponts et Chaussées, ainsi que divers membres du Conseil de la Société d'Encouragement.

Un tuyau de $0^m,4$ de diamètre intérieur et de 20 mètres de long, formé de la réunion de plusieurs tuyaux de fonte à emboîtement, de $2^m,5$ de long chacun, était couché horizontalement sur le fond d'un des bassins de Chaillot. Un tuyau vertical en zinc, de $1^m,75$ de long et de

même diamètre intérieur, était raccordé avec ce tuyau horizontal au moyen d'un coude en fonte, aussi de même diamètre et de 1 mètre environ de rayon intérieur, formé de deux tuyaux à bride. Cet ensemble composait ainsi un large tuyau d'une forme analogue à un L.

Sur le sommet de la partie verticale était disposé un réservoir en zinc de $1^m,50$ de diamètre et de $0^m,50$ de haut. Mais, comme on l'avait fait carré pour le fixer dans l'angle du réservoir, il s'était voilé, et ne gardait plus l'eau qu'à $0^m,34$ au-dessus du sommet du tuyau vertical terminé par un anneau en cuivre de $0^m,02$ de large, mais de même diamètre intérieur que le tuyau.

L'eau était versée dans ce réservoir par un grand tonneau de jauge, contenant environ 10 mètres cubes, et auquel était adapté un gros robinet vanne que l'on ouvrait quand on voulait faire fonctionner l'appareil. Ce robinet était disposé de manière que le mouvement de l'eau affluente ne pouvait que nuire à son introduction dans le tuyau vertical, à cause de la force centrifuge qui en résultait autour de l'orifice de ce tuyau, afin de ne pas faire estimer trop haut l'effet utile.

L'entrée de l'eau du bassin quadrangulaire dans le tuyau vertical était alternativement interrompue et rétablie au moyen d'une sorte de vanne cylindrique ou soupape annulaire ouverte à ses deux extrémités, de $0^m,50$ de haut, formée de deux tuyaux en zinc concentriques, réunis par le bas et par le haut au moyen de deux couronnes annulaires, de façon à ne contenir que de l'air dans leur intervalle. Le diamètre du plus large de ces deux tuyaux était de $0^m,44$, celui du tuyau intérieur était de $0^m,36$. Ce dernier tuyau était entièrement et invariablement ouvert à ses deux extrémités. Cette soupape annulaire était soudée sur un anneau plat en cuivre de $0^m,02$ de large, semblable au siége fixe dont nous avons déjà parlé. Elle était tout simplement guidée, dans cet *appareil provisoire*, au moyen de trois tringles en fer de $0^m,32$ de saillie, réunies inférieurement, pour la solidité, par un petit cercle en zinc. La soupape et ces tringles qui lui étaient soudées pesaient en tout $1^{kil},5$ environ. Sa percussion sur son siége était insignifiante, et il eût été facile d'ailleurs de l'amortir par des moyens connus.

Cette soupape était en partie équilibrée au moyen d'un balancier en fer dont chaque bras avait environ 1 mètre de long, et qui était mobile autour d'un tourillon de $0^m,02$ de diamètre. Une de ses extrémités

embrassait la soupape annulaire au moyen d'une fourche qui y était adaptée de chaque côté par des tourillons de $0^m,009$ de diamètre. Le poids du balancier était de $9^{kil},50$. Le contre-poids était suspendu à l'autre bras du balancier au moyen d'une queue en fer mobile à cette extrémité, à laquelle elle tenait par un anneau. On le réglait de manière que la soupape conservât assez de poids pour bien fermer. On l'a fait varier sans que cela eût bien de l'importance. Quant à l'effet utile définitif, un excès de 5 ou 6 kilogrammes sur le contre-poids suffisait pour tenir la soupape fermée. Cette queue portait inférieurement une rondelle en zinc de $0^m,23$ de diamètre, qui venait périodiquement s'enfoncer dans un seau ordinaire contenant de l'eau jusqu'à une certaine hauteur. Il résultait de cette disposition tenant lieu d'un corps mou, que la soupape, lorsqu'elle était levée à la hauteur voulue, s'arrêtait sans ballotter d'une manière gênante pour l'écoulement de l'eau dans le système.

Le flotteur en zinc, qui utilisait le travail de l'eau motrice, était formé d'un cylindre d'à peu près $0^m,28$ de diamètre et d'un peu moins de 1 mètre de long, c'est-à-dire de $0^m,98$ environ, mais les extrémités étaient arrondies. Il portait un cône à chacune de ces extrémités. Le cône inférieur avait un côté à peu près égal à ce diamètre. Le cône supérieur avait $0^m,50$ de côté, et portait à son sommet une tubulure pour y introduire de l'eau, et une armature de $0^m,13$ de long, destinée à l'attacher à une corde de $0^m,02$ de diamètre, qui, passant sur deux poulies de renvoi, tenait à son autre extrémité un déclic ordinaire, qui accrochait périodiquement un mouton du poids de 55 kilogrammes, soulevé à chaque période à une hauteur de $1^m,62$.

Le flotteur cylindrique dont je viens de parler passait librement au milieu de la soupape annulaire, ouverte, comme je l'ai dit, à ses deux extrémités, et à laquelle cette forme donnait aussi l'avantage capital de laisser la colonne liquide dans le tuyau de conduite abandonnée librement à elle-même, quand l'écoulement du bief supérieur était interrompu, sans que la colonne oscillante subît aucune interruption; en un mot, sans qu'il fût possible de produire un *coup de bélier*, quand même on l'aurait voulu.

Voici maintenant comment la machine fonctionne. Le tuyau vertical étant une première fois rempli d'eau, comme je l'expliquerai plus

loin, quoiqu'il soit toujours ouvert à ses deux extrémités, la soupape annulaire *flotte*, et permet à l'eau du bief supérieur de s'introduire dans le tuyau vertical. La vitesse s'engendre alors graduellement dans le tuyau de conduite, en vertu de la hauteur du niveau du bief supérieur au-dessus de celui du bief inférieur. La pression motrice se compose de deux parties, de la pression de l'eau dans le réservoir, ou bief supérieur, sur le siége de la soupape annulaire, et de la pression de l'eau contenue dans le tuyau vertical au-dessus du niveau du bief inférieur jusqu'à ce siége fixe. En vertu de cette dernière pression, il y a une époque à laquelle le tuyau tend à débiter plus d'eau que ne peut en fournir le réservoir supérieur par l'orifice resté libre en vertu de la levée de la soupape. Alors il se produit une véritable succion, ou *non-pression*, et la soupape retombe sur son siége de la manière suivante. Il se présente, à l'époque dont je viens de parler, un phénomène intéressant. Pendant que la soupape est ouverte, de manière à conserver dans son tuyau central une colonne liquide annulaire comprise entre les parois de ce tuyau et le flotteur cylindrique remonté, ce flotteur et cette colonne liquide annulaire semblent rester en repos. Mais à l'instant où la vitesse voulue est acquise dans le tuyau de conduite, cette colonne, soutenue ainsi pendant un certain temps, comme le serait une sorte de colonne manométrique, à un niveau un peu moins élevé que celui du réservoir supérieur, mais sensiblement constant, descend tout à coup, et cesse de soutenir latéralement la soupape, qui tombe brusquement sur son siége.

Cet effet provient évidemment d'un phénomène de *non-pression* qu'il est naturel d'attribuer à une succion d'une espèce particulière, analogue à celle qui a été étudiée par D. Bernoulli, etc. On avait d'ailleurs tout le temps nécessaire pour s'assurer de la stabilité dont il s'agit, car la durée totale du temps pendant lequel la soupape ne reposait pas sur son siége était d'un peu plus de 4 secondes [*].

---

[*] Je n'ai peut-être pas assez remarqué, dans mon dernier Mémoire, que ce système de *succion* pourrait, à la rigueur, suffire pour faire fermer le *piston-soupape* n° 1. On conçoit, du reste, que si la percussion de l'eau affluente a commencé par entraîner le *piston-soupape* aspirant, que je rappelle, il finit par se trouver dans la sphère d'action de ce phénomène. Le tuyau tend à débiter plus d'eau qu'il ne peut en venir à cette

Cette opération étant finie, la colonne liquide, abandonnée à son libre mouvement dans le tuyau de conduite toujours ouvert à ses deux extrémités, puisque la soupape est annulaire, descendait autour du flotteur cylindrique, et lui permettait d'agir par son propre poids sur la résistance à vaincre. On le voyait bientôt entièrement découvert. La colonne liquide, en vertu de son mouvement acquis, descendait à une certaine profondeur au-dessous du niveau du bief inférieur. Elle remontait ensuite et rencontrait le flotteur qui, à la fin de sa descente, venait y éteindre sa vitesse, tout en décrochant le mouton parvenu au haut de sa course. Alors cette colonne enveloppait graduellement le flotteur; au premier instant de sa rencontre, elle bouillonnait un peu autour de son cône inférieur, puis elle lui donnait bientôt, en vertu de sa pression latérale graduellement croissante, une vitesse de bas en haut à peu près égale, en général, à la sienne propre. Enfin la colonne, arrivée au haut de sa course, entr'ouvrait la soupape, qui, permettant à l'eau du bief supérieur de se poser sur l'eau remontante, contribuait avec elle à remettre les choses dans l'état où elles étaient avant la descente du flotteur, c'est-à-dire à rétablir la colonne de niveau avec le bief supérieur, et ainsi de suite indéfiniment.

On voit que, dans cette expérience, ce n'est pas l'eau qui *travaille* immédiatement; elle ne travaille qu'à relever le flotteur, dont le poids, abandonné ensuite à lui-même, agit directement sur la résistance à vaincre. La descente du flotteur durait environ 3 secondes, et son ascension 2 secondes. La durée totale de chaque période était d'à peu près $9\frac{1}{2}$ secondes; il y en avait cinquante-sept en 9 minutes environ.

Pour transformer le mouvement alternatif du flotteur en mouve-

---

époque par l'orifice de plus en plus diminue. Il y a donc une cause de succion croissante encore plus intense que pour l'expérience décrite dans le texte, et, par conséquent, une cause très-probablement suffisante pour faire fonctionner le système sans *cataracte*. Quant à la queue inférieure du *piston-soupape* qui porte le *boulet*, ou la surface quelconque sur laquelle peut agir la percussion de l'eau affluente pour commencer à le faire baisser, il est à peine nécessaire d'ajouter que cette queue pourrait être articulée de manière à ne pas augmenter la profondeur des fondations. Au reste, quand le tuyau sera tout entier horizontal, il n'y aura plus à s'embarrasser d'aucun coude. Le piston sera toujours facile à manœuvrer par un moyen quelconque.

ment circulaire, on aurait pu, si ce flotteur avait été guidé, le faire travailler en partie de bas en haut, en réglant sa densité d'une manière convenable. Il est évident qu'on aurait pu le faire monter beaucoup moins vite, puisqu'il se repose un certain temps au haut de sa course. On conçoit donc que si un volant l'avait fait convenablement émerger au haut de cette course, cela aurait suffi pour que l'on eût pu sans beaucoup de difficulté rendre la durée de la course ascendante égale à celle de la course descendante, d'autant plus qu'à la fin de la période, la vitesse dans le sens vertical est nécessairement très-affaiblie quand on emploie un volant. Mais on peut diminuer cette élévation au-dessus de l'eau en faisant plonger un peu plus profondément, au moyen du même volant, le flotteur dans la colonne remontante. Si c'était ici le lieu, je donnerais le détail des dimensions qui peuvent favoriser la transformation de mouvement, au moyen des variations de diamètre du tuyau vertical. Il suffit de remarquer, relativement à cette expérience, que la colonne liquide descend au-dessous du flotteur et le rencontre dans sa course remontante. Or, pour augmenter la durée de cette époque du mouvement, il aurait suffi d'élargir convenablement le bas du tuyau vertical, puisqu'il faut d'autant plus de temps pour éteindre ou pour engendrer une quantité donnée de force vive, que les pressions refoulantes ou motrices sont moindres. Il en serait d'ailleurs résulté que le flotteur aurait pu descendre plus longtemps, même à partir du moment où il aurait rencontré la colonne remontante, parce que, si le tuyau avait été plus gros autour de sa base, il aurait pu y pénétrer plus profondément, par la raison même que le liquide refoulé autour de lui aurait eu, pour une course donnée du flotteur, moins de hauteur et moins de vitesse. Mais ces considérations conduisant à des recherches assez délicates, j'en ferai le sujet d'un Mémoire distinct de ce travail, quand je les aurai d'ailleurs confirmées par de nouvelles études expérimentales sur ce système ainsi considéré comme une espèce particulière de *roue hydraulique verticale*.

On fera, en général, débiter à la machine un peu plus d'eau que cela n'est nécessaire, afin de pouvoir tenir compte des irrégularités accidentelles. Ainsi que je le remarquerai plus loin, quand elle débite un peu trop d'eau, il en remonte un peu au bief supérieur à chaque période, de sorte que cela n'a pas beaucoup d'inconvénients.

Dans cet appareil d'essai, le flotteur cylindrique n'était pas guidé : il ballottait, abandonné à lui-même dans la colonne liquide, et rencontrait même quelquefois la paroi du tuyau ou les guides de la soupape. C'est par cette raison que j'avais plus allongé le cône supérieur que le cône inférieur. Quant à ce dernier, je pense que, pour ces conditions de l'appareil, sa forme doit être dans une bonne exécution, considérée plutôt comme celle d'une poupe que comme celle d'une proue ; car il resterait principalement à considérer le mouvement de l'eau relativement à ce cône, pendant que le flotteur se tient en repos après avoir accroché le mouton à la fin de sa course ascensionnelle, et forme alors, par sa position dans le centre du tuyau, un orifice annulaire au sommet de ce tuyau. On peut remarquer que, dans sa course remontante, le frottement de la colonne liquide autour de lui n'est pas entièrement perdu pour l'effet, puisqu'il l'aide à acquérir sa vitesse ascensionnelle jusqu'à l'époque où celle-ci est devenue à peu près égale à celle de cette colonne.

A cause des ballottements du flotteur non guidé dans cet appareil provisoire, et du surcroît de course nécessaire pour faire accrocher sûrement le mouton, qui n'était pas non plus établi très-solidement, j'avais donné à l'oscillation remontante plus de force que cela n'eût été nécessaire si l'on avait employé une machine mieux exécutée, et surtout un mode moins défectueux d'application pour le moteur. Il en résultait que non-seulement le flotteur remontait, en général, à $0^m,15$ plus haut que cela n'était nécessaire, mais qu'à chaque période, il rentrait dans le réservoir supérieur une certaine quantité d'eau qui en gonflait visiblement la surface environnante, après avoir traversé deux fois le système en augmentant sans utilité le chemin et la valeur des résistances passives. Aussi, quand le tonneau de jauge achevait de se vider, la machine fournissait un certain nombre de périodes avec un niveau moins élevé dans le bief supérieur et une dépense d'eau bien moindre ; ce qui était même remarqué à la simple vue par tous les observateurs, puisque le robinet de jauge *ne coulait plus plein*.

Lorsque le réservoir ou bief supérieur était entièrement plein d'eau, la hauteur de son niveau au-dessus de celui du bief inférieur était de $1^m,28$. Mais le réservoir supérieur ayant une étendue limitée, la

chute motrice moyenne était nécessairement moindre, puisque sans cela l'eau qui arrivait du tonneau de jauge aurait coulé par-dessus les bords pendant que la soupape était fermée. Il est facile de voir que, surtout si l'on a égard aux ondes qui augmentaient les chances de versement, le niveau moyen, qui eût été à considérer dans un réservoir de largeur indéfinie, n'était pas à plus de $1^m,26$ au-dessus du niveau du bief inférieur, en faisant même abstraction de ce que le niveau montait un peu dans le bief inférieur pendant l'expérience. Cette remarque est de peu d'importance, mais il est bon de se représenter comment les choses se passent le plus exactement possible. La machine ne s'arrêtait que lorsque cette hauteur de chute était notablement réduite; mais nous admettrons d'abord $1^m,26$ de chute, quand nous dirons que la machine donne un effet utile d'environ 60 pour 100, mesuré directement au moyen de la levée périodique du mouton.

En considérant seulement quelques oscillations pour des chutes moindres, j'ai trouvé des effets utiles sur lesquels je donnerai plus loin des détails.

J'ai mesuré directement le poids qui imprimait au flotteur et au mouton suspendus aux deux extrémités de la corde la vitesse nécessaire pour faire décrocher le déclic arrivé au haut de sa course. Il en résulte que, si l'on mesurait l'effet utile au point d'application du moteur, et non sur l'outil même, ce qui serait juste, puisqu'on agit ainsi pour apprécier l'effet de tous les autres moteurs, des roues hydrauliques par exemple, il faudrait augmenter l'effet utile de 0,60 d'une certaine quantité. Je reviendrai sur ces estimations.

Le mouton, alternativement soulevé, est d'ailleurs le moyen le plus direct, mais le plus désavantageux, d'estimer l'effet utile de ce moteur; car, pour le faire accrocher et décrocher, il faut un surcroît de travail dont il ne serait pas seulement question si le flotteur était *invariablement* attelé à l'outil; si, par exemple, cet outil était une pompe, une scie, un soufflet, une grande cisaille, une machine à polir, etc. On voit même que, pour plusieurs de ces applications, dans beaucoup de circonstances, le flotteur pourrait être directement attelé sans poulies de renvoi. Ici les deux poulies étaient en cuivre, leur diamètre était de $0^m,20$, celui de leurs boulons était de $0^m,03$; la corde qui se pliait dessus avait un diamètre de $0^m,02$. Elle était souvent mouillée au moment des

essais. Les *filets* en bois, le long desquels s'élevait le mouton, avaient une section carrée d'environ $0^m,03$ de côté. Le mouton ballottait quelquefois le long de ces filets, à cause de la mauvaise exécution de l'appareil.

Parmi les expériences, je décrirai particulièrement celle qui a été faite, le 14 octobre 1843, à la dernière séance, celle à laquelle assistait M. Lamé, qui a rédigé le Rapport à l'Institut. On s'était montré généralement satisfait de la première, faite quelques jours auparavant, le 10 octobre. Mais comme il était survenu un accident pendant l'opération, je ne la trouvai pas suffisante pour fixer l'opinion d'une manière définitive; je demandai à recommencer un autre jour, et l'appareil fonctionna avec la régularité désirable, le flotteur ne sautant plus qu'à $0^m,15$ au-dessus de la limite de sa course ascensionnelle utile. J'ai fait une centaine d'expériences de ce genre. Comme leurs résultats ne varient que de quelques centièmes, et que leurs différences, dont au reste je rendrai compte, peuvent être attribuées jusqu'à un certain point aux imperfections de l'exécution, je me bornerai à discuter principalement celle qui a reçu la sanction académique, ne pouvant d'ailleurs tenir à quelques centièmes dans l'effet utile d'un appareil d'une exécution aussi imparfaite. Il suffit de rappeler en peu de mots le nombre considérable de mes essais, et de dire que le maximum d'effet résultait surtout, comme cela est d'ailleurs évident, de l'attention que j'avais d'empêcher autant que possible le flotteur de sauter au-dessus de la limite utile de sa course ascensionnelle, quand il n'y avait qu'un petit nombre d'observateurs, que peu m'importait de recommencer l'expérience en prenant le temps nécessaire pour remplir au besoin le tonneau, et en modérant la chute motrice de manière que l'eau ne versât jamais au-dessus des bords du bassin supérieur.

Description de l'expérience faite le 14 octobre 1843.

Le tonneau de jauge avait $2^m,10$ de diamètre, il était sensiblement cylindrique; la petite différence, provenant de ce que les cercles en fer avaient été enfoncés par le haut, était plus que compensée par des pertes d'eau dont on n'a pas tenu compte. L'expérience a duré 9 mi-

nutes, à partir du moment où l'on a commencé à compter les périodes devenues suffisamment régulières. Depuis cet instant, l'eau a baissé de $2^m,05$ dans le tonneau; le volume débité est donc de 7,100 mètres cubes en négligeant les dix-millièmes. Mais, à partir du moment où l'on a arrêté la soupape pour interrompre l'écoulement du bief supérieur, il a fallu un certain temps pour fermer le gros robinet vanne du tonneau, qu'il ne m'a jamais été possible de fermer en moins de 20 secondes. Ce robinet était à cette époque entièrement ouvert et ne coulait pas plein à beaucoup près; le temps pendant lequel on a baissé la vanne était plus que double de la durée d'une période. On trouve de diverses manières qu'environ $\frac{1}{5}$ de mètre cube n'est point entré dans l'appareil, ce qui réduit le débit réel à $6^{mc},9$, surtout si l'on a égard à d'autres petites pertes dont on parlera plus loin.

Le bassin en zinc et la soupape perdaient un peu d'eau: on a constaté qu'en 9 minutes cette perte était d'environ $\frac{1}{10}$ de mètre cube, ce qui réduirait à 6,8 le débit réel de l'eau passée dans la machine. Mais comme une partie de cette perte se faisait par la soupape, il est juste de remarquer que cette soupape est entr'ouverte pendant près de la moitié du temps. Pour y avoir égard dans l'estimation totale, nous ne tenons pas compte de ce qu'à partir du moment où la soupape était fermée pour achever d'arrêter définitivement la machine, quand la hauteur de chute était notablement diminuée, le flotteur remontait encore presque à la hauteur nécessaire pour que le déclic accrochât le mouton. Or nous avons dit que le travail du système était employé à relever le flotteur, de sorte que cette considération devait être présentée; elle fait d'ailleurs plus que compenser ce que nous venons de négliger.

Le nombre des périodes était compté en même temps par plusieurs observateurs; et, pour confirmer leurs notes, chaque fois que l'on entendait le coup de mouton, on jetait une pierre dans un seau. Enfin, pour tenir compte de ce que la machine était employée à relever le flotteur, on a retiré la première pierre, et le nombre de celles qui restaient s'est trouvé de 57. Le mouton montait sensiblement, en vertu de sa vitesse acquise, au-dessus de $1^m,62$; mais on a négligé le petit surcroît d'effet utile qui en résultait. On entendait le coup de la pièce de bois qui portait la tenaille avant que le mouton cessât de

monter. Cette quantité négligée ne m'a semblé, au reste, qu'environ $\frac{1}{100}$ de l'effet, au plus.

Le travail dépensé est le poids de $6^{mc},8$ d'eau, tombé de $1^{m},26$. Le travail recueilli est le poids du mouton de 55 kilogrammes, élevé 57 fois à $1^{m},62$. Le rapport de ce travail au premier est donc $\frac{60787}{86680}$; de sorte que l'effet utile est, en définitive, d'environ 0,60.

MM. les Commissaires de l'Institut, ayant pris le maximum de la chute de $1^{m},28$, et n'ayant pas tenu compte des $\frac{3}{10}$ environ de mètre cube qui ne sont pas entrés dans la machine, ont trouvé une différence d'ailleurs très-petite entre ce résultat et celui auquel ils sont parvenus. Enfin, à cause d'un accident survenu pendant l'expérience précédente, à laquelle assistait M. Poncelet, celle du 10 octobre, la personne qui comptait les périodes et qui avait cessé quelques instants de s'en occuper en ayant omis quatre, ils ont pris une moyenne entre les résultats de ces deux expériences, et se sont arrêtés au chiffre 0,55. Pour une machine d'une exécution aussi imparfaite, je ne tiens pas à une si petite différence; mais, pour mieux étudier le système, je crois devoir faire observer que l'expérience du 10 octobre avait duré $9^{m}20^{s}$; que la hauteur du cylindre d'eau débitée avait été de $2^{m},12$. Dans l'expérience du 14 octobre, qui a duré 9 minutes seulement, la hauteur du prisme d'eau dépensée n'a été que de $2^{m},05$. On voit que ces deux résultats s'accordent assez bien quant au débit. Or la durée de chaque période était réglée d'une manière analogue à ce qui se présente dans l'oscillation d'un pendule, malgré les imperfections de l'appareil. Si donc on a compté 57 coups de mouton en 9 minutes dans l'expérience régulière, pour laquelle on a mis beaucoup plus de soin dans la manière de vérifier ce nombre, en confiant même ce soin à plusieurs personnes habituées à ce genre d'observations, pendant l'expérience qui a duré 20 secondes environ de plus, on aurait dû compter deux périodes de plus, au lieu de deux de moins, comme on l'a noté: ce qui fait une omission de $\frac{4}{55}$ dans l'expérience du 10 octobre.

On sera peut-être étonné de voir que la durée de la période diffère très-peu de la durée des périodes d'oscillation, quand on ôte le flotteur. Il y a, comme on le verra plus loin, des causes de compensation dans la distribution des vitesses: en général, la présence du flotteur tend à diminuer, sous certains rapports, la durée de la pé-

riode. Ainsi, quand on met la colonne en oscillation en y plongeant alternativement le flotteur, le nombre des oscillations augmente dans un temps donné, relativement à ce qu'il est quand on ôte le flotteur et qu'on laisse ensuite la colonne abandonnée à elle-même. On peut s'en rendre compte jusqu'à un certain point, d'après ce que j'ai dit dans le tome III de ce Journal, en considérant ce qui se passe quand le flotteur est invariablement suspendu au haut de sa course. Alors sa présence forme un rétrécissement au sommet du tuyau, et il en résulte une augmentation dans le nombre des oscillations, dont j'avais donné la loi depuis longtemps, et dont j'ai ici vérifié de nouveau l'existence.

Études sur cette expérience et sur ses détails.

En donnant ce chiffre de 0,55, MM. les Commissaires de l'Institut « s'empressent de reconnaître que ce résultat obtenu sur un appareil » dont la construction, dirigée avec une stricte économie, laissait » beaucoup à désirer, ne doit être considéré que comme un *minimum*. » On ne peut douter, en effet, que la machine hydraulique de M. de » Caligny, employée plus avantageusement, construite avec plus de » soin et dans de nouvelles proportions que les dernières expériences » ont indiquées, ne puisse donner un effet utile notablement plus » élevé. »

Si j'ai rapporté les vérifications précédentes, c'est surtout parce qu'il ne me paraît pas impossible d'examiner en quoi peuvent consister les défauts de l'appareil, au moyen de mesures particulières, qui ont d'ailleurs l'avantage de mieux faire étudier les principes sur lesquels il repose. Voici d'abord une expérience que j'ai souvent répétée, et que je montrai, le 10 octobre, à plusieurs membres du Conseil de la Société d'Encouragement, à la fin de la séance.

Le robinet du tonneau étant fermé, et le réservoir supérieur en zinc étant plein d'eau, j'obtenais deux périodes de la machine, après l'avoir mise en train de la manière suivante avant de laisser la soupape s'ouvrir. Le mouton étant accroché, j'enfonçais le flotteur dans le liquide que contenait le tuyau, en pesant sur la corde; je le laissais relever ensuite par le contre-poids, et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces immersions alternatives dans la colonne liquide de plus en plus ascen-

dante, mise en oscillation par ce moyen, eussent fait parvenir le liquide assez haut pour faire ouvrir la soupape annulaire, ce qui suffisait pour mettre la machine en train. On peut remarquer, en passant, que ce moyen d'*amorcer* l'appareil constitue une véritable pompe qui n'a point besoin de soupape.

Dans les expériences dont j'ai déjà rendu compte, j'*amorçais* la machine par des introductions alternatives de l'eau du bief supérieur sur la colonne de plus en plus ascendante, en ouvrant alternativement la soupape; mais ici j'avais un grand intérêt à ménager l'eau du réservoir en zinc. Le travail de l'eau étant, comme je l'ai dit, employé à relever le flotteur, je ne comptais pas le premier coup de mouton.

On obtenait deux périodes au moyen d'une baisse de 9 centimètres; mais à la seconde, il est vrai, le flotteur ne remontait pas tout à fait assez haut pour accrocher le mouton. Afin d'y parvenir, il fallait, en *amorçant* la machine, faire en sorte de rejeter une certaine quantité d'eau dans le réservoir supérieur, et encore j'y suis rarement parvenu. Cette circonstance laisse sans doute un peu de vague sur le résultat de cette expérience, qui n'est intéressante que pour indiquer la limite de ce qu'on pouvait faire avec un appareil si mal construit. Cependant il est clair qu'on ne pouvait pas faire gonfler beaucoup l'eau dans les environs de la soupape, sans la faire verser par-dessus les bords du bassin en zinc, quoiqu'elle redescendît immédiatement par l'ouverture de la soupape. Si l'on admettait moyennement sur la surface une augmentation d'épaisseur de $0^m,01$ environ, cela ferait une baisse de $0^m,05$ par période.

Les parois du réservoir quadrangulaire en zinc étant voilées, je craindrais d'induire en erreur si je calculais le volume d'eau dépensé au moyen de l'espace abandonné par la baisse du niveau supérieur. D'ailleurs, les personnes qui, dans plusieurs séances, ont vu fonctionner la machine, ont remarqué elles-mêmes la baisse notable qui se présentait à la fin de chaque épreuve, sans que cela empêchât d'obtenir encore plusieurs périodes. Or ce qui est important, c'est moins une diminution de quelques centièmes *sur la chute totale* que la baisse *relativement à la hauteur du niveau au-dessus du siége fixe de la soupape annulaire*. Il ne s'agit plus seulement d'une

baisse moyenne, mais de la limite de celle pour laquelle la machine peut encore fonctionner. Ce qui fait l'importance de cette observation, c'est que la dépense d'eau de la machine provient immédiatement de la hauteur du niveau supérieur au-dessus du siége fixe de la soupape, laquelle retombe, comme je l'ai expliqué dans le paragraphe I, au moment où la colonne liquide tend à débiter plus d'eau qu'il ne peut en venir du bief supérieur. Or, si la vitesse d'écoulement de l'eau de celui-ci est, à la limite, proportionnelle à la racine carrée de cette hauteur, il en sera de même de la vitesse dans le grand tuyau horizontal. La force vive emmagasinée dans le système sera comme cette même hauteur, et, en définitive, le débit à chaque période lui sera aussi à peu près proportionnel dans certaines limites. Sans doute il y a quelque chose d'hypothétique dans l'estimation rigoureuse du débit d'après ce phénomène, que je n'ai encore pu étudier d'une manière tout à fait complète; mais il m'a semblé cependant utile d'indiquer le résultat auquel on serait conduit par ces considérations, en ne donnant ce résultat que pour valoir ce que de raison.

En partant de ces données, il est facile de voir que, dans les circonstances où les périodes sont assez peu nombreuses pour qu'on en puisse trouver d'aussi régulières que si la machine était réglée à peu près comme dans le cas où le flotteur serait guidé, on parvient à un effet utile d'environ les deux tiers du travail dépensé par la chute.

Mais pour être sûr de faire accrocher le mouton quand il y avait beaucoup de périodes, je débitais ordinairement plus d'eau qu'il n'en fallait pour que le flotteur atteignît la limite de sa course, comme il le faisait quand il ne rencontrait point les parois. Il sautait à $0^m,15$ de haut au-dessus de la limite de sa course *utile*, dans l'expérience du 14 octobre. Voyons comment on doit avoir égard à cette circonstance dans le calcul de l'effet produit.

Le flotteur retombait de la hauteur $0^m,15$, mais, il est vrai, en refoulant dans le bief supérieur, par la soupape ouverte, un volume d'eau analogue à celui qui était déplacé par cette descente. Cependant le travail employé à relever le flotteur à $0^m,15$ de plus que cela n'est nécessaire était loin d'être restitué par la rentrée de ce volume d'eau,

puisqu'en retombant le flotteur était retenu brusquement par son anneau de suspension, et restait à peu près en repos. Or, pendant cette descente, son travail a été employé en partie à lui faire acquérir de la vitesse et à augmenter celle de la colonne annulaire liquide qui l'entourait, en ayant à surmonter des résistances passives, et en exerçant une réaction sur la tête de la colonne liquide généralement ascendante. En définitive, plus de la moitié du travail développé par cette descente de $0^m,15$ est en pure perte; le flotteur étant soulevé de plus de $\frac{1}{11}$ de la course, ce $\frac{1}{11}$ eût été utilisé entièrement, s'il avait été attelé invariablement à un outil qu'il n'eût pas fallu accrocher *alternativement*. D'ailleurs l'eau rentrée alternativement dans le bief supérieur donne lieu à un surcroît dans la valeur et le chemin des résistances passives, par la raison même qu'elle augmente l'amplitude de l'oscillation sans utilité.

Enfin, « pour apprécier plus exactement l'effet du moteur, il eût » fallu tenir compte des résistances passives du mécanisme addition- » nel, telles que le frottement des poulies, l'inertie du déclic, etc. » Cette remarque, admise dans ces termes par MM. les Commissaires de l'Institut, est conforme à ce qui se passe dans la pratique des usines; car c'est sur l'arbre d'une roue hydraulique, par exemple, qu'on mesure l'*effet utile*, et non sur l'outil qu'elle fait mouvoir.

On peut encore se former une idée des résistances dont il s'agit. Il ne suffit pas de connaître le poids nécessaire pour vaincre la résistance des poulies, celle de la flexion de la corde, etc., mais le poids nécessaire pour faire décrocher le déclic au haut de sa course, en faisant plonger le flotteur dans la colonne remontante qui le rencontre avant que sa descente soit finie. J'ai trouvé, par des mesures directes, que ce poids ne différait pas beaucoup de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{11}$ de celui du mouton, quelquefois un peu moins. Mais il est juste de remarquer qu'une partie de la force vive, développée par cette quantité, est employée à augmenter la course du flotteur. Or, en vertu des lois du mouvement accéléré, on pourrait se former une idée de cette force vive, puisque la course de $1^m,62$ est parcourue en 3 secondes environ, et que la colonne remontante ne rencontre le flotteur que vers la fin de cette course. Ayant remarqué que le mouton s'élevait en vertu de la vitesse acquise à environ $0^m,015$ au-dessus de la limite $1^m,62$ que nous avons

admise dans nos calculs, autant qu'il m'a été possible de l'observer sans appareil disposé dans le but de faire cette expérience secondaire, on peut se rendre compte de la manière dont se dépense le travail de ce poids supplémentaire. Plus de la moitié de ce travail qui est ici perdue serait employée utilement dans une machine où le flotteur serait toujours attelé à la résistance sans intermédiaire, sans cordes, ni poulies, ni déclic.

Je trouve, au moyen des mesures directes et des considérations qui en résultent, qu'en définitive, l'effet produit par le moteur ne devait pas différer beaucoup de 0,70 du travail dépensé par la chute; que même ces mesures permettent de discuter les imperfections de l'appareil et peut-être, à certains égards, d'en connaître les propriétés d'une manière plus complète qu'on ne l'eût fait avec une exécution moins imparfaite.

Il y a encore un sujet d'études intéressantes sur la manière dont se distribue le travail perdu, en supposant une exécution moins imparfaite de la machine, mais en considérant le tuyau de conduite avec les défauts quelconques qu'il avait à la fin de ces expériences, à partir de l'époque où l'on a commencé à pouvoir mesurer d'une manière positive l'effet utile du nouveau moteur, après avoir fait beaucoup d'expériences préliminaires, dont je rendrai compte dans l'ouvrage que je prépare.

Études sur l'emploi des résistances passives dans ce moteur.

Le frottement provenant du simple balancement de la colonne liquide absorbe une quantité de travail en résistances passives bien plus grande que la somme des autres causes de déchet. Cette remarque, que je vais justifier, est d'autant plus essentielle, qu'il en résulte qu'il suffira d'augmenter dans certaines limites le diamètre du tuyau en L, pour diminuer le déchet total d'une manière importante: c'est le point essentiel des études suivantes.

Abstraction faite de la valeur rigoureuse des coefficients des résistances passives, nous admettons simplement les chiffres fournis par les observations sur le tuyau en L, dans l'état où il était à la fin de ces expériences. Il suffit, pour se rendre compte de l'influence du simple

balancement de la colonne liquide sur le déchet total, d'appliquer, avec la modification dont je vais parler, les formules que j'ai établies dans le tome III de ce Journal, et que M. Coriolis a depuis retrouvées par d'autres méthodes, en rappelant d'ailleurs, dans un de ses Rapports à l'Institut sur mes recherches, celui du 20 août 1838, que j'y étais parvenu le premier *par d'ingénieux moyens géométriques*.

La modification dont il s'agit consiste dans la manière de tenir compte de l'influence exercée sur le travail en frottement, par la présence du flotteur pendant l'ascension de la colonne liquide.

Le flotteur avait une densité plus grande que celle de l'eau; mais il était relevé en vertu de l'action d'un contre-poids qui, joint au déclic et formant ordinairement en tout 14 kilogrammes environ, était indispensable pour le faire *flotter*. Pour ce sens du mouvement, la corde est bien moins tendue et ses résistances passives bien moindres que dans le mouvement en sens contraire; cependant il faut en tenir compte: ce qui fait plus que compenser une petite incertitude sur le poids nécessaire pour vaincre ces résistances passives. Les choses étant alors, quant à l'ascension du flotteur, dans un état analogue à ce qui se présenterait s'il avait une densité moindre que celle de l'eau, on va voir que cette ascension permet, en général, au système liquide de développer un peu plus de vitesse que si cette pièce était retenue en équilibre de haut en bas. La surface de la colonne liquide est d'ailleurs, bien entendu, descendue à la profondeur nécessaire pour remonter à la limite de sa course ascensionnelle, malgré la présence du flotteur supposé en repos invariable. Il semble, au premier aperçu, qu'il y a ici un paradoxe; ceci exige quelques développements.

Si le flotteur, descendu au-dessous du niveau du bief inférieur, était supposé dans un repos invariable, il occuperait la place d'un volume de liquide égal à son propre volume; il faudrait donc que le niveau de la colonne oscillante partît de plus bas pour arriver au haut de sa course, puisqu'en vertu de l'occupation permanente de l'espace dont il s'agit, il resterait à l'eau qui descend moins de chemin à parcourir pour développer sa force vive.

Mais si l'on suppose que le point de départ de la colonne soit à une profondeur convenablement calculée d'après la remarque précédente, et que l'on fasse, pour un moment, abstraction des résistances pas-

sives, la densité du flotteur étant, par hypothèse, moindre que celle de l'eau, son ascension est une cause d'addition de force vive au système, parce qu'en s'élevant, il fait passer de l'eau à la place qu'il abandonne. Il est clair que, s'il était dans un vase d'eau en repos, son ascension ferait descendre le centre de gravité du système. Enfin, pour ne laisser aucun nuage sur la manière dont le travail se distribue en vertu de cette ascension dans la colonne liquide oscillante, il suffit de remarquer que, lorsqu'elle est finie, l'espace occupé primitivement par le flotteur est rempli d'eau. Or le flotteur se trouve alors en entier au-dessus du niveau du bief inférieur; et comme le niveau de la colonne liquide oscillante était parti de plus bas que lorsqu'il n'y avait pas de flotteur, il y a eu, en définitive, plus d'espace envahi par le liquide au-dessous du niveau du bief inférieur; cela rend compte de la raison pour laquelle le flotteur a pu être soulevé malgré le travail résistant de son poids.

L'expérience, d'ailleurs, prouve que, dans l'intérieur de la colonne liquide, le flotteur ne monte point par soubresauts; il serait donc rigoureux de tenir compte, dans le calcul du travail en frottement, du surcroît quelconque de force vive qui pourrait provenir, comme je l'ai expliqué, du mode d'action du flotteur pendant son ascension, parce qu'à une augmentation de force vive correspond une augmentation de résistances passives dans le balancement de la colonne oscillante. Mais, comme la différence de densité entre l'eau et le flotteur n'était pas très-grande, et que le flotteur finissait par avoir, en général, une vitesse analogue à celle de l'eau qui l'enveloppait, cette remarque est plus intéressante pour la théorie que pour l'estimation réelle des effets de la machine. D'ailleurs, les résistances passives occasionnées par le flotteur, surtout dans les premiers instants de sa rencontre avec la colonne remontante, diminuent d'une quantité quelconque les vitesses du système; il y a des effets de résistances passives compensés, en quelque sorte, dans les calculs qui ne porteraient que sur des quantités très-secondaires ici, et d'une détermination trop délicate pour mériter d'être étudiées en ce moment relativement à une expérience aussi imparfaite.

La correction à faire sur la profondeur de l'oscillation, dans le calcul du déchet, à cause du mouvement du flotteur, ne provient point

de l'oscillation descendante, puisque le flotteur ne fait guère qu'suivre la colonne liquide dans le sens de ce mouvement. La dernière moitié de l'oscillation descendante est parfaitement dégagée du flotteur; mais il faut tenir compte, dans la première moitié, de la manière dont se distribuent la valeur et le chemin des résistances passives. La hauteur de l'eau qui engendre de la vitesse dans le tuyau pendant que l'eau motrice y pénètre est moindre que la hauteur moyenne d'où celle-ci partirait, si le tuyau était prolongé en dessus, et qu'elle en descendît pour engendrer la même vitesse, au lieu de sortir du bief supérieur. Il faut en tenir compte dans l'application des formules. Au reste, il y a une sorte de compensation provenant de ce que le flotteur suspendu occupant un certain volume au-dessous du niveau du bief supérieur, la quantité d'eau sortie de ce bief pour engendrer la force vive qui le serait par un égal volume d'eau, si le flotteur était enlevé, descend d'une hauteur plus grande que celle du centre de gravité du flotteur.

Ces considérations secondaires ont ici peu d'importance. On pourra faire le calcul à peu près comme pour les résistances passives d'une oscillation libre dans un tuyau vertical.

Pour appliquer à l'oscillation remontante les formules que je rappelle au commencement de ce paragraphe, il faudrait réduire les choses au degré de simplicité où elles seraient si, le flotteur étant supprimé, la colonne liquide partait de la profondeur nécessaire pour avoir, en arrivant à la hauteur du niveau du bief inférieur, à peu près la quantité de force vive qu'elle doit avoir après être partie de plus bas, quand on suppose le flotteur invariablement fixé à la limite inférieure de sa course. Cette détermination est facile à obtenir au moyen des principes que j'ai exposés dans les tomes III et VI de ce Journal. On trouve d'ailleurs, au moyen des mêmes principes, que le calcul du déchet établi de cette manière peut être plutôt au-dessus qu'au-dessous de sa véritable valeur, à cause de la manière dont la présence du flotteur modifie le chemin parcouru par les résistances passives. Ainsi, il y a diverses causes de compensation, et, en définitive, on peut se servir, dans une simple approximation comme celle dont il s'agit, de mes formules sur le mouvement oscillatoire dans les tuyaux cylindriques indéfiniment prolongés dans le sens vertical. Mais il faut

avoir égard à la manière de les employer que j'ai prescrite, et se servir, pour déterminer la somme des coefficients des résistances passives qui se présentent dans le simple balancement de la colonne liquide, des observations *directes* faites sur le déchet dans la hauteur de la colonne remontante, lorsqu'on a ôté le flotteur à la fin des expériences.

Quant aux irrégularités secondaires qui résultent nécessairement du principe de l'oscillation, elles se réduisaient à peu de chose lorsque la machine était bien réglée et en assez bon état. Lorsque les spectateurs ne regardent pas monter le flotteur dans l'intérieur du tuyau en L, ils peuvent craindre qu'il n'y ait des soubresauts, à cause de ce qui se passe à la limite de l'ascension, mais il n'en est pas ainsi; seulement, à la fin de l'ascension, le flotteur monte à une certaine hauteur au-dessus du point où cela est nécessaire, pour accrocher plus sûrement le mouton. Or il est indispensable de faire observer que, dans le cas où il s'agirait de faire fonctionner un outil qui serait toujours attelé au flotteur, ce soubresaut, qui est dans ce modèle un défaut essentiel, serait *impossible*. En effet, la résistance industrielle tiendrait le flotteur *suspendu*, si, par hypothèse, elle ne pouvait être surmontée que par la totalité ou la presque totalité du poids du flotteur, découvert en vertu de la descente ultérieure de la colonne liquide.

A l'époque où la colonne remontante rencontre le flotteur, qui descend encore, il se présente un bouillonnement momentané autour de son cône inférieur, et, par suite, une cause quelconque de ballottement dans le flotteur, quand il n'est pas guidé. Mais il est clair que, s'il est guidé, cette cause insignifiante de perte de travail est sans inconvénient, et se confond avec celles dont l'effet est alternativement *restitué* en vertu de l'augmentation de profondeur dans le point de départ due à une dépense d'eau motrice plus considérable que cela ne serait nécessaire si l'on n'avait pas à tenir compte des irrégularités *éventuelles*. La limite de ces irrégularités sera déterminée, bien entendu, dans chaque machine, et, lorsqu'elles ne se présenteront pas, il rentrera à chaque période, dans le bief supérieur, une partie du surcroît de débit destiné à y avoir égard dans tous les cas, pour que l'appareil ne soit jamais arrêté, excepté dans des circonstances

très-rares, ainsi que cela arrive pour toutes les machines hydrauliques.

Je n'entrerai pas ici dans le détail des calculs, n'ayant pour but, dans ce Journal, que d'exposer des principes. Voici, au reste, les données numériques au moyen desquelles le lecteur pourrait facilement vérifier le résultat principal, en relisant au besoin les deux Mémoires que j'ai rappelés, ou même celui de M. Coriolis, inséré dans le tome III de ce Journal.

Ayant retiré le flotteur du système, j'ai mis la colonne liquide en oscillation par l'introduction alternative d'une tranche de liquide, en soulevant alternativement la soupape, comme je l'ai dit plus haut. Je tenais ensuite cette soupape invariablement fermée, lorsque la colonne remontante avait versé par-dessus ce *tuyau-soupape*, en passant par l'espace libre à son intérieur; car il faut toujours se souvenir que la soupape est disposée de manière à ne jamais boucher *transversalement* le tuyau. Je laissais retomber la colonne liquide, la soupape étant toujours fermée, c'est-à-dire son anneau inférieur reposant invariablement sur le siége annulaire fixe, et je notais la hauteur à laquelle parvenait la colonne remontante. Je craignais d'abord que l'air introduit dans le liquide par le mode de mise en train n'altérât notablement les résultats, cela faisait évidemment quelque chose; mais les bulles d'air du sommet de la colonne paraissaient, en définitive, peu importantes. D'ailleurs, j'ai répété un grand nombre de fois cette expérience, en retrouvant toujours assez sensiblement le même déchet à cette époque de mes essais. Or il est probable qu'il n'en aurait pas été ainsi dans le cas où les bulles d'air, introduites d'une manière nécessairement peu uniforme, auraient eu une influence essentielle sur les effets. Quoi qu'il en soit, voici le résultat d'après lequel j'ai fait un essai de calculs numériques.

L'eau remontait à $0^m,22$ du sommet du *tuyau-soupape*. Pour apprécier ce déchet, il faut se souvenir que le diamètre intérieur de ce tuyau n'était que de $0^m,36$, tandis que le diamètre était de $0^m,40$ au-dessous du siége de la soupape. Afin de tenir compte des plus petites circonstances, on peut ajouter que le diamètre $0^m,36$ ne commençait même qu'à $0^m,03$ au-dessus du siége de la soupape. L'eau redescendait à $2^m,70$ au-dessous de son premier point de départ supérieur, avant de

remonter ainsi, ce qui fait $1^m,26$ de baisse au-dessous du niveau du bassin inférieur, dans le tuyau de $0^m,4$ de diamètre.

Il eût été à désirer que l'on pût mesurer exactement la profondeur à laquelle la surface de l'eau descendait quand le flotteur était en jeu dans le tuyau vertical, et qu'en un mot la machine fonctionnait comme à l'ordinaire. Mais le mouvement du flotteur, qui n'était pas guidé dans cet appareil d'essai, empêchait d'enfoncer une perche pour prendre cette mesure, comme on l'avait fait, à environ 1 centimètre près, quand on avait enlevé le flotteur pour étudier le libre balancement de la colonne liquide. D'ailleurs, la surface de la colonne était *brisée*, parce qu'elle descendait alors dans le coude jusqu'à la profondeur à laquelle on commençait à la perdre de vue. J'ai tâché de reconnaître cette profondeur en remarquant que la surface brisée se trouvait sur le joint du premier et du second tuyau courbe, qui formaient le coude en quart de cercle disposé entre le tuyau horizontal et le tuyau vertical. La longueur développée de l'axe du tuyau abandonné au-dessous du niveau d'aval par la colonne oscillante n'était pas de plus de $1^m,80$ environ, et encore il faut tenir compte de ce que le bas du tuyau arrondi, formant plus de la moitié de cette longueur, se trouvait à une profondeur un peu moindre que s'il avait été rectiligne.

Nous connaissons par des expériences directes le déchet de la colonne remontante, partie d'une profondeur de $1^m,26$ au-dessous du niveau d'aval. Nous savons, d'après ce qui a été dit sur l'influence du flotteur, que, pendant l'ascension de la colonne, le travail en frottement doit différer peu de ce que nous avons trouvé en supprimant le flotteur. Il suffit de se rappeler que, si le flotteur était maintenu en repos, la colonne partant d'une profondeur calculée d'après la présence de cette pièce, une quantité déterminée du tuyau devrait être remplie au-dessus du niveau d'aval par la colonne liquide.

Pour se former une idée approchée du déchet provenant de l'oscillation descendante suivie par le flotteur, il suffirait, d'après ce qui a été dit, d'observer directement le déchet à une époque où le niveau d'aval serait assez bas pour que l'oscillation eût une amplitude analogue au double de la demi-oscillation observée au-dessous du niveau d'aval, à l'époque où la machine était en train. C'était ce que j'avais fait à une époque antérieure; mais le tuyau n'était pas dans les mêmes

conditions que lorsque je mesurai l'effet utile de la machine, ainsi que je l'expliquerai plus loin. D'ailleurs, comme j'ai seulement pour but d'indiquer une vérification sur l'état définitif de la machine, je me contenterai de rappeler qu'en général, lorsque les amplitudes des oscillations ne sont ni trop différentes entre elles, ni trop grandes par rapport au diamètre du tuyau, le rapport du déchet en hauteur de la colonne remontante dans un tuyau vertical d'égal diamètre partout suffisamment prolongé, à la profondeur du point de départ au-dessous du niveau d'aval, est à peu près en raison inverse de cette profondeur, toutes choses égales d'ailleurs, d'après les expériences que j'ai rapportées dans mes précédents Mémoires. Ici l'ascension aurait eu assez de puissance pour rejeter une certaine masse d'eau dans le bief supérieur, si le flotteur avait été supprimé, puisque la rentrée de cette eau aurait tenu lieu du travail résistant du poids du flotteur pendant qu'on le relevait. Ainsi, dans un tuyau vertical suffisamment prolongé, la colonne serait, malgré le déchet, montée à une certaine hauteur au-dessus du niveau du bief d'amont. Cependant il est facile de voir que la portion du tuyau que n'aurait pas, à cause du déchet, remplie la colonne remontante à son sommet, ne serait pas, en définitive, ici à une hauteur beaucoup plus grande que le niveau du bief d'amont, dans le cas où le tuyau vertical serait de même diamètre partout, au lieu d'être rétréci sur une longueur de $0^m,47$ par la soupape annulaire. Or cela est très-commode pour se former une idée du déchet total provenant des deux oscillations, ou du simple mouvement de la colonne liquide, à cause des compensations qui résultent d'ailleurs de ce qu'une partie du tuyau vertical, par hypothèse, était inclinée à l'origine du coude.

Je ne m'étendrai pas cependant ici sur la vérification du travail résistant provenant de ce balancement, en ne faisant reposer mes calculs que sur la mesure directe de la profondeur à laquelle le niveau *brisé* de la colonne oscillante était descendu, parce que cette mesure directe laisse, comme je l'ai dit, un peu d'incertitude. Mais j'ai pensé qu'il ne serait pas sans quelque intérêt d'indiquer les considérations précédentes qui permettent d'étudier la question sous divers points de vue. En définitive, on peut, si ce genre de vérification paraît utile, appliquer ici de diverses manières les formules sur les oscillations des

liquides que j'ai établies dans le tome III de ce Journal, en déterminant les coefficients au moyen des observations directes faites sur le tuyau de la machine, à l'époque où j'ai mesuré l'effet utile d'une manière plus complète. On trouvera que les résistances passives dues au simple balancement de la colonne doivent avoir absorbé $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ environ du travail de la chute, selon que l'on considérera les diverses limites de cette chute sous lesquelles la machine a fonctionné. Je reviendrai d'ailleurs sur ce sujet dans le chapitre suivant, en rapportant des expériences plus spéciales, dans le simple but de faire encore mieux concevoir l'état de la question, et en prévenant toujours qu'il ne faut attacher à ces divers systèmes de vérification qu'une importance secondaire. Peut-être n'en aurais-je dit que quelques mots si la machine avait été mieux construite; mais l'imperfection même de l'exécution m'oblige de l'étudier sous divers points de vue.

Il y a plusieurs autres causes de perte de travail, abstraction faite du mode d'application du moteur :

1°. A la fin de l'ascension de la colonne remontante, il s'exerce de bas en haut une percussion, insignifiante il est vrai, sur le rebord intérieur du *tuyau-soupape*. Dès l'instant où cette soupape commence à se soulever, l'eau du bief supérieur entre sur la colonne remontante, et l'aide à se remettre de niveau avec le bief supérieur. Cette quantité d'eau était d'ailleurs très-petite, ainsi que la hauteur moyenne dont son centre de gravité descendait au-dessus du seuil de la soupape. Il est facile de s'en rendre compte, surtout si l'on a égard à ce que, le flotteur cylindrique occupant à cette époque le centre de la soupape annulaire dont la section intérieure est déjà moindre que celle du tuyau, le volume annulaire de liquide dont il s'agit ne donne lieu qu'à un déchet sans importance, en contribuant à rétablir le niveau, comme on vient de le dire.

2°. La soupape étant convenablement équilibrée, le travail nécessaire pour la faire fonctionner est de peu d'importance; comme elle se baisse très-vite, la perte de force vive de la tranche annulaire qu'elle coupe est très-petite. Quant à la colonne en mouvement dans le tuyau en L, ses sections *transversales ne peuvent jamais être bouchées*. Il n'y a d'intercepté que le mouvement de l'eau affluente dans l'intérieur du réservoir supérieur en zinc, ce qui ne

donne évidemment lieu qu'à une quantité de perte de force vive très-petite par rapport à l'ensemble du système en mouvement. Cette eau, dont la direction est changée par la soupape annulaire, a d'ailleurs toute la liberté possible pour produire des ondes dans le bassin supérieur, sans donner lieu à aucune chance de *coup de bélier*.

3°. La *contraction* de la veine liquide, à son entrée du bief supérieur dans le tuyau, ne pouvait être que partielle; en effet, la soupape étant suffisamment levée, il n'y avait aucune cause de contraction sur le pourtour central formé par le flotteur cylindrique suspendu au haut de sa course. Il n'y en avait, à proprement parler, que sur le pourtour extérieur du siége de la soupape; et encore elle était diminuée par un entonnoir en zinc qui n'avait, d'ailleurs, qu'une forme provisoire, son côté ayant une inclinaison sur l'horizontale d'environ la moitié d'un angle droit, et sa hauteur étant de $0^m,18$ à $0^m,20$. Au reste, je ne me suis pas aperçu que cet entonnoir eût une influence bien sensible sur le résultat définitif; car, dans des expériences sur une machine d'une exécution si imparfaite, je ne sais trop si l'on doit tenir bien sérieusement compte d'une période de plus ou de moins, quand on en compte une soixantaine à partir du moment où elles sont bien régulières. Je dois dire aussi qu'au delà de certaines limites, la grandeur de l'ouverture de la soupape était sans importance: ainsi, je ne me suis pas aperçu qu'une levée de $0^m,11$ donnât un effet utile sensiblement moindre qu'une levée de $0^m,22$, ou que les levées intermédiaires, la largeur de l'orifice annulaire étant de $0^m,06$. Enfin, quand le flotteur n'était pas dans le centre du tuyau, et en touchait presque la circonférence, il n'en résultait pas de différence sensible.

4°. Pendant toute la durée de l'introduction du liquide par la soupape, il y a un petit surcroît de frottement dans le tuyau annulaire d'une très-petite longueur, formé par les deux tiers environ des parois verticales du flotteur, suspendu à cette époque d'une manière fixe, et par les parois du tuyau de la machine. Ce surcroît est encore insignifiant. A la sortie de ce tuyau annulaire, la veine se dilate dans le tuyau vertical de $0^m,40$ de diamètre. Les lois de la perte de force vive, dans ce genre de dilatation, ou *évasement*, ne sont pas généralement connues. On ne sait pas bien suivant quelles courbes se dirigent les filets, dans les circonstances surtout

où il y a lieu de penser, à cause du cône inférieur, que la dilatation n'est pas brusque. J'ai eu occasion, en 1837, de faire à l'École des Mines des expériences sur ce sujet, et j'ai trouvé que, dans les circonstances où j'ai opéré, et dont je rendrai compte ultérieurement, la perte était assez bien exprimée au moyen des principes de Borda, c'est-à-dire au moyen du carré de la différence des vitesses, au lieu de la différence des carrés, comme le supposait d'Aubuisson. Il résulte de cette observation, d'accord avec les théories aujourd'hui généralement admises, que la perte de force vive provenant de la dilatation dont il s'agit est très-petite. Pour s'en former une idée, à l'époque ou elle est à son maximum, il faut se rappeler que la limite de la *hauteur due* à la vitesse d'introduction étant la hauteur définitive du niveau du bief supérieur au-dessus du seuil de la soupape, on doit encore tenir compte de la diminution provenant de la *contraction* quelconque dont nous avons parlé, et dont on peut remarquer que les effets viennent même en déduction de cette cause de perte de force vive.

5°. J'ai déjà parlé des pertes de force vive occasionnées, pendant quelques instants, par la rencontre du flotteur dans sa descente, et de la colonne liquide dans son ascension, en faisant remarquer qu'il y avait des causes de compensation assez intéressantes, par suite desquelles je n'en ai pas tenu compte dans cette approximation. Pour bien étudier la nature des effets qui se présentent à cette époque, il faut voir que la colonne est d'abord obligée de prendre un surcroît de vitesse de bas en haut dans l'espace annulaire compris autour du flotteur, qui, dans les premiers instants de la rencontre, a une même vitesse en sens contraire. Or les parois cylindriques de ce flotteur forment un véritable tuyau annulaire dont la longueur frottante est variable jusqu'à ce que cet espace soit rempli d'eau; et pendant que cet espace se remplit, il y a une *contraction* de la veine liquide de bas en haut, diminuée, il est vrai, par la présence du cône disposé à l'extrémité du flotteur. Enfin, quand le flotteur est assez plongé, il tend à prendre une vitesse accélérée de bas en haut, et sa vitesse le fait, à une certaine époque, monter à peu près, en général, comme s'il faisait partie du liquide. Cependant sa vitesse définitive le fait nécessairement émerger à la fin de sa course. Dans plusieurs expériences, je l'ai même vu

attendre la fin de cette course, et sortir de l'eau en vertu de sa vitesse acquise, bien avant que la colonne liquide eût achevé son ascension. Cette circonstance, dépendante de la manière dont le flotteur est leste par lui-même ou par son contre-poids, ne paraissait pas avoir d'influence notable sur le résultat définitif. On peut remarquer que son frottement, à cette époque, et l'effet de *poupe* qui en résultait, donnaient lieu à une perte quelconque de travail. Mais tout cela est sans beaucoup d'importance, ces effets ne paraissant influer sérieusement que pendant des fractions assez petites de la durée totale. J'ai déjà fait remarquer que l'ascension du flotteur au-dessus de la limite de la colonne liquide n'était point, en général, une cause de déchet *absolu*, dans toutes les circonstances où il ne pouvait pas retomber avant d'être suffisamment découvert par le mouvement de haut en bas de cette colonne. C'est ce qui aura lieu, en général, dans l'application du moteur aux *outils* quelconques à mouvement alternatif, mais qu'il ne faudra pas *accrocher alternativement*. Je ne m'occupe pas encore, dans cette Note, du cas où l'on veut obtenir un mouvement circulaire, et dont je n'ai dit que quelques mots.

En définitive, si l'on réunit toutes les causes secondaires de perte de force vive ou de travail, distinctes de celle qui est occasionnée par le simple balancement ou le mouvement général de la grande colonne liquide, on ne trouve que quelques centièmes du travail de la chute d'eau. Cela confirme les résultats obtenus au moyen des mesures diverses dont j'ai rendu compte dans le paragraphe précédent, autant du moins qu'on peut le faire pour une expérience satisfaisante, il est vrai, mais provisoire.

Il faudrait maintenant pouvoir démêler les diverses espèces de causes de déchet qui se présentent dans le mouvement général de la colonne liquide, puisque c'est là que se trouve la plus grande partie du travail en résistances passives. Je vais donner une idée des tentatives que j'ai faites à ce sujet, dans le but d'en conclure les modifications qui doivent augmenter l'effet utile.

Étude plus spéciale des résistances passives relativement à la détermination du diamètre du tuyau.

Le tuyau horizontal était couché dans l'angle du bassin de Chaillot, parallèlement à l'arête de cet angle, de sorte que l'eau qui sortait par son extrémité d'aval ne pouvait pas s'étendre librement de deux côtés. Ce tuyau était porté sur des tasseaux d'une petite hauteur, et il était d'ailleurs très-près du mur vertical, auquel il était parallèle. En un mot, un ajutage divergent de $4^m,4$ de côté, qui s'enfonçait, par son extrémité la plus étroite, dans le tuyau de $0^m,40$ de diamètre intérieur à peu près le même, et dont l'autre extrémité avait un diamètre double, ou de $0^m,8$, s'appuyait, par cette dernière, contre le fond et la paroi verticale du bassin. Il était un peu déformé par son poids. Il semblait résulter des expériences de Venturi et de M. Eytelwein, que cet ajutage devait augmenter l'effet. Mais quand je l'ai ôté, je n'ai remarqué aucune différence sur les $0^m,22$ de déchet dans la colonne remontante, au sommet de la soupape annulaire, dont il faut se souvenir que le diamètre intérieur n'était que de $0^m.36$, soit que cet ajutage ne produisît pas d'effet bien sensible, soit que la veine liquide, à cause de la proximité des parois, prît tout naturellement une forme assez analogue à celle qui devait résulter de cette pièce. Il y avait, il est vrai, une cause de *contraction* à l'époque du *retour* de la colonne; mais la proximité des parois détruisait une partie de son effet, d'autant plus que le dernier tuyau étant à *emboîtement* et à cordon extérieur, et son embouchure étant convenablement disposée, cela augmentait encore la proximité des parois. D'ailleurs l'augmentation de diamètre intérieur provenant de cette embouchure étant d'environ $\frac{1}{7}$ en sus, et les carrés des vitesses étant en raison inverse des quatrièmes puissances des diamètres, cela modifiait sensiblement le résultat, qu'il devenait difficile de ne pas confondre avec celui du frottement, du coude du tuyau en L, et des imperfections de ce tuyau, telles que les pertes d'eau et les rétrécissements quelconques aux jointures.

Ainsi que je l'ai établi par la géométrie, dans le premier Mémoire que j'ai publié dans ce Journal, tome III, et dont M. Coriolis a retrouvé les résultats par l'analyse, la longueur du tuyau horizontal serait indifférente au déchet, si l'on n'avait à considérer qu'un frottement de

parois proportionnel aux carrés des vitesses de la colonne liquide, parce que la différence de longueur des surfaces frottantes serait compensée par la différence des carrés des vitesses. Mais l'influence des causes *locales*, telles que le coude, etc., augmente avec les vitesses.

En démontant l'appareil, j'ai d'abord fait enlever les 10 derniers mètres du tuyau horizontal; j'ai trouvé que le déchet, dans la hauteur de la colonne remontante, était à peu près le même, et qu'il était plutôt diminué, étant réduit à une hauteur de $0^m,21$ au plus. Ce résultat est important pour l'avenir de la machine; car, pour de grands diamètres, de grandes longueurs de tuyaux seraient dispendieuses. J'ai encore trouvé que l'ajutage divergent n'avait aucune influence sensible pour cette longueur de tuyau, les dispositions à la sortie étant les mêmes que précédemment.

Ici il se présente une difficulté provenant de ce que, si la longueur des surfaces frottantes d'un tuyau de diamètre donné est sans influence sensible, en supposant ce frottement principalement proportionnel aux carrés des vitesses, les causes *locales*, telles que les contractions, le coude, les évasements, etc., ont d'autant plus d'influence sur la perte de force vive totale que les vitesses sont plus grandes. Or la durée des oscillations trouvée par expérience était à peu près égale à celle des oscillations d'un pendule ayant la longueur développée du tuyau plongé, dont le plus grand était de $23^m,4$ environ. Il en résulte que les vitesses n'étaient pas assez petites pour que l'un des coefficients de la résistance passive des parois, supposée, par Prony, proportionnelle aux simples vitesses, eût ici une influence très-notable par rapport aux autres causes de déchet. De sorte que les différences dans l'influence de ce coefficient, provenant des différences de longueurs du tuyau ne pourraient servir à expliquer seules comment il se fait que le déchet soit plutôt diminué qu'augmenté par la diminution de la longueur du tuyau, si la perte de force vive, à la sortie du tuyau, et, en un mot, à l'extrémité d'aval, était considérable.

Pour continuer ces comparaisons, j'ai fait encore enlever $7^m,50$ du tuyau horizontal, c'est-à-dire une fraction beaucoup plus considérable relativement, de ce qui restait de la partie plongée. Malheureusement l'ajutage fut tellement endommagé à cette époque de mes expériences, qu'il ne me fut pas possible de m'en servir sous sa première

forme. Je le fis réparer, mais en réduisant le plus grand diamètre, à environ $0^m,55$, et en conservant la forme de son autre extrémité sur une longueur d'environ $0^m,23$; de sorte qu'il était composé de deux portions de tuyaux coniques formant un ensemble moins régulier. A cause de la petite longueur développée du système plongé, il était difficile d'*amorcer* l'oscillation sans qu'il y eût beaucoup plus d'air enveloppé que dans les expériences précédentes, surtout depuis un accident qui s'était présenté à la fin de ces expériences. Il y a eu une augmentation de déchet dans la puissance de la colonne remontante, sensible du moins par rapport à celui qui s'était présenté quand il y avait $7^m,50$ de tuyaux de plus.

Avant de faire cette expérience, j'avais observé les oscillations dans le tuyau vertical en supprimant tout à fait l'ajutage, mais en disposant latéralement, et parallèlement au mur vertical du bassin, un des tuyaux en fonte de $0^m,40$ de diamètre et de $2^m,50$ de long. N'ayant pu amorcer assez complétement l'oscillation, à cause des mouvements de l'air, je n'avais observé que les ascensions qui se présentaient au-dessous de la soupape annulaire, à $0^m,90$ environ au maximum au-dessus du niveau du bief inférieur. Le déchet était très-sensiblement augmenté, relativement au premier système. Je regrette de ne pouvoir donner des détails plus circonstanciés sur ces expériences secondaires, dont, au reste, je n'indique le résultat général que pour valoir ce que de raison. Le Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences le 8 juillet 1844, et auquel est joint le plan à l'échelle que M. Corot a bien voulu dessiner sur les lieux avant que le modèle fût démonté, n'a pu m'être communiqué pour la rédaction de cette Note. Il n'a même jamais été remis entre les mains de MM. les Commissaires, dont le Rapport n'a été fait que sur les notes qu'ils avaient eux-mêmes prises sur les lieux, les 10 et 14 octobre 1843. Je craindrais donc d'être trompé par mes souvenirs avant d'avoir pu retrouver plus de détails, n'ayant ici, d'ailleurs, pour but qu'un résumé succinct.

L'expérience précédente n'est pas tout à fait concluante, à cause des défauts ou des omissions dont je viens de parler. L'augmentation quelconque d'effet dû à l'ajutage peut, au reste, provenir en partie de ce que la longueur de cet ajutage n'étant pas très-petite par rapport à ce qui restait du tuyau plongé, il en résultait qu'une partie de l'ensemble

avait un diamètre plus grand que le reste. Son influence sur la longueur totale est, d'ailleurs, indiquée par la différence des durées des oscillations. Ainsi, avec l'ajutage il y avait onze ascensions en 62 secondes, et sans l'ajutage, vingt-cinq en 2 minutes; et encore la différence aurait été sans doute plus considérable si le tuyau de fonte, disposé latéralement pour augmenter momentanément la solidité de l'appareil, à cette époque de mes expériences, n'avait pas formé, avec le fond et la paroi verticale du bassin, une sorte de canal rectangulaire qui devait augmenter d'une quantité quelconque la masse en oscillation lorsqu'on supprimait l'ajutage. Quant à la *contraction* proprement dite de la veine, dans le mouvement de retour, son influence était diminuée par la forme de l'embouchure, par la proximité du fond et du mur vertical du bassin, et même par la présence du tuyau de fonte latéral, dont j'ai parlé pour le cas où l'on supprimait l'ajutage.

J'ai comparé les expériences sur le déchet pour toute la longueur du tuyau horizontal, à celles que j'avais faites, l'année précédente, sur le même tuyau, avant d'avoir étudié la machine aussi complétement que je le désirais. Je me suis aperçu qu'il y avait des différences difficiles à expliquer sans quelque détérioration de ce tuyau, provenant principalement sans doute de ce que, pour cet appareil provisoire, les joints n'avaient pas été faits avec assez de soin, comme on s'en est d'ailleurs aperçu pour plusieurs en les démontant. J'ai craint que ces différences ne vinssent en partie de ce qu'à cette époque, je n'avais peut-être pas encore bien saisi le mouvement nécessaire pour mettre la colonne en oscillation, sans y introduire trop de bulles d'air. J'ai donc considéré le résultat d'un certain nombre de périodes successives, résultat qui s'est trouvé assez sensiblement constant pour rassurer, au moyen d'ailleurs de causes évidentes de compensation, sur les chances d'irrégularité provenant de ces *bulles*. Ainsi, en 1843, il fallait que la colonne remontât trois fois, après être descendue du sommet bien rempli du tuyau, pour que la surface de la colonne remontante laissât entièrement vide le *tuyau-soupape*, alors fixe, de $0^m,47$ de long et de $0^m,36$ de diamètre intérieur, sans parvenir sensiblement au-dessous ni remonter sensiblement au-dessus de l'origine de ce tuyau-soupape, à la troisième ascension. En 1842, il fallait près de quatre périodes pour obtenir le même résultat. En 1843, la baisse, au bout de deux

périodes, était de $0^m,33$, et, en 1842, de $0^m,27$ à $0^m,30$, ou de $0^m,40$ au plus pour trois périodes. Enfin, pour une baisse ultérieure de $0^m,30$, il fallait encore trois périodes, en 1843, tandis que, en 1842, trois périodes ultérieures ne donnaient lieu qu'à une baisse ultérieure d'environ $0^m,16$; et, pour retrouver la baisse de $0^m,30$, il en fallait environ six. A partir à peu près de l'arête inférieure du tuyau de $0^m,36$ de diamètre, sept périodes augmentaient le déchet d'environ $0^m,53$ en 1843, tandis qu'il en fallait à peu près le double en 1842.

Les imperfections quelconques du tuyau, mises en évidence par la comparaison de ces deux séries d'observations, empêchent d'attacher beaucoup d'importance, quant aux limites, au détail des périodes intermédiaires et même aux chiffres définitifs. S'il est permis d'affirmer que la somme des coefficients des résistances passives est moindre, dans certaines circonstances, pour le mouvement oscillatoire que pour le mouvement uniforme, il faut attendre que l'on connaisse un plus grand nombre de faits pour en tirer des conséquences générales sur la valeur rigoureuse de ces coefficients. On ne saurait être trop circonspect dans l'étude des faits qui se rattachent aux phénomènes encore si peu connus des mouvements moléculaires. Aussi, je me contente de considérer, dans la plupart de mes recherches, comme offrant d'ailleurs un minimum, les chiffres adoptés par Prony pour ces coefficients dans le mouvement uniforme, quoique j'aie déjà réuni des expériences assez concluantes.

Quant à ce qui concerne plus spécialement l'étude de cette machine, je ferai remarquer qu'en 1842, les tuyaux qui même n'étaient probablement pas à beaucoup près en bon état, les joints ayant été faits, pour ces essais, d'une manière tout à fait provisoire, ont donné, au moins pour les premières périodes, celles qui ont été étudiées avec le plus de soin, un déchet moindre d'environ $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ que celles qui ont été observées à l'époque où la machine a fonctionné en présence de la Commission de l'Institut. Donc, plus, dans les calculs du chapitre précédent, on estimera haut le déchet provenant du simple balancement de la colonne liquide, plus nous saurons qu'il faudrait augmenter l'effet utile dans les calculs sur une bonne construction. Il y a, comme on voit, des compensations dans les estimations si elles laissent quelque doute.

En 1842, je profitai de ce que le niveau du bassin d'aval était descendu, par suite des besoins du service, pour observer des oscillations d'une course beaucoup plus grande. Je n'en donnerai pas ici le détail, ayant eu alors principalement pour but d'établir qu'on pouvait très-facilement mettre la colonne liquide en oscillation pour des amplitudes bien plus considérables. Mais, parmi ces expériences, il y en a une assez intéressante pour l'étude de la machine, en ce que le niveau était baissé, dans le bief d'aval, à une profondeur d'environ $0^m,60$, de sorte que l'on se trouvait dans des circonstances qui n'étaient pas trop différentes de ce qui se présentait quant à l'amplitude de la plus grande des deux oscillations, lorsque la machine était en jeu avec le flotteur. On ne doit pas oublier, d'ailleurs, qu'il ne s'agit ici que de comparaisons de résultats analogues, car la descente du niveau de la colonne dans le coude, brisant la surface de ce niveau, change les conditions du phénomène, ainsi que quelques autres circonstances dont j'ai parlé. Il faut surtout tenir compte de ce qu'en *amorçant* l'oscillation par une introduction alternative de liquide, on introduisait de l'air dans le coude pour ces grandes amplitudes. Aussi le déchet paraît relativement plus grand qu'il ne devrait l'être d'après des observations précédentes. Tout cela était, au reste, difficile à prévoir, à cause de ce qu'il y a de nouveau et de vraiment singulier dans les phénomènes des résistances passives pour les mouvements variés des liquides.

Il fallait deux ascensions, à partir du moment où le tuyau était plein jusqu'au sommet, pour que la colonne remontante parvînt précisément à l'entrée du bout du tuyau supérieur de $0^m,36$ de diamètre et de $0^m,47$ de haut, la première étant remontée à environ $0^m,27$ du sommet d'abord rempli, d'où elle était descendue. Il fallait ensuite quatre ascensions pour que l'augmentation du déchet, considérée alors dans le tuyau plus large de $0^m,40$ de diamètre, fût de $0^m,54$ environ. Voici, maintenant, comment on peut partir de ces données pour estimer la partie du déchet de la machine qui serait due aux simples mouvements de la colonne liquide, si les choses avaient été dans le même état qu'en 1842, en partant de ce qu'alors le déchet de la première ascension, quand le bassin d'aval était plein, était seulement à peu près de $0^m,14$ à $0^m,16$ tout au plus.

La période comprenant deux oscillations, l'une descendante, l'autre

remontante, la moitié environ du déchet précédent doit être considérée pour chacune; c'est-à-dire que nous aurons, pour une oscillation analogue à celle qui relève le flotteur, un déchet qui, pour être compensé, exigerait qu'on tirât du bief supérieur un cylindre d'eau d'environ $0^m.08$ de haut et de $0^m,36$ de diamètre. Quant à l'oscillation d'une puissance analogue à l'oscillation descendante de la machine, son déchet exigerait, pour être comblé, un cylindre d'eau de même diamètre, $0^m,36$ et de $0^m,135$ de haut, mais tiré d'une hauteur notablement plus considérable que celle de la chute motrice, à peu près dans le rapport de 190 à 126. De sorte que, pour rapporter tout à la même unité, ce sera comme si l'on tirait du bief supérieur un cylindre liquide d'environ $0^m,20$ de haut au lieu de $0^m,135$, ce qui fera en tout $0^m,28$ pour l'ensemble des deux oscillations. En définitive, sans attacher à ce genre de vérification plus d'importance qu'il n'en mérite, puisque les circonstances et les amplitudes ne sont pas tout à fait les mêmes, on voit comment il faut s'y prendre pour s'en servir, et c'était tout ce que je voulais indiquer sur cette matière pour compléter ce que j'ai dit dans le chapitre précédent. On trouve en nombres ronds, comme je l'ai avancé, que la partie du déchet provenant du simple mouvement de la colonne ne doit pas, dans diverses hypothèses, dépasser $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ du travail de la chute, et que la partie provenant du frottement, quoiqu'on ne puisse en assigner rigoureusement la valeur, est assez grande, par rapport au reste, pour qu'on soit sûr d'augmenter l'effet utile en élargissant convenablement le flotteur et la machine. C'est, pour le moment, la seule conséquence que je me permets de tirer de ces expériences, ou plutôt de ces observations d'ingénieur, faites simplement dans le but d'étudier un modèle d'une construction si imparfaite. Plusieurs personnes remarquèrent, dans les expériences publiques, une des pertes d'eau qui se faisait par le tuyau vertical à son joint avec le coude.

Résumé des recherches théoriques sur le débit d'eau motrice correspondant à l'effet utile maximum.

Les dimensions du tonneau de jauge ne me permettant de débiter qu'une petite quantité d'eau, j'avais disposé l'appareil de manière

qu'il pût marcher pendant un temps convenable. Aussi, dans ces expériences, il ne débitait pas assez d'eau pour le maximum d'effet utile à beaucoup près.

Les phénomènes de l'introduction du liquide dans l'appareil n'avaient pas beaucoup d'importance, à cause du peu de hauteur du niveau d'amont au-dessus du seuil de la soupape. Mais, comme il ne serait plus permis de négliger leur influence pour des dépenses d'eau considérables, surtout si l'on introduisait le liquide en plein tuyau sous le flotteur, je préviens que les calculs suivants sont tout à fait provisoires, jusqu'à ce que ce genre de phénomènes soit mieux connu : j'en dis quelques mots seulement pour donner une idée plus exacte de la machine.

Si l'on fait, pour un moment, abstraction de ces phénomènes particuliers, on est conduit à une formule très-simple pour la dépense d'eau correspondante à *l'effet utile* maximum.

Je suppose que le flotteur soit cylindrique et d'un diamètre à peu près égal à celui du tuyau, en ne m'occupant pas du renflement intérieur de la soupape annulaire et de la résistance de l'air qui passe au-dessous du flotteur. J'admets que le sommet du flotteur ne monte pas bien sensiblement au-dessus du niveau du bief supérieur, et que la résistance industrielle à vaincre est disposée de manière qu'il atteigne, dans sa descente, la colonne liquide sans percussion. On voit d'abord immédiatement s'il a une densité assez peu différente de celle de l'eau, que, dans l'ascension de la colonne, les choses se passeront à peu près de la même manière que si l'espace occupé par le flotteur l'était par un égal volume d'eau, abstraction faite de sa longueur. C'est-à-dire que, connaissant par expérience la profondeur d'où le niveau de la colonne remontante doit partir pour atteindre celui du bief supérieur, les choses se passeront à peu près comme s'il n'y avait pas de flotteur et que l'eau partît de cette profondeur déterminée; en un mot, comme si le flotteur était liquéfié.

Pour l'oscillation descendante, la limite de la profondeur obtenue sera sensiblement celle dont je viens de parler, plus la longueur du flotteur.

J'ai démontré, dans un Mémoire inséré dans le tome III de ce Journal, que, s'il n'y avait pas de causes de pertes de forces vives,

pour une colonne oscillante dans un tuyau vertical, la force vive varierait comme les sections circulaires d'un ellipsoïde de révolution, et que le travail que l'on aurait à surmonter pour vaincre les résistances passives serait, en général, à peu près comme le cube de l'amplitude pour les vitesses qui ne seraient pas trop petites. Mais le cas n'est pas tout à fait le même ici dans la première moitié de l'oscillation descendante. Je suppose, par exemple, que le flotteur ait une longueur égale à la hauteur de la chute motrice, et qu'étant remonté, il occupe tout l'espace cylindrique compris entre les niveaux d'amont et d'aval. Faisons, pour un moment, abstraction des résistances passives, et considérons de quelle manière la vitesse s'engendre. On voit d'abord que l'eau descendant du niveau d'amont au niveau d'aval par un orifice convenablement disposé, descend de la hauteur du centre de gravité d'une colonne qui serait de même diamètre que le tuyau vertical suffisamment prolongé, et dont la hauteur serait double de celle de la chute. Or cette colonne, en descendant au niveau d'aval, aurait engendré précisément la même vitesse qu'une égale quantité d'eau sortie du bief d'amont dans l'hypothèse du flotteur. Dans l'hypothèse du tuyau prolongé et de la suppression du flotteur, la force vive croîtrait comme les sections circulaires d'un demi-ellipsoïde de révolution, tandis que, dans l'autre, elle croît comme les ordonnées d'un triangle de même hauteur, puisqu'à chaque instant elle est proportionnelle à la quantité d'eau dépensée. Mais, en définitive, les deux quantités de force vive acquise sont égales; le travail nécessaire pour vaincre les résistances passives, à peu près proportionnelles aux forces vives dans un même tuyau, est donc dans l'hypothèse du flotteur comme $\frac{1}{2}$, tandis que, dans l'hypothèse de sa suppression, elle est comme $\frac{2}{3}$, précisément comme pour la demi-oscillation qui se présente dans les deux hypothèses au-dessous du niveau d'aval.

Si maintenant le flotteur n'est pas aussi long qu'à la limite que je viens de supposer, mais que son sommet affleure encore le niveau du bief supérieur, on voit immédiatement que, moins il est long, plus on se rapproche de la limite pour laquelle le travail en résistances passives ne serait pas moindre dans la première demi-oscillation que dans la seconde. Il en résulte que si, pour la seconde demi-oscillation descendante, le travail en résistances passives est comme le cube de la

somme de la longueur du flotteur cylindrique et de la profondeur atteinte par son sommet au-dessous du niveau d'aval, pour ce que l'on peut appeler la première demi-oscillation descendante, le travail en résistances passives n'augmente pas aussi rapidement avec la longueur du flotteur. En définitive, si l'on nomme x cette longueur et h la limite de la profondeur obtenue par son sommet au-dessous du niveau du bief d'aval, le travail en résistances passives n'augmentera pas en somme avec x aussi rapidement que la quantité

$$(h+x)^3.$$

Elle croîtra, par suite même des résistances passives, encore moins rapidement, à certains égards, parce que, plus l'amplitude augmente, plus les résistances passives augmentent relativement, le travail moteur étant comme le carré de l'amplitude, tandis que le travail en résistances passives tend à croître comme le cube; ce qui, diminuant relativement de plus en plus les vitesses *frottantes*, influe sur le travail en résistances passives qui en résulte.

Les considérations précédentes ont seulement pour but de faire voir que si l'on calcule le débit correspondant au maximum d'effet, en supposant le travail en résistances passives proportionnel aux cubes des demi-oscillations, il y a lieu de penser qu'on sera plutôt au-dessous qu'au-dessus de la vérité, puisqu'il ne paraît pas que ce travail en résistances passives augmente aussi rapidement, à moins qu'on n'ait égard à des phénomènes particuliers au mouvement varié, mais encore trop peu connus pour qu'on en puisse faire la base d'un calcul.

Soit H la course du flotteur. Son travail sera représenté par xH. S'il n'y avait aucune cause de perte de force vive, le travail dépensé par la chute d'eau serait égal au travail du flotteur. Mais, pour tenir compte des résistances passives, soit K un coefficient constant relatif à ces résistances : il faudra ajouter au travail de l'eau motrice, d'après l'hypothèse précédente, les deux termes Kh^3 et K$(h+x)^3$, de sorte que *l'effet utile* sera

$$\frac{x\mathrm{H}}{x\mathrm{H}+\mathrm{K}h^3+\mathrm{K}(h+x)^3}.$$

ou, en prenant h pour unité dans une machine donnée :

$$\frac{x\mathrm{H}}{x\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{K}(1+x)^3}.$$

En différentiant et égalant la différentielle à zéro, on trouve

$$2x^3+3x^2=2.$$

Cette équation a une racine positive comprise entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{10}$. Il en résulte que, pour le maximum d'effet, ou plutôt, d'après ce qui précède, pour une limite inférieure du débit correspondant au maximum, il aurait fallu débiter beaucoup plus d'eau que ne le faisait le modèle du diamètre dont il s'agit pour la chute donnée. On aurait donc pu en débiter encore beaucoup plus en retrouvant *l'effet utile* donné par l'expérience, *l'effet utile* désignant, comme on sait, le rapport du travail recueilli au travail dépensé.

Je pourrais développer les considérations précédentes en tenant d'ailleurs compte, autant que cela est possible dans l'état actuel de nos connaissances, des phénomènes de l'introduction de l'eau, qui ne sont relatifs qu'à ce que j'appelle la première moitié de l'oscillation descendante. Mais il ne paraît pas que ces phénomènes modifient autant le résultat définitif qu'on serait porté à le croire pour des dépenses d'eau assez considérables, quand on pourra disposer convenablement l'orifice d'introduction. J'ai cru qu'il suffisait d'indiquer la marche des calculs, le résultat que je viens de donner n'étant d'ailleurs appuyé que sur des phénomènes qui ne sont pas eux-mêmes connus d'une manière assez complète, et n'ayant ici d'autre but que celui de rassurer sur la puissance de la machine, relativement à son volume.

Quant à la longueur du tuyau, il est bon d'indiquer comment on pourra y avoir égard; mais il y aurait encore un phénomène à étudier pour le cas où ce tuyau serait assez court. Je veux parler de la résistance du flotteur plongeant dans la colonne remontante, résistance qui ne peut être évitée que par des conditions particulières dont je donnerai le détail dans l'ouvrage que je prépare. Abstraction faite de ce phénomène particulier, je suppose les résistances industrielles disposées de manière que le flotteur, s'il est d'un diamètre analogue à celui du tuyau, rencontre cette colonne sans percussion, à l'époque

ou elle se réduit elle-même au repos. Alors, en ne tenant pas compte des résistances accessoires, telles que celle de l'air passant au-dessous du flotteur jusqu'au moment de cette rencontre, il serait facile de voir d'après quels principes on déterminerait la longueur de tuyau nécessaire pour obtenir l'effet utile maximum, en admettant le résultat du calcul précédent ou celui d'un calcul plus complet qui aurait égard aux phénomènes négligés. Il suffirait de connaître, par expérience, le maximum de hauteur du niveau d'amont au-dessus du seuil de la soupape et le maximum d'ouverture pour lesquels la machine peut fonctionner, sans que les phénomènes de *contraction* et ceux des croisements de filets, etc., absorbent assez de travail pour changer trop complétement les conditions du calcul. Cette condition étant remplie, il faudra que le tuyau ait la longueur nécessaire pour que l'eau qu'il peut contenir, ayant acquis son maximum de vitesse, ait, au moment où la soupape se ferme, la quantité de force vive suffisante pour produire la quantité de travail indiquée, relativement à chaque période, au moyen de ce calcul du maximum d'effet. S'il est plus court, les conditions du maximum d'*effet utile* ne seront pas remplies; s'il est plus long, elles pourront l'être dans des limites très-étendues, mais la machine débitera moins d'eau dans un temps donné. Il y aura d'ailleurs une limite de longueur au delà de laquelle on ne pourra plus admettre que l'augmentation de longueur des surfaces frottantes sera compensée par la diminution de la fonction de la vitesse moyenne à laquelle le frottement est censé proportionnel. Dans les très-petites vitesses, le terme proportionnel aux simples vitesses finira par faire plus qu'une compensation à l'avantage provenant de ce que les résistances *locales*, telles que celle du coude, etc., diminuent avec les vitesses pour une amplitude d'oscillation d'une grandeur déterminée. Aussi, on a vu, par les expériences précédentes, que déjà mon tuyau horizontal était un peu trop long sous ce rapport. Mais, dans un premier essai, je l'avais pris trop long, afin de me débarrasser de la considération des phénomènes dont j'ai parlé, et qui auraient compliqué le probleme au lieu de n'avoir qu'une importance secondaire pour ces dimensions.

Le dispositif que j'avais adopté est d'ailleurs loin d'être le seul qui puisse être employé avec avantage.

Principes des variétés du nouveau système.

1. Au lieu d'augmenter la profondeur des fondations, pour donner au flotteur la place nécessaire à sa course, dans l'hypothèse d'une quantité donnée de travail à chaque période, on peut augmenter la section du flotteur et celle du tuyau vertical selon certaines lois. Mais il est facile de voir que cette disposition sera désavantageuse à certains égards, parce que, en général, le chemin parcouru par les résistances passives est d'autant plus grand, que la pression motrice ou résistante provenant de la différence des niveaux est moindre. Il se présente d'ailleurs quelques difficultés de plus dans l'ascension. Nous avons vu que le frottement était à peu près le même, en général, que si le flotteur était tenu en repos au bas de sa course. Si le flotteur est beaucoup plus gros, il y a, dans l'hypothèse que je viens de rappeler, une plus grosse colonne liquide à élever au-dessus du niveau du bief d'aval, et, par suite, une plus grande quantité de travail en frottement, à laquelle il faut ajouter diverses causes secondaires de perte de travail, et notamment les mouvements quelconques occasionnés par la forme, les dimensions du flotteur et du tuyau. D'un autre côté, il y a une cause de diminution de perte de travail, parce que le tuyau étant plus gros à la hauteur de l'ouverture de la vanne cylindrique, il n'est pas nécessaire que le seuil de celle-ci soit aussi bas au-dessous du niveau du bief supérieur pour le débit voulu de la machine. Cette disposition paraît être au nombre de celles qui offrent des chances raisonnables de succès.

2. On pourrait encore diminuer la profondeur des fondations en ajoutant une soupape à l'extrémité d'aval de ce tuyau, cette extrémité étant relevée verticalement, afin que la force vive acquise pendant que cette dernière soupape sera ouverte soit éteinte en vertu du refoulement de la colonne liquide dans un tuyau élevé au-dessus du niveau du bief d'aval, au lieu de s'éteindre en vertu de la baisse du niveau de l'extrémité d'amont au-dessous de ce bief d'aval. Cette ascension alternative servira, dans le mouvement de retour, à relever le flotteur. Cette soupape sera annulaire comme la première; mais si la partie du tube relevée verticalement est trop longue, elle ne pourra plus être

ce tube vertical lui-même. Ce sera une soupape de *cornwall*, ou une sorte de vanne cylindrique, facile d'ailleurs à faire fonctionner au moyen de celle d'amont, dont les expériences précédentes font connaître le jeu. Elles seront ouvertes et fermées ensemble au moyen d'une chaîne solide ou *liquide*, celle d'aval s'élevera pendant que celle d'amont descendra. S'il résulte de cette disposition une perte quelconque de force vive provenant de ce qu'il pourra rester encore un peu d'eau dans le tube de la seconde soupape à l'époque où celle-ci s'ouvrira, il est facile de voir que cette perte sera insignifiante.

3. On peut, au reste, proposer une disposition inverse de celle que j'ai décrite dans cette Note. Il n'y aura qu'une seule soupape; mais au lieu d'être en amont, elle sera en aval, l'autre extrémité du tuyau horizontal, toujours plein d'eau, débouchant dans le bief supérieur. Cette soupape sera au pied d'un tuyau vertical, et disposée, en un mot, comme la seconde soupape dont je viens de parler. Il est probable qu'elle pourra fonctionner au moyen du mouvement de la colonne liquide, et l'on sait d'ailleurs combien il est facile d'avoir égard aux petites difficultés de régulation, au moyen de l'un des moyens connus sous le nom de *cataracte*. L'élévation alternative de la colonne liquide dans le tuyau vertical de la soupape, en vertu de la fermeture alternative de celle-ci, permettra d'utiliser le mouvement d'un flotteur d'une manière analogue à ce que j'ai exécuté. Dans cette disposition, le jeu de la soupape est moins intéressant. Voici, au reste, comment on peut concevoir son jeu, même abstraction faite d'une *cataracte*. Si elle est convenablement équilibrée, la vitesse graduellement croissante de l'eau suffira pour la fermer en la soulevant, parce qu'elle aura un diamètre un peu moindre que celui du tuyau, et que la percussion de l'eau pourra, par conséquent, agir par-dessous contre un anneau disposé à sa partie inférieure. L'eau, en montant dans le tuyau vertical, la maintiendra fermée, et dans son mouvement de retour, la colonne, l'abandonnant à son propre poids, qui ne sera contre-balancé que d'une manière convenable, lui permettra de s'ouvrir d'elle-même. J'ai exécuté une machine fonctionnant par des principes analogues, et dont le modèle est au Cabinet de l'École Polytechnique. Il n'y a aussi qu'une seule soupape, d'une espèce différente, il est vrai, de celle dont je viens de

parler; mais les phénomènes qui la font marcher étant les mêmes, je renvoie au dessin que j'en avais donné, avant de l'exécuter, dans le tome XIV des *Annales des Mines*.

Je reviens aux dispositions plus analogues à celle que j'ai décrite principalement dans cette Note, et qui paraissent au moins applicables dans beaucoup de circonstances, si l'on donne suite aux projets de distribution d'eau à domicile dans les grandes villes.

4. Pour ces applications particulières, il n'y aurait pas, en général, beaucoup d'importance à diminuer la course du flotteur, puisque les niveaux des réservoirs ou des cuvettes seront, dans un grand nombre de circonstances, bien au-dessus du sol. On aurait donc toutes les facilités nécessaires pour varier ces courses de façon à profiter des propriétés du système. Par exemple, au lieu de diminuer la course du flotteur en augmentant le travail en résistances passives, on peut l'augmenter en diminuant ce travail au moyen d'un rétrécissement convenable de tout le tuyau vertical. Dans les circonstances ordinaires, où le tuyau horizontal doit être assez court, cet avantage n'aurait pas beaucoup d'importance, parce que le frottement provenant du rétrécissement du tuyau vertical, étant en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres, le compenserait presque toujours. Mais, dans les villes où l'on aura ordinairement des tuyaux horizontaux d'une certaine longueur, il n'en sera plus ainsi.

Cette longueur ne sera plus, à la rigueur, un inconvénient de la même espèce, parce que l'eau motrice affluente pouvant suffire, dans certains cas, pour refouler le flotteur de bas en haut, la machine peut être disposée de manière que la colonne liquide du tuyau horizontal revienne peu ou point sur ses pas si le flotteur est assez gros. Il en résulte qu'il ne faudra presque point mettre sur le compte de la machine le frottement de ce tuyau horizontal, puisque, du moins, une partie considérable de ce frottement se serait nécessairement présentée dans la conduite de l'eau par un mouvement uniforme, s'il n'y avait pas eu de machine. Il faudra, il est vrai, tenir compte d'une autre cause de travail résistant, parce que l'air doit pouvoir circuler librement à travers le flotteur pendant sa descente; ce qui exige, dans ce flotteur, une disposition accessoire facile à exécuter au moyen d'un tube à soupape.

Il faut aussi tenir compte de ce que, dans tous les cas où il y aura une colonne liquide d'une certaine hauteur au-dessus de l'orifice annulaire de la soupape d'introduction, par suite des dispositions qui exigent que le flotteur ne gêne pas cet orifice, cette colonne devra, comme une sorte de *piston aspiré*, prendre la vitesse de la colonne liquide inférieure à la soupape : ce qui rentre dans les principes exposés dans mon dernier Mémoire.

Il est à remarquer que, abstraction faite des circonstances dont je viens de parler, le rétrécissement du tuyau vertical change les bases du calcul du débit correspondant au maximum d'effet utile, et donne encore plus de latitude dans les hypothèses sur les tuyaux d'une ville, pour l'établissement des courses du flotteur. Aussi, il y a lieu de penser que les conduites d'eau pourront réunir, à l'avantage de distribuer une denrée de première nécessité, celui de distribuer, dans beaucoup de cas, des moteurs pour de petits ateliers.

5. Dans ce qui précède, j'ai principalement étudié l'hypothèse où le flotteur est disposé dans une branche qui descend de la source. Il est intéressant de voir comment les choses se passeraient s'il était disposé dans une seconde branche beaucoup plus grosse, relevée verticalement en aval du tuyau, et s'élevant seulement au-dessus du niveau du bief inférieur de la quantité suffisante pour que l'eau de ce bief ne puisse pas y entrer après la sortie de l'eau motrice par cette extrémité. On jouirait ici de propriétés qui pourraient peut-être avoir aussi des avantages dans quelques circonstances particulières. La course du flotteur serait assez petite, étant seulement déterminée par les oscillations du niveau dans la grosse branche. La colonne liquide aurait alternativement un mouvement rétrograde en s'allongeant pour aller à la rencontre de la force motrice et soulever la soupape d'amont, comme je l'ai expliqué pour le système objet des expériences ci-dessus. Mais, en général, cette disposition, qui conduit d'ailleurs à des calculs intéressants, ne sera point avantageuse. On voit qu'elle repose essentiellement sur un mouvement de retour. Le niveau moyen autour duquel se fait l'oscillation étant plus bas, les courses de la colonne sont plus grandes; elles se font sous des pressions combinées de manière à augmenter le travail en résistances passives de quantités très-

notables, qui se déterminent facilement par le calcul infinitésimal. Dans ces recherches, on retrouve aux limites, comme cela devait être, les valeurs obtenues pour les cas étudiés précédemment.

6. Parmi les variétés du système, on doit encore signaler ici le cas où l'on voudrait faire remonter le flotteur beaucoup au-dessus du niveau du bief d'amont. Il faudrait, dans ce but, avoir une oscillation remontante, en un mot faire revenir la colonne liquide sur ses pas. On disposerait le renflement intérieur de la soupape annulaire de façon à ne la faire ouvrir qu'à l'époque où l'ascension serait finie. Dans cette disposition, il monterait une certaine quantité d'eau au-dessus du niveau du bief supérieur. Il pourrait ne pas en monter bien sensiblement, dans le cas où le flotteur ne devrait s'élever qu'à une hauteur médiocre au-dessus du niveau d'amont, puisqu'il s'élèvera d'une quantité quelconque, en vertu du mouvement acquis. Quant au système n° 3, pour lequel le flotteur serait disposé dans un tuyau vertical en aval de la source, et où la soupape serait elle-même au pied de ce tuyau, il n'y aurait pas à l'élévation de l'eau au-dessus du niveau de la source un inconvénient de la même espèce. Le flotteur pourrait être d'un diamètre beaucoup moindre que le tuyau, la colonne liquide retombant alors d'une manière utile au mouvement de retour. Mais on voit, en définitive, que, dans cette disposition de la soupape, il faut un mouvement de retour de la colonne horizontale, à moins qu'on ne perde, à chaque période, la colonne contenue dans le tuyau vertical. Il y aurait encore diverses attentions à avoir. Ainsi, dans le cas où le flotteur aurait un diamètre analogue à celui du tuyau, il faudrait que la soupape de celui-ci fût à une certaine profondeur au-dessous du niveau du bief inférieur, afin que l'orifice ne fût pas bouché par la descente du flotteur; et cette profondeur est principalement ce qu'on veut éviter par cette disposition particulière. Si le diamètre du flotteur était moindre, et que la soupape ne fût pas à une profondeur aussi grande, il en résulterait encore un inconvénient. L'eau motrice ne sortirait en aval que par un orifice annulaire compris entre les parois du flotteur et celles du tuyau.

Je n'avais pour but, dans cette Note, qu'une simple exposition de principes qui seront développés dans mon ouvrage sur le mouvement

varié des liquides. Je n'entrerai pas ici dans les détails, les réservant pour cet ouvrage ou pour des Recueils plus spéciaux.

J'étudierai dans une autre Note les moyens de transformer le mouvement alternatif en mouvement circulaire.

Conclusions.

Mes expériences sur le moteur hydraulique à flotteur et à forces vives, que j'ai présenté en 1839, et dont j'avais déjà parlé en 1838, confirment les principes généraux que j'avais présentés le premier sur l'emploi de la *vitesse acquise des colonnes liquides* sans variation brusque, et sans autre perte de force vive bien sensible que celle qui est indispensable dans un siphon où oscille librement une colonne liquide. Il n'est pas possible d'y produire de coup de bélier quand même on le voudrait, les sections *transversales* n'étant jamais bouchées.

Les formes de ce système peuvent d'ailleurs varier de beaucoup de manières, et l'on peut, comme je le ferai voir en détail dans une autre Note, transformer le mouvement alternatif en mouvement circulaire au moyen d'une partie de ces dispositifs.

Ces divers appareils jouissent d'un avantage essentiel sur les moteurs à pistons, par la raison même qu'il n'y a point de piston, ni, par suite, de garnitures qui se détériorent; et surtout parce qu'il résulte de l'absence du frottement entre corps solides, que l'on n'a point à s'embarrasser de ce que, dans les moteurs plus ou moins analogues aux *roues de côté*, il y a, à la longue, du jeu dans les pièces, ce qui change les conditions des pistons ou des palettes. De sorte qu'on n'aura pas à craindre, dans un long usage, les mécomptes auxquels il faut s'attendre quand on se forme à priori une idée de l'effet utile de ces roues, au moyen d'expériences faites dans les premiers instants de la construction ou de la réparation, quoique le chiffre considérable trouvé dans ces premiers instants soit très-utile pour vérifier les théories de l'hydraulique.

On peut disposer l'appareil de manière que la colonne liquide ne revienne point sur ses pas dans le tuyau horizontal; de sorte que, dans le cas, du moins, où l'on emploierait une cataracte pour assurer les mouvements de la soupape, en ajoutant quelques dispositions acces-

soires relatives à la régulation, on pourrait, à la rigueur, débiter autant d'eau qu'au moyen de mon système à *piston aspiré*, objet du dernier Mémoire que j'ai publié dans ce Journal. Le flotteur ayant à la limite un diamètre sensiblement égal à celui du tuyau, et faisant l'effet d'une espèce de piston, peut être refoulé de bas en haut par l'eau motrice affluente sans que la colonne horizontale revienne sur ses pas, d'une manière analogue à ce qui se présente dans un des cas du *piston aspiré*, sauf quelques dispositions accessoires. Mais, en général, il faudra rarement compter sur un débit aussi grand dans les applications aux rivières puissantes, parce que la course du flotteur sera nécessairement beaucoup plus grande que celle du *piston aspiré*, de sorte qu'il faudrait des fondations plus profondes pour faire place à cette course. Le *piston aspiré* sera, en général, plus commode pour les grands diamètres, d'autant plus que le tuyau peut être en entier horizontal, et qu'il peut n'y avoir, par conséquent, aucune espèce de coude.

J'ai d'ailleurs indiqué des dispositifs qu'il faudra étudier par expérience avant de pouvoir décider d'une manière définitive le degré d'avantage de mes divers systèmes dans des circonstances données [*]. Celui qui est l'objet principal de cette Note était précisément étudié de manière à dépenser peu d'eau, à cause des dimensions de mon tonneau de jauge, et j'avais simplement pour but de fixer les idées sur les effets de ce genre de moteur, relativement à la quantité d'eau motrice dépensée.

Quant à ses avantages sur les anciens systèmes à flotteur, il suffit de remarquer que ces systèmes reposaient essentiellement sur les lois de l'hydrostatique. On ne tenait pas compte de la vitesse acquise, on la considérait comme une cause de perte de travail, ou même d'inconve-

[*] Depuis que cette Note est écrite, j'ai construit un modèle fonctionnant de mon appareil à *piston aspiré sans soupape et sans boulet inférieur ni cataracte*. Ce modèle est suffisant pour établir la régularité de son jeu et vérifier la puissance de l'espèce particulière de *moteur* qu'il utilise. Mais il paraît que le flotteur *alternativement plongé*, dont je me suis servi dans mon dernier Mémoire pour exposer le *principe*, n'est pas toujours aussi avantageux qu'un système de levier coudé convenablement disposé pour remplir les mêmes fonctions que ce flotteur. Il n'y a point, au reste, de flotteur dans la forme du *piston aspiré* que j'ai étudiée de la manière la plus spéciale.

ments plus ou moins graves. Il fallait nécessairement des dimensions beaucoup plus considérables pour débiter une quantité donnée de liquide, et l'on ne pouvait d'ailleurs avoir égard aux variations de hauteur des niveaux sans changer le point d'attache du balancier.

Les machines, objet de ce Mémoire, seront au moins particulièrement applicables aux projets de distribution de l'eau à domicile dans les grandes villes [*].

---

[*] Voici une des lettres de M. Coriolis, citées dans le Rapport de M. Lamé sur ma principale expérience. Elle avait été écrite, le 25 juillet 1839, à M. Poirée, inspecteur divisionnaire des Ponts et Chaussées, qui a bien voulu me la communiquer. Je la publie, parce que c'est une pièce officielle adressée à l'un des membres de la Commission de Versailles par le rédacteur du premier Rapport favorable fait à l'Institut sur cette machine, le 13 janvier 1840. On y verra dans quels termes ce savant académicien s'exprimait quand il parlait de mes travaux en son propre nom. J'ai tâché de répondre à sa confiance en donnant à mes idées des développements qui font aujourd'hui de mes recherches une nouvelle branche de l'hydraulique, abstraction faite des applications dont elles seront ultérieurement susceptibles :

« Monsieur,

M. de Caligny m'apprend que vous désirez avoir mon opinion sur une machine » de son invention ayant pour objet d'utiliser une chute d'eau par les oscillations dans » un siphon. Il m'a dit que vous pourriez faire l'essai de cette machine à Marly, si » vous pensiez qu'une telle expérience offrît quelques chances de succès. Je répondrai » au désir de M. de Caligny en vous disant que j'ai examiné son projet, et que j'ai » reconnu qu'il était bien conçu, suivant les règles de la dynamique et *avec une adresse* » *d'invention dont son auteur a déjà fait preuve dans une autre machine analogue*. Je » crois que l'essai de la nouvelle machine de M. de Caligny sera une chose utile à la » science et à l'industrie, et que l'administration ferait bien, n'importe sur quels fonds, » de se charger des frais de cette expérience. Cette machine, si elle est bien construite, » peut donner un très-bon produit, et son auteur ne pouvant faire lui-même l'expé- » rience, *il est plus que convenable* que l'administration l'aide autant qu'elle le pourra.

G. Coriolis. »

NOTE

Sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées ;

PAR M. H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Nous nous sommes occupé, dans le tome VIII de ce Journal, des courbes qui coupent, sous un angle constant, les tangentes d'une courbe donnée ou les génératrices de la surface développable dont cette courbe est l'arête de rebroussement. Nous allons compléter ces recherches en étudiant les propriétés des trajectoires qui coupent les tangentes d'une courbe donnée, de telle manière que leurs plans osculateurs fassent un angle constant avec ceux de cette courbe. On remarquera que, si, suivant les tangentes d'une des trajectoires, on menait des plans faisant avec ses plans osculateurs un angle égal à l'angle constant, la courbe donnée serait l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des premiers plans; ou bien encore la courbe donnée et chacune des trajectoires sont les arêtes de rebroussement de deux surfaces développables qui se coupent sous un angle constant. Lorsque cet angle est droit, les trajectoires sont des lignes géodésiques tracées sur une surface développable donnée, et nous verrons qu'on peut toujours obtenir leurs équations sous forme intégrable, au moyen de deux quadratures successives.

1. Soient

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

les équations de la courbe donnée; celles de la tangente, menée par le point pour lequel $z = \alpha$, seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\psi'\alpha,$$

d'où

$$(1) \qquad (y - \psi\alpha)\,\varphi'\alpha = (x - \varphi\alpha)\,\psi'\alpha.$$

Si l'on considère une quelconque des trajectoires, elle coupera cette tangente en un point (x, y, z), et l'équation de son plan osculateur sera de la forme

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y).$$

Concevons une seconde tangente menée par le point pour lequel $z = \alpha + d\alpha$, et soient $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées du point correspondant de la trajectoire; on trouvera, en différentiant les équations de la première tangente,

$$dx = \varphi'\alpha\,dz + (z - \alpha)\,\varphi''\alpha\,d\alpha, \quad dy = \psi'\alpha\,dz + (z - \alpha)\,\psi''\alpha\,d\alpha,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'\alpha\,dz + (z - \alpha)\,\psi''\alpha\,d\alpha}{\varphi'\alpha\,dz + (z - \alpha)\,\varphi''\alpha\,d\alpha}.$$

On tire de là

$$dz = \frac{\psi''\alpha - \dfrac{dy}{dx}\,\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\,\dfrac{dy}{dx} - \psi'\alpha}\,(z - \alpha)\,d\alpha;$$

par suite,

$$dx = \frac{\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\,\dfrac{dy}{dx} - \psi'\alpha}\,(z - \alpha)\,d\alpha,$$

$$dy = \frac{(\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha)\,\dfrac{dy}{dx}}{\varphi'\alpha\,\dfrac{dy}{dx} - \psi'\alpha}\,(z - \alpha)\,d\alpha.$$

Mais le plan osculateur de la trajectoire devant passer au point infiniment voisin du point (x, y, z), on aura

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$

et, en substituant les valeurs de dx, dy, dz, on trouvera

$$(2) \qquad \psi''\alpha - \frac{dy}{dx}\,\varphi''\alpha = \left(A + B\frac{dy}{dx}\right)(\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha).$$

Formons maintenant l'expression de l'angle θ que fait la tangente de la courbe donnée avec celle de la nouvelle courbe, où, ce qui revient au même, avec l'intersection des plans osculateurs des deux courbes. Le plan osculateur de la courbe donnée a pour équation

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

en faisant

$$p = \frac{\psi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}, \quad q = -\frac{\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}:$$

si l'on y joint l'équation

$$z' - z = \mathrm{A}(x' - x) + \mathrm{B}(y' - y),$$

on aura les équations de l'intersection des plans osculateurs des deux courbes. On en déduit

$$x' - x = \frac{q - \mathrm{B}}{\mathrm{A}q - \mathrm{B}p}(z' - z), \quad y' - y = \frac{\mathrm{A} - p}{\mathrm{A}q - \mathrm{B}p}(z' - z),$$

ou bien, en remplaçant p, q par leurs valeurs et mettant pour A sa valeur en fonction de B tirée de l'équation (2), ce qui fera disparaître la quantité B elle-même,

$$x' - x = \frac{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{\psi''\alpha - \varphi''\alpha\dfrac{dy}{dx}}(z' - z),$$

$$y' - y = \frac{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\dfrac{dy}{dx}}{\psi''\alpha - \varphi''\alpha\dfrac{dy}{dx}}(z' - z).$$

Désignons, pour abréger, par a et b les multiplicateurs de $z' - z$, et exprimons que la droite représentée par ces deux équations fait un angle égal à θ avec la tangente de la courbe donnée, dont la direction est déterminée par les quantités $\varphi'\alpha$, $\psi'\alpha$: nous aurons, par une formule connue,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{(a - \varphi'\alpha)^2 + (b - \psi'\alpha)^2 + (a\psi'\alpha - b\varphi'\alpha)^2}}{a\varphi'\alpha + b\psi'\alpha + 1},$$

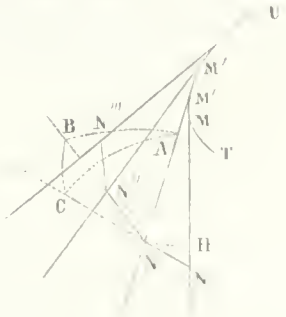
ou bien, en mettant pour a, b leurs valeurs, et après quelques

réductions,

$$(3)\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\left(\varphi'\alpha + \psi'\alpha\frac{dy}{dx}\right) + \psi''\alpha - \varphi''\alpha\frac{dy}{dx}} \times \left(\psi'\alpha - \varphi'\alpha\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans cette formule le radical peut être pris avec les signes $\pm$, ce qui donnera pour θ deux angles supplémentaires.

2. Il nous reste à former une autre expression générale de δ en fonction de α, qui soit indépendante de $\frac{dy}{dx}$, et c'est à quoi nous arriverons en nous appuyant sur ce que l'angle des plans osculateurs des deux courbes doit être constant.



Soient M, M′, M″,... plusieurs points consécutifs de la courbe donnée TU, MN, M′N′, M″N″,... les tangentes en ces points, et NN′, N′N″, N″N‴,... les éléments successifs de la trajectoire. Appelons ε l'angle de contingence et ω l'angle de torsion de la courbe donnée, ε_1 et ω_1 les mêmes quantités pour la trajectoire, et i l'angle constant des plans osculateurs des deux courbes; prolongeons les éléments NN′, N′N″, et considérons l'angle trièdre ayant pour sommet le point N′ et pour arêtes les droites N′A, N′B, N′C. Les plans de cet angle trièdre forment, sur une sphère ayant N′ pour centre et l'unité pour rayon, un triangle sphérique ABC dans lequel on aura, comme il est aisé de voir,

$$a = \mathrm{BN'C} = \varepsilon_1, \quad b = \mathrm{CN'A} = \mathrm{N'NM} + \mathrm{NM'N'} = \delta + \varepsilon, \quad c = \mathrm{BN'A} = \delta + d\delta,$$
$$\mathrm{A} = \omega, \quad \mathrm{B} = 180^\circ - (i + \omega_1), \quad \mathrm{C} = i.$$

Ce triangle donne, par une formule connue,

$$\cot c \sin b = \cos b \cos \mathrm{A} + \sin \mathrm{A} \cot \mathrm{C}.$$

ou bien

$$\cot(\theta + d\theta)\sin(\theta + \varepsilon) = \cos(\theta + \varepsilon)\cos\omega + \sin\omega\cot i,$$

d'où l'on déduira sans difficulté, en remplaçant $\cot(\theta + d\theta)$ par $\frac{\cos(\theta + d\theta)}{\sin(\theta + d\theta)}$, développant les sinus et cosinus de $\theta + d\theta$ et $\theta + \varepsilon$, et négligeant par rapport aux infiniment petits du premier ordre ceux d'un ordre supérieur,

$$(4) \qquad d\theta - \varepsilon + \omega\cot i\sin\theta = 0.$$

Comme ε et ω sont déterminés en fonction de α par les équations de la courbe donnée, cette équation est une équation différentielle du premier ordre par rapport à θ, dont l'intégration donnerait θ en fonction de α et d'une constante arbitraire. Mais on ne sait pas l'intégrer pour une valeur quelconque de l'angle i.

Si cet angle était droit, on aurait

$$\cot i = 0,$$

et l'équation deviendrait

$$d\theta - \varepsilon = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta = \int\varepsilon + C.$$

Ce cas important est celui où la trajectoire devient une ligne de plus courte distance entre deux de ses points sur une surface développable donnée. En effet, la relation $d\theta = \varepsilon$ prouve que l'angle $N''N'M'$ ou $\theta - d\theta$ est égal à $\theta + \varepsilon$ ou à l'angle $NN'K$, d'où l'on conclut immédiatement que si l'on développait sur un point la surface développable, lieu des tangentes de la courbe donnée, les divers éléments de la trajectoire seraient en ligne droite, et, par suite, que cette trajectoire est une ligne géodésique ou de plus courte distance entre deux quelconques de ses points sur la surface. Ceci démontre pour les surfaces développables cette proposition générale, que les lignes de plus courte distance sur une surface ont leurs plans osculateurs perpendiculaires à ses plans tangents.

5. Pour obtenir sous forme intégrable les équations des lignes géodésiques, désignons $\int\varepsilon$ par E qui représente une fonction de α; on aura

$$\theta = E + C,$$

et la constante C se déterminerait par une valeur connue de θ correspondant à une valeur particulière de α. Si l'on porte cette valeur générale de θ dans l'équation (3), on en tirera α en fonction de $\frac{dy}{dx}$, expression qu'on portera dans l'équation (1). Or cette équation peut être mise sous la forme

$$y = \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}x + \frac{\psi\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha\psi'\alpha}{\varphi'\alpha},$$

et puisque α est fonction de $\frac{dy}{dx}$, on voit qu'elle rentre dans une classe d'équations qu'on sait intégrer. Pour cela, on éliminera $y - \varphi\alpha$ entre l'équation (1) et sa différentielle, prise en faisant varier toutes les quantités qui y entrent : on trouvera

$$(5) \qquad \left(\varphi'\alpha\frac{dy}{dx} - \psi'\alpha\right)dx - \frac{\varphi'\alpha\psi'\alpha - \psi\alpha\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha}(x - \varphi\alpha)\,d\alpha$$

D'un autre côté, on a pour la valeur de l'angle ε,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\,d\alpha,$$

d'où l'on tirera la valeur du radical qui est au numérateur pour la porter dans l'équation (3). On trouvera

$$d\alpha = \frac{\left(\psi'\alpha - \varphi'\alpha\frac{dy}{dx}\right)[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]\cot\theta.\varepsilon}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\left(\varphi'\alpha + \psi'\alpha\frac{dy}{dx}\right) + \psi''\alpha - \varphi''\alpha\frac{dy}{dx}}$$

d'où l'on tirera la valeur suivante de $\frac{dy}{dx}$, en remplaçant $\cot\theta.\varepsilon$ par $\cot\theta\,d\theta = d.l\sin\theta = d.l\sin(E + C)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]\cdot\frac{d.l\sin(E + C)}{dx} - (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\psi''\alpha}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]\cdot\frac{d.l\sin(E + C)}{dx} + \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha) - \varphi''\alpha}$$

On portera enfin cette expression de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (5), qui donnera

après quelques réductions,

$$dx = \left[\frac{\varphi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi\alpha\psi'\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]} - \frac{d.l\sin(E + C)}{d\alpha}\right] \times (x - \varphi\alpha)\,d\alpha.$$

Mais l'on a

$$\frac{\varphi\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]}\,d\alpha = d.l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}:$$

par suite, l'équation précédente devient

$$dx = d.l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C).\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}} \times (x - \varphi\alpha).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire par rapport à x et dx, qui a pour intégrale

$$x = -\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$\times \left[C' + \int \frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}\right].$$

C' étant une nouvelle constante qu'on déterminerait par la valeur de x répondant à une valeur particulière de α. Cette équation se simplifie en remarquant que l'on a

$$\int \frac{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha};$$

par suite, en intégrant par parties,

$$\int \frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$= -\frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha} + \int \sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C).d\alpha;$$

et enfin, en substituant,

$$(6)\quad x - \varphi\alpha = -\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}\left[C' + \int \sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C).d\alpha\right].$$

L'élimination de α entre les équations (1) et (6) donnerait une relation en x, y, qui serait l'équation de la projection sur le plan des x, y d'une ligne géodésique quelconque. On prendrait pour la seconde équation de cette ligne, celle de la surface développable qui les contient toutes, et on l'obtiendrait, en éliminant α entre les équations de la tangente de la courbe donnée.

4. Revenons au cas général où l'angle i est quelconque, et désignant, pour abréger, par $T = 0$ l'équation (3), différentions-la en faisant varier toutes les quantités qui y entrent, α, $\frac{dy}{dx}$ ou y' et δ, ce qui donne

$$\frac{dT}{d\alpha}d\alpha + \frac{dT}{d\delta}d\delta + \frac{dT}{dy'}dy' = 0.$$

On y mettra pour $d\delta$ sa valeur donnée par l'équation (4), et pour $d\alpha$ la valeur suivante, tirée de l'équation (1) différentiée,

$$d\alpha = \frac{y'\varphi'\alpha - \psi'\alpha}{(x - \varphi\alpha)\psi'\alpha - (y - \psi\alpha)\varphi''\alpha}\,dx.$$

L'équation $dT = 0$ deviendra une relation entre α, δ, x, y, y', dx, dy', et, en éliminant enfin α, δ entre cette équation et les équations (1) et (3), on aura une équation entre x, y, y', dx, dy' qui sera l'équation différentielle du second ordre de la projection d'une trajectoire quelconque sur le plan des x, y. L'intégration de cette équation introduirait deux constantes arbitraires qu'on déterminerait par les données initiales, et, en y joignant l'équation de la surface développable qui contient toutes les trajectoires, on aurait les équations d'une trajectoire quelconque.

5. On peut appliquer à la question que nous venons de résoudre une méthode plus simple qui permet de ne pas faire usage de l'équation (3). Elle repose sur l'expression de la partie de la tangente de la courbe donnée comprise entre cette courbe et la trajectoire; nous désignerons par ρ cette longueur, qui est égale à MN au point M de la courbe TU; au point suivant M', cette longueur est

$$M'N' = \rho + d\rho.$$

Soit décrit, du point M' comme centre avec le rayon M'N', l'arc m-

finiment petit N'H ; MH étant le prolongement de $MM' = ds$, on a

$$M'N' = M'MH,$$

ou bien

$$\rho + d\rho = MH + ds.$$

D'un autre côté, l'angle NM'N' étant égal à ε, on aura

$$N'H = (\rho + d\rho).\varepsilon;$$

par suite, au moyen du triangle NN'H,

$$NH = N'H \times \cot\theta = (\rho + d\rho)\,\varepsilon\cot\theta.$$

Donc

$$MN \quad \text{ou} \quad \rho = MH + (\rho + d\rho)\,\varepsilon\cot\theta,$$

relation qui, retranchée de la première, donne enfin

$$(7) \qquad d\rho + \rho\varepsilon\cot\theta = ds,$$

en négligeant $\cot\theta.\varepsilon d\rho$, quantité infiniment petite du second ordre. Si θ était connu en fonction de α, cette équation, qui est linéaire et du premier ordre par rapport à ρ, serait intégrable et déterminerait ρ en fonction de α et d'une constante arbitraire; par suite, on obtiendrait les équations d'une trajectoire quelconque en éliminant α entre les équations de la tangente de la courbe donnée et l'équation suivante :

$$(8) \qquad \rho^2 = (x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2.$$

Lorsque l'angle i est droit, on a

$$\theta = E + C;$$

et si l'on remplace $\varepsilon\cot\theta$ par $d.l\sin(E + C)$, on trouvera, pour l'intégrale de l'équation (7),

$$(9) \qquad \rho = \frac{1}{\sin(E + C)}\left[C'' + \int \sin(E + C).ds\right],$$

C'' étant la nouvelle constante arbitraire. Portant enfin cette expression dans l'équation (8), on obtiendra les équations d'une ligne géodésique quelconque de la surface donnée en éliminant α entre les équa-

tions

$$(10)\quad \begin{cases} x - \varphi\alpha = \varphi'\alpha.(z - \alpha), \quad y - \psi\alpha = \psi'\alpha.(z - \alpha) \\ \frac{1}{\sin(E+C)}[C'' + \int \sin(E+C).ds]^2 = (x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2 \end{cases}$$

On remarquera que l'on a

$$\rho^2 = \frac{(x - \varphi\alpha)^2}{(\varphi'\alpha)^2}[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2],$$

et

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}.d\alpha,$$

valeurs qui, substituées dans la dernière des équations (10), font retrouver l'équation (6) obtenue par la première méthode.

6. Il existe entre les angles de contingence et de torsion de la courbe donnée et ceux de chacune des trajectoires, des relations remarquables et fort simples qui se déduisent du triangle sphérique que nous avons déjà considéré. Ce triangle donne

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$

ou bien

$$-\cos(i + \omega_1) = -\cos\omega \cos i + \sin\omega \sin i \cos(\theta + \varepsilon).$$

Développant $\cos(i + \omega_1)$, $\cos(\theta + \varepsilon)$, et négligeant dans les deux membres les infiniment petits du second ordre par rapport à ceux du premier, on trouve

$$(11)\qquad \omega_1 = \omega \cos\theta.$$

D'un autre côté, l'on a

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\sin\varepsilon}{\sin\omega} = \frac{\sin(\theta + d\theta)}{\sin i},$$

d'où l'on tire, en procédant de même,

$$(12)\qquad \varepsilon_1 \sin i = \omega \sin\theta.$$

Les relations (11) et (12) font connaître les angles de contingence et de torsion de chaque trajectoire, au moyen de l'angle de torsion de la courbe donnée et de l'angle θ qui lui-même est déterminé par l'équa-

tion (4) au moyen de ε et ω. Si l'on fait la somme des carrés de ces relations, on trouve

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i, \tag{13}$$

et si on les divise l'une par l'autre, on obtient

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \sin i. \tag{14}$$

Dans le cas où les trajectoires sont des lignes géodésiques tracées sur la surface développable donnée, les relations (13) et (14) deviennent

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon_1^2, \quad \operatorname{tang} \theta = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse une trajectoire quelconque, et que l'on veuille exprimer ε et ω en fonction de ε_1 et ω_1. L'équation (13) détermine d'abord ω; pour déterminer ε, nous ferons usage de l'équation (4), qui donne

$$\varepsilon = \cot i . \omega \sin \theta + d\theta,$$

ou bien, en vertu de l'équation (12),

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos i + d\theta.$$

D'ailleurs l'angle θ est déterminé par l'équation (14), qui donne, par la différentiation,

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2} \sin i.$$

ou bien, en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\theta}$ par $1 + \operatorname{tang}^2\theta = \frac{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i}{\omega_1^2}$,

$$d\theta = \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i} \sin i.$$

Substituant enfin cette valeur, on trouve pour celle de ε,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos i + \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i} \sin i.$$

7. Nous appliquerons ce qui précède à la détermination des lignes géodésiques de l'héliçoïde développable dont l'arête de rebroussement

est une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit. Nous emploierons, comme plus commode pour la discussion de ces courbes, la méthode exposée au n° 5. Si l'on prend le centre de la base pour origine d'un système d'axes coordonnés rectangulaires dont l'axe des z serait l'axe du cylindre; si, de plus, on fait passer l'axe des x par la trace de l'hélice sur le plan de la base, et qu'on appelle R le rayon du cylindre, a la cotangente de l'angle constant que font les tangentes de l'hélice avec les génératrices du cylindre, on trouvera, pour les équations de cette courbe,

$$x = \mathrm{R}\cos\frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R}\sin\frac{z}{\mathrm{R}a};$$

par suite, les fonctions désignées plus haut par $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sont ici

$$\varphi\alpha = \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}, \quad \psi\alpha = \mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}.$$

Pour appliquer la méthode du n° 5, nous avons besoin de la valeur de ρ dont l'expression est donnée par l'équation (9): or on trouve aisément

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}};$$

par suite,

$$\int\varepsilon \quad \text{ou} \quad \mathrm{E} = \frac{\alpha + \mathrm{C}}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}},$$

et, comme l'on a

$$\theta = \int\varepsilon,$$

on aura aussi

$$\theta = \frac{\alpha + \mathrm{C}}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}}.$$

La valeur de la constante C peut se déduire de la valeur θ_0 que prend θ pour $\alpha = 0$,

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}.\theta_0;$$

par suite,

$$\alpha = \mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}.(\theta - \theta_0).$$

On trouve aussi

$$ds = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,d\alpha = \mathrm{R}(1+a^2)\,d\theta.$$

Portant ces valeurs de E et ds dans l'équation (9), on effectuera immédiatement l'intégration qui y est indiquée, et l'on aura

$$\rho = \frac{1}{\sin\theta}[C'' - R(1 + a^2)\cos\theta].$$

Soit ρ_0 la valeur de ρ répondant à $\alpha = 0$, la valeur de la constante est

$$C'' = \rho_0 \sin\theta_0 + R(1 + a^2)\cos\theta_0,$$

par suite

$$(15) \qquad \rho = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} + \frac{R(1 + a^2)}{\sin\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Avant de nous servir de cette valeur de ρ pour former les équations des lignes géodésiques, il est bon de voir ce qu'elle fait connaître sur la nature de ces courbes.

Si l'on fait croître α à partir de zéro, θ croîtra aussi à partir de $\theta = \theta_0$ et deviendra égal à π pour la valeur

$$\alpha = Ra\sqrt{1 + a^2}(\pi - \theta_0).$$

Or, pour $\theta = \pi$, la quantité ρ devient infinie, et il en résulte que la tangente de l'hélice, au point qui répond à cette valeur de α, est une asymptote de la ligne géodésique. Si, au contraire, on fait décroître α à partir de zéro, θ décroîtra aussi; or, si l'on égale à zéro le numérateur de la valeur de ρ, on trouvera

$$\cos\theta = \cos\theta_0 + \frac{\rho_0 \sin\theta_0}{R(1 + a^2)},$$

valeur qui n'est admissible qu'autant que l'on a

$$\rho_0 \sin\theta_0 + R(1 + a^2)\cos\theta_0 < R(1 + a^2).$$

Supposons cette condition satisfaite: pour cette valeur de θ que j'appelle θ_1 et qui est moindre que θ_0, on aura

$$\alpha = -Ra\sqrt{1 + a^2}(\theta_0 - \theta_1),$$

et la quantité ρ est nulle. Donc la ligne géodésique coupe l'hélice au point qui répond à cette valeur de α. Si l'on fait encore décroître α, ρ sera négatif et deviendra égal à $-\infty$ pour $\theta = 0$, qui répond à

$$\alpha = -Ra\sqrt{1 + a^2}.\theta_0.$$

ce qui montre qu'une partie de la ligne géodésique est située sur la seconde nappe de l'héliçoïde et a pour asymptote la tangente de l'hélice au point déterminé par cette dernière valeur de α. On remarquera que la différence des valeurs de α répondant aux deux asymptotes est égale à $\pi R a \sqrt{1 + a^2}$. Pour les valeurs de θ comprises entre π et 2π, ρ reprend, mais en sens inverse et avec un signe différent, les mêmes valeurs que de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$. En continuant ainsi et concevant que l'on donne à α toutes les valeurs possibles, on voit que la ligne géodésique se compose d'un nombre infini de branches, dont chacune est formée de deux parties situées respectivement sur les deux nappes de l'héliçoïde. Deux branches consécutives ont une asymptote commune, et les diverses branches coupent l'hélice en parties alternativement égales, de telle manière que la différence des distances de deux points de division consécutifs au plan de la base du cylindre est égale tantôt à $2Ra\sqrt{1 + a^2}(\pi - \theta_1)$, tantôt à $2Ra\sqrt{1 + a^2}.\theta_1$ Si la ligne géodésique coupait l'hélice à angle droit, on aurait

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

et il est clair que toutes les parties de l'hélice deviendraient égales. C'est ce qui a lieu pour les développées de l'hélice, qui sont des lignes géodésiques tracées sur un héliçoïde développable dont l'arête de rebroussement est une autre hélice, de même axe et de même pas que la première, mais située sur un cylindre d'un rayon égal à Ra^2. Les équations de la nouvelle hélice se déduiraient de celles de la première en y changeant a en $\frac{1}{a}$. Remplaçant R par Ra^2, a par $\frac{1}{a}$, et θ_1 par $\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $2Ra\sqrt{1 + a^2}\,\theta_1$, on obtient $\pi R\sqrt{1 + a^2}$, pour la différence des distances, au plan de la base du cylindre, de deux points de rencontre consécutifs de la nouvelle hélice et d'une développée quelconque de l'hélice donnée. On en conclut ce résultat connu, que la longueur de chacune des divisions de la nouvelle hélice est égale à $\pi R(1 + a^2)$.

Supposons, en second lieu,

$$\rho_0 \sin\theta_0 + R(1 + a^2)\cos\theta_0 > R(1 + a^2):$$

dans ce cas, ρ ne pouvant devenir nul, la ligne géodésique ne rencontre

pas l'hélice. Mais si l'on égale à zéro la quantité

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{R(1+a^2) - [\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\cos\theta_0]\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

on en déduit

$$\cos\theta = \frac{R(1+a^2)}{\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\cos\theta_0},$$

valeur admissible puisqu'elle est moindre que l'unité, d'après l'hypothèse actuelle. En outre, pour cette valeur de θ, que j'appelle θ_1, on a

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} > 0,$$

ce qui prouve que la valeur de ρ correspondante est un minimum; et ce minimum sera donné par la formule

$$\rho = \sqrt{[\rho_0 \sin\theta_0 - R(1+a^2)\cos\theta_0]^2 - R^2(1+a^2)^2}.$$

Pour des valeurs de θ moindres que θ_1, la quantité ρ restera positive et ira en croissant jusqu'à ∞, ce qui indique l'existence d'une seconde asymptote qui répond à $\theta = 0$. Par où l'on voit qu'aux valeurs de θ, comprises entre 0 et π, répond une branche de la ligne géodésique, située tout entière sur une seule nappe de l'héliçoïde. On voit, en outre, que la courbe se compose d'un nombre infini de branches, situées alternativement sur les deux nappes, et dont deux consécutives ont une asymptote commune.

Déterminons maintenant les équations d'une ligne géodésique quelconque. Nous nous servirons des équations (10) dont les deux premières donnent

$$(16)\quad x - R\cos\frac{\alpha}{Ra} = -\frac{1}{a}\sin\frac{\alpha}{Ra}\cdot(z-\alpha), \qquad y - R\sin\frac{\alpha}{Ra} = \frac{1}{a}\cos\frac{\alpha}{Ra}\cdot(z-\alpha),$$

d'où l'on tire, en éliminant $z - \alpha$,

$$(17)\qquad x\cos\frac{\alpha}{Ra} + y\sin\frac{\alpha}{Ra} = R.$$

Quant à la dernière des équations (10), son second membre devient

$$\frac{(x-\varphi\alpha)^2}{(\varphi'\alpha)^2}[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2] = \left(\frac{x - R\cos\frac{\alpha}{Ra}}{\sin\frac{\alpha}{Ra}}\right)^2 \cdot (1+a^2).$$

Or, si l'on tire de l'équation (17) les valeurs de $\cos\frac{\alpha}{Ra}$, $\sin\frac{\alpha}{Ra}$ en fonction de x, y, on trouvera

$$\frac{x - R\cos\frac{\alpha}{Ra}}{\sin\frac{\alpha}{Ra}} = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}.$$

Par suite, le second membre de la troisième équation (10) deviendra $(x^2 + y^2 - R^2)(1 + a^2)$, et cette équation elle-même deviendra

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\pm\sqrt{1+a^2}\sqrt{x^2+y^2-R^2} \\ &= \frac{\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\left[\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha}{Ra\sqrt{1+a^2}}\right)\right]}{\sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha}{Ra\sqrt{1+a^2}}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, l'élimination de α entre les équations (16) donnera l'équation de l'héliçoïde, sur lequel se trouvent toutes les lignes géodésiques; et l'élimination de α entre (17) et (18) donnera l'équation de la projection sur le plan des x, y, d'une quelconque de ces lignes.

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer ;

PAR J. LIOUVILLE.

SECOND MÉMOIRE.

§ I.

1. Dans mon premier Mémoire [*], je me suis occupé du mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface fixe; et après avoir exposé le principe général de ma méthode, j'en ai fait en particulier l'application au cas du plan, de la sphère, de l'ellipsoïde et de l'héliçoïde gauche. J'ai surtout attaché quelque importance à bien montrer comment la forme même des équations du mouvement d'un point dans un plan conduit par une analyse très-directe à ces coordonnées qu'on nomme *elliptiques*, coordonnées dont l'usage s'étend naturellement ensuite à la sphère et à l'ellipsoïde, et dont nous nous servirons encore dans ce deuxième Mémoire, où nous nous proposons de traiter par une nouvelle méthode les équations du mouvement d'un point libre dans l'espace. La méthode employée dans le premier Mémoire peut sans doute être étendue à divers cas du mouvement d'un point libre. L'extension est même très-facile quand, en exprimant les coordonnées du point mobile à l'aide de trois variables, on peut choisir ces variables de telle manière que l'une d'elles manque à la fois dans la fonction des forces et dans les coefficients des différentielles composant l'expression du carré ds^2 de l'arc parcouru à chaque instant. Alors, en effet, une des équations du mouvement s'intègre de suite; ce qui permet d'éliminer dans les deux autres la différen-

[*] Tome XI de ce Journal, page 345.

telle de la variable qui manque, et ramène en quelque sorte la question au cas du plan. Le problème de l'attraction vers deux ou trois centres fixes, comme l'a considéré Lagrange, est compris dans l'hypothèse que nous venons d'indiquer. Mais quand les trois variables entrent toutes dans la fonction des forces, et mêlées entre elles de façon à ne plus permettre d'intégrer séparément une des équations et d'éliminer une des variables, la marche des calculs devient pénible et embarrassée. Il est bien préférable d'employer alors la nouvelle méthode, qui d'ailleurs comprend tous les résultats que l'autre fournit, en sorte que nous la développerons ici exclusivement. Cette méthode, qui repose sur la considération d'une équation non linéaire aux différences partielles, et dont le point de départ est emprunté à un Mémoire célèbre où M. Jacobi a développé, en la fécondant et en la débarrassant d'inutiles entraves, une idée ingénieuse de M. Hamilton, peut d'ailleurs être aussi employée dans le cas d'un point mobile sur une surface donnée. Mais, pour abréger, nous ne dirons que quelques mots de ce dernier cas.

2. En désignant par U la fonction des forces accélératrices, que nous supposerons indépendante du temps, de manière que le principe des forces vives ait lieu, on a, pour le mouvement d'un point libre rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, les équations différentielles suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dU}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dU}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dU}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or M. Jacobi a démontré (tome III de ce Journal, page 81) que, pour intégrer ces trois équations, il suffit de trouver une fonction Θ de x, y, z, contenant trois constantes arbitraires A, B, C, distinctes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition, et vérifiant identiquement l'équation aux différences partielles

$$(2)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2U + C.$$

La fonction Θ une fois obtenue, les intégrales demandées seront

$$(3)\qquad \frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C'.$$

A', B', C' étant trois constantes arbitraires qui complètent, avec A, B, C, le nombre *six*. En démontrant ce théorème, on obtient aussi les trois équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Theta}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\Theta}{dy}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\Theta}{dz},$$

qui sont du premier ordre et renferment trois constantes arbitraires; en sorte qu'on peut très-bien leur donner, avec M. Hamilton, le nom d'intégrales *intermédiaires*. On en déduit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2(U + C),$$

par où l'on voit que la constante arbitraire C est précisément celle qui entre dans l'équation des forces vives.

Nous trouverons une valeur convenable de Θ, au moins dans un cas très-étendu, en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y, z des coordonnées *elliptiques* ρ, μ, ν, liées aux premières par les formules connues

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

où b et c sont des constantes: nous supposons $b < c$, $\rho > c$, μ compris entre b et c, $\nu^2 < b^2$. De ces équations on tire, sauf à prendre les seconds membres avec des signes convenables,

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\mu\nu}{bc}, \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{cases}$$

ou, si l'on veut, sans ambiguïté :

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\cos\psi}{c}\sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \\ y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,.\sin\psi\cos\varphi, \\ z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,.\dfrac{\sin\varphi\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}}{c}, \end{cases}$$

en posant

$$(7)\qquad \nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Les coordonnées ρ, μ, ν étant substituées aux coordonnées x, y, z dans l'équation (2), nous nous trouverons facilement conduits à ce résultat, qu'on peut former la valeur de Θ et, par suite, intégrer les équations (1) toutes les fois que la valeur de U se ramène à la forme

$$(8)\qquad U = \frac{(\mu^2 - \nu^2)f(\rho) + (\rho^2 - \nu^2)F(\mu) + (\rho^2 - \mu^2)\varpi(\nu)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)},$$

les fonctions f, F, ϖ étant quelconques. Ce théorème, que nous avions déjà énoncé dans notre premier travail [*], sera l'objet principal du présent Mémoire. Mais, pour lui donner toute l'étendue dont il est susceptible, observons que la liaison des équations (1) avec la fonction Θ et l'équation aux différences partielles (2) est purement analytique et tout à fait indépendante de la signification géométrique des variables x, y, z; qu'il en est de même aussi de la substitution des variables ρ, μ, ν à x, y, z; que, par conséquent, les mêmes formules intégrales trouvées pour le cas des coordonnées x, y, z rectangulaires seront encore les intégrales des équations (1) considérées comme appartenant au mouvement d'un mobile sollicité par les forces accélératrices

$$\frac{dU}{dx},\quad \frac{dU}{dy},\quad \frac{dU}{dz},$$

suivant les directions respectives de trois axes obliques Ox, Oy, Oz, la fonction U étant toujours exprimée par la formule (8). Analytique-

[*] Nous en avons depuis indiqué rapidement la démonstration dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1849.

ment parlant, il y a identité entre le problème pour des axes rectangulaires et celui pour des axes obliques, dès que la fonction U est composée de la même manière en x, y, z dans les deux cas. Mais si l'on passe aux détails et à l'interprétation géométrique et mécanique des formules, de grandes différences auront lieu. Cette remarque faite, nous supposerons, pour fixer les idées, les coordonnées x, y, z rectangulaires dans tout ce qui va suivre. Ainsi les équations (4), pour chaque système de valeurs constantes attribuées à ρ, μ, ν, représenteront, comme à l'ordinaire, trois surfaces homofocales du second degré, dont l'intersection s'effectuera à angles droits.

3. Pour démontrer notre théorème, opérons d'abord la transformation de l'équation (2). Comme il s'agit d'une substitution de variables bien connue des lecteurs de ce Journal, je serai bref dans mes explications.

On a d'abord les trois équations

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx}\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\mu}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\mu}{dz} &= 0,\\
\frac{d\rho}{dx}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\nu}{dz} &= 0,\\
\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz} &= 0.
\end{aligned}$$

d'où résulte la perpendicularité des surfaces (ρ), (μ), (ν) entre elles. On trouve ensuite aisément

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 &= \frac{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)},\\
\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 &= \frac{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)},\\
\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 &= \frac{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}.
\end{aligned}$$

Cela étant, si l'on fait, pour abréger,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} &= d\varepsilon,\\
\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} &= d\eta,\\
\frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} &= d\zeta,
\end{aligned}\right.$$

L'équation (2) se transforme en

$$(10)\qquad \frac{(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\rho}\right)^2+(\rho^2-\nu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\mu}\right)^2+(\rho^2-\mu^2)\left(\frac{d\Theta}{d\nu}\right)^2}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2U+C.$$

Mais il est aisé de voir qu'on a identiquement, et quelles que soient les quantités A, B, C, dont nous ferons trois constantes arbitraires

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).A\rho^2+(\rho^2-\nu^2).A\mu^2+(\rho^2-\mu^2).A\nu^2}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=0,$$

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).B\rho^4+(\rho^2-\nu^2).B\mu^4+(\rho^2-\mu^2).B\nu^4}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=0,$$

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).2C\rho^6+(\rho^2-\nu^2).2C\mu^6+(\rho^2-\mu^2).2C\nu^6}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2C.$$

Et il suffit d'ajouter membre à membre ces trois équations et celle-ci

$$\frac{(\mu^2-\nu^2).2f(\rho)+(\rho^2-\nu^2).2F(\mu)+(\rho^2-\mu^2).2\varpi(\nu)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}=2U,$$

qui dérive de la valeur même de U fournie par la formule (8) et que nous adoptons, pour en conclure que l'on vérifiera l'équation (11) en prenant

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho}\right)^2=A+B\rho^2+2C\rho^4+2f(\rho),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\mu}\right)^2=-A-B\mu^2-2C\mu^4+2F(\mu),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\nu}\right)^2=A+B\nu^2+2C\nu^4+2\varpi(\nu).$$

De là on tirera les valeurs des dérivées partielles de Θ relatives à ε, η, $\varkappa$, puis facilement celles des dérivées de Θ relatives à ρ, μ, ν; et comme les valeurs dont il s'agit ne dépendent évidemment que d'une seule variable, savoir, successivement, de ρ, μ ou ν, les conditions d'intégrabilité seront remplies d'elles-mêmes, et l'on pourra former de suite l'expression de Θ avec trois constantes arbitraires A, B, C, dont

on a besoin. Les équations (3) donneront ensuite les intégrales du système différentiel (1). Voici la valeur de Θ :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}\\ &+ \int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu) - A - B\mu^2 - 2C\mu^4}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}\\ &+ \int d\nu \sqrt{\frac{2\varpi(\nu) + A + B\nu^2 + 2C\nu^4}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.\end{aligned}\right.$$

4. Avant de passer aux applications, nous devons encore rappeler quelques formules générales

Soient ds', ds'', ds''' les éléments des trois courbes orthogonales suivant lesquels les surfaces (ρ), (μ), (ν) se coupent en chaque point M de l'espace, ds' étant perpendiculaire à la surface (ρ), ds'' à la surface (μ), ds''' à la surface (ν). On aura

$$ds' = d\rho \sqrt{\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2},$$

$$ds'' = d\mu \sqrt{\left(\frac{dx}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\mu}\right)^2},$$

$$ds''' = d\nu \sqrt{\left(\frac{dx}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\nu}\right)^2},$$

d'où

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} ds' &= d\rho \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},\\ ds'' &= d\mu \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},\\ ds''' &= d\nu \sqrt{\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.\end{aligned}\right.$$

L'élément ds décrit par le mobile pendant le temps dt, et qui a ds', ds'' et ds''' pour projections, s'exprimera par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2},$$

et les cosinus des angles que ds fait avec ds', ds'', ds''' seront respectivement

$$\frac{ds'}{ds}, \quad \frac{ds''}{ds}, \quad \frac{ds'''}{ds}.$$

Ainsi, en désignant par i, i', i'' ces angles, compléments de ceux sous lesquels ds coupe les trois surfaces (ρ), (μ), (ν), nous devons écrire

$$(13) \qquad \cos i = \frac{ds'}{ds}, \quad \cos i' = \frac{ds''}{ds}, \quad \cos i'' = \frac{ds'''}{ds}.$$

Le carré R^2 de la distance du point (x, y, z) ou (ρ, μ, ν) à l'origine O des coordonnées, centre de nos surfaces homofocales, sera fourni indifféremment par l'une ou l'autre des deux formules

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ou

$$R^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2.$$

Enfin, nous ajouterons l'équation des forces vives, mise sous sa forme ordinaire :

$$(14) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(U + C).$$

§ II.

5. Le cas le plus simple est celui où l'on prend $f(\rho) = 0$, $F(\mu) = 0$, $\varpi(\nu) = 0$, d'où $U = 0$. Le mobile alors n'est sollicité par aucune force accélératrice. La valeur de Θ devient

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\mu \sqrt{\frac{A + B\mu^2 + 2C\mu^4}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\nu \sqrt{\frac{A + B\nu^2 + 2C\nu^4}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}};$$

et en posant, pour abréger,

$$\Phi(\rho) = (A + B\rho^2 + 2C\rho^4)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2),$$

on en conclut par les formules (3), ces trois intégrales en ρ, μ, ν, t, qui doivent représenter un mouvement rectiligne uniforme :

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} = 2A', \\ \displaystyle\int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} = 2B', \\ \displaystyle\int \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{\mu^4 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{\nu^4 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} = t + C'. \end{cases}$$

Pour que ces formules donnent un résultat réel, il faut que les deux quantités $\Phi(\rho)$, $\Phi(\mu)$ soient de même signe. Mais les facteurs $(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)$ et $(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)$ sont de signes contraires, le premier étant essentiellement positif, tandis que le second est négatif, la valeur de μ^2 étant comprise entre b^2 et c^2. Donc les deux autres facteurs $A + B\rho^2 + 2C\rho^4$, $A + B\mu^2 + 2C\mu^4$ doivent être aussi de signes opposés, ce qui exige que l'équation

$$A + Bu + 2Cu^2 = 0$$

ait une racine réelle comprise entre ρ^2 et μ^2. La seconde racine est donc aussi réelle, et il est aisé de voir qu'elle est comprise entre μ^2 et ν^2 : cela tient à ce que les deux facteurs $A + B\mu^2 + 2C\mu^4$, $A + B\nu^2 + 2C\nu^4$ doivent aussi être de signes contraires. Les deux racines dont il s'agit étant ainsi positives d'après leurs limites, nous les représenterons, la première et la plus grande, par α^2, la seconde par β^2, et nous aurons

$$A + B\rho^2 + 2C\rho^4 = 2C(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2),$$

$$A + B\mu^2 + 2C\mu^4 = 2C(\mu^2 - \alpha^2)(\mu^2 - \beta^2),$$

$$A + B\nu^2 + 2C\nu^4 = 2C(\nu^2 - \alpha^2)(\nu^2 - \beta^2).$$

Le facteur $\sqrt{2C}$ sera donc commun aux dénominateurs de tous les termes de nos équations ; et en différentiant pour avoir des résultats plus simples, et posant

$$\Delta(\rho^2) = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)},$$

nous trouverons

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \dfrac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \dfrac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\[2ex] \dfrac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \dfrac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \dfrac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\[2ex] \dfrac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \dfrac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \dfrac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = dt\sqrt{2C} \end{cases}$$

Ces équations, où ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du mobile au bout du temps t, doivent convenir, nous l'avons déja dit, à un mouvement rectiligne et uniforme. Elles doivent, en d'autres termes, s'accorder avec les trois équations

$$x = mt + n, \quad y = m't + n', \quad z = m''t + n''$$

d'un tel mouvement. Or, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en ρ, μ, ν, on a, en ρ, μ, ν, t, trois équations algébriques. Les intégrales de nos trois équations différentielles sont donc susceptibles d'une forme algébrique. Les deux premières, qui constituent le cas le plus simple des équations différentielles que M. Jacobi nomme *abéliennes*, ne contiennent pas le temps, et leurs intégrales seront de la forme

$$y = px + q, \quad z = p'x + q'.$$

Ces intégrales se trouvent ainsi représentées géométriquement par une ligne droite, trajectoire du mobile dans la question de dynamique dont nous sommes occupés.

M. Jacobi a indiqué depuis longtemps l'application des coordonnées elliptiques aux équations du mouvement d'un mobile abandonné à lui-même comme propre à conduire, dans le cas du plan, à l'intégrale fondamentale d'Euler pour les fonctions elliptiques, et, dans le cas de l'espace, aux intégrales des équations abéliennes citées. La forme sous laquelle il a mis depuis ces dernières intégrales [*] en les exprimant par deux équations, l'une du premier et l'autre du second degré, entre trois quantités qui reviennent à $\rho^2+\mu^2+\nu^2$, $\rho^2\mu^2+\rho^2\nu^2+\mu^2\nu^2$,

[*] *Voyez* le Journal de M. Crelle, et le tome XI du présent Recueil, page 342.

$\rho^2\mu^2\nu^2$, résulte avec facilité de nos formules

$$y = px + q, \quad z = p'x + q'.$$

En élevant au carré, on a

$$y^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2, \quad z^2 = p'^2x^2 + 2p'q'x + q'^2,$$

d'où

$$p'q'y^2 - pqz^2 = (p^2p'q' - pqp'^2)x^2 + q^2p'q' - pqq'^2.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en ρ, μ, ν que fournissent les formules (5), on aura d'abord l'équation du premier degré entre les quantités dont il s'agit; celle du second degré résultera de

$$(y^2 - p^2x^2 - q^2)^2 = 4p^2q^2x^2.$$

Il y a des résultats analogues pour toutes les classes d'équations abéliennes, comme M. Jacobi l'a encore observé. Mais nous ne nous occupons ici que de la classe la plus simple, et même nous n'avons pas le temps d'insister beaucoup sur ses propriétés [*].

6. Toutefois nous devons donner la signification géométrique des deux constantes α, β introduites tout à l'heure dans nos formules. De là, en effet, découlent, comme nous le montrerons ailleurs, une foule de résultats curieux.

Quand une des variables ρ, μ ou ν devient égale à une des constantes α, β, la différentielle correspondante $d\rho$, $d\mu$ ou $d\nu$ doit s'évanouir comme le radical $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$ ou $\Delta(\nu^2)$ qui lui sert de dénominateur. Soit, par exemple, $\rho = \alpha$, on aura en même temps $d\rho = 0$; par conséquent aussi,

$$ds' = d\rho\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = 0,$$

et, par la première des formules (13),

$$\cos i = \frac{ds'}{ds} = 0.$$

[*] On trouvera quelques développements sur les équations abéliennes à radicaux carrés quelconques dans un Mémoire qui doit faire partie des Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1850.

L'angle i sera donc droit, et la trajectoire (ici rectiligne) du mobile se trouvera, par conséquent, tangente à la surface (ρ). Une conséquence analogue a lieu quand une des variables ρ, μ, ν devient égale à β. Donc la droite parcourue par le mobile est tangente aux deux surfaces (α) (β). On a ainsi ce théorème important :

« Les deux équations différentielles

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \dfrac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \dfrac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \\[2ex] \dfrac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \dfrac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \dfrac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0, \end{cases}$$

» représentent des droites toutes tangentes aux deux surfaces homo-
» focales (α), (β), ou plutôt l'ensemble des droites tangentes à la fois
» à ces deux surfaces. »

Pour bien comprendre cette conclusion, il faut observer que, dans les équations de la trajectoire, on peut regarder comme indépendante une des variables ρ, μ, ν, et, par conséquent, lui donner toutes les valeurs que sa nature comporte, en particulier la valeur α ou la valeur β, si cette valeur α ou β se trouve contenue dans les limites où la variable indépendante doit être renfermée. Si, par exemple, on a $\alpha > c$, on pourra faire $\rho = \alpha$; les deux autres variables μ, ν prendront de certaines valeurs en conséquence de la valeur de ρ, et au point (ρ, μ, ν) ainsi déterminé, il y aura contact entre la trajectoire et la surface (α). De même, on pourrait faire $\mu = \alpha$ si l'on avait $\alpha < c$. La valeur α, quand ρ peut la prendre, est pour cette variable ρ un minimum, tandis que, pour la variable μ, c'est un maximum; car, en introduisant la constante α, nous avons vu qu'elle est essentiellement comprise entre ρ et μ, et, par conséquent, toujours au moins égale à la plus petite μ, et jamais supérieure à la plus grande ρ de ces deux quantités. Il est visible, par cela même, qu'on ne peut jamais prendre $\nu = \alpha$, mais on pourra poser $\nu = \beta$, si β^2 est $< b^2$; tandis qu'il faudra faire $\mu = \beta$, si l'on a $\beta^2 > b^2$. Dans aucun cas, on ne pourra poser $\rho = \beta$. La valeur β^2 sera pour μ^2 un minimum, et pour ν^2 un maximum. En analyse, chacune des deux équations que l'on obtient en égalant ainsi une des variables ρ, μ, ν à α ou à β est une solution particulière de ces équations différentielles. Cette solution représente une surface, qui

naturellement est tangente aux droites représentées par les intégrales générales.

7. On peut donner à nos équations différentielles diverses formes. Et d'abord la dernière des équations (16), savoir,

$$\frac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)} = dt\sqrt{2C},$$

fournit la valeur de ds; car, à cause de $U = 0$, l'équation des forces vives se réduit à

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2C, \quad ds = dt\sqrt{2C}.$$

Ainsi nous avons

$$(18) \qquad ds = \frac{\rho^4 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^4 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^4 d\nu}{\Delta(\nu^2)}.$$

Mais, en ajoutant à cette équation les deux autres

$$0 = \frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

$$0 = \frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

multipliées respectivement par les facteurs $\mu^2\nu^2$ et $-(\mu^2+\nu^2)$, il vient

$$ds = \frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)\,d\rho}{\Delta(\rho^2)}.$$

Or on a

$$\Delta(\rho^2) = \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)},$$

et, d'après les formules du n° 4, i étant le complément de l'angle sous lequel ds coupe la surface (ρ),

$$ds' = d\rho\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = \cos i\, ds,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} = \frac{\cos i\, ds}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}.$$

En substituant donc dans l'expression précédente de ds, on en tire

sans difficulté

$$\cos i = \frac{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}\ [*].$$

De là ce groupe de formules

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos^2 i = \dfrac{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}, \\ \cos^2 i' = \dfrac{(\alpha^2-\mu^2)(\mu^2-\beta^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}, \\ \cos^2 i'' = \dfrac{(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}, \end{cases}$$

où i, i', i'' sont, je le répète, les angles que l'élément ds fait avec les trois normales aux surfaces (ρ), (μ), (ν) passant par le point (ρ, μ, ν) de cet élément, ou, si l'on veut, les compléments des angles qu'une droite tangente aux deux surfaces homofocales (α), (β) fait en chaque point de l'espace avec les surfaces (ρ), (μ), (ν) qui passent par ce point. Je me propose de donner dans un autre Mémoire une démonstration directe et simple de ces formules. On voit que, quand une des variables ρ, μ, ν devient égale à une des constantes α, β, le cosinus d'un des angles i, i', i'' devient nul; cet angle est donc droit, son complément égal à o, et, par suite, ds touche une des surfaces (ρ), (μ), (ν). Si, par exemple, $\rho = \alpha$, il vient $\cos i = 0$; l'angle i est donc droit, et l'élément ds est

[*] La perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde (ρ) sur le plan tangent à cet ellipsoïde au point (ρ, μ, ν) est exprimée par

$$P = \frac{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}.$$

Donc la valeur de

$$\frac{P}{\cos i} = \frac{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}$$

est indépendante de μ et de ν. Cela donne lieu à un théorème de géométrie dont l'énoncé deviendra assez élégant en observant que $\frac{P}{\cos i}$ est la portion de droite partant du point (ρ, μ, ν) et tangente aux deux surfaces (α), (β), qui est comprise entre ce point et le plan diamétral de l'ellipsoïde (ρ) parallèle au plan tangent. La grandeur de cette portion de droite reste, comme on voit, constante pour tous les points d'un même ellipsoïde.

tangent à la surface (ρ) : ce qui s'accorde avec les résultats obtenus ci-dessus. Mais nos dernières formules sont peut-être plus nettes et plus précises encore. On y voit tout de suite que la droite décrite par le mobile, qu'une droite quelconque par conséquent, touche deux des surfaces (ρ), (μ), (ν), et n'en touche que deux. Il peut arriver que ces deux surfaces à la fois soient des hyperboloïdes à une nappe, qui même se confondront en un seul, si la droite coïncide avec une de leurs génératrices. Mais jamais ce ne sont deux hyperboloïdes à deux nappes, ni deux ellipsoïdes.

8. Des formules (19), qui vérifient, comme cela devait être, l'équation de condition

$$\cos^2 i + \cos^2 i' + \cos^2 i'' = 1,$$

on tire, en outre, aisément

$$(20)\qquad \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0,$$

$$(21)\qquad \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \beta^2} = 0.$$

Les équations (20) et (21) ont été données par M. Chasles avec la signification que nous leur trouvons ici, à savoir, comme appartenant à une droite tangente aux deux surfaces homofocales (α), (β); et de là, comme nous l'avons déjà dit à la page 255 du présent volume, M. Chasles aurait pu déduire les intégrales algébriques des équations abéliennes (17). Cette déduction est très-facile, et nous aurons occasion de l'opérer une autre fois : on peut partir, pour cela, des équations (19), auxquelles les équations (20) et (21) se ramènent de suite en ayant égard à la relation $\cos^2 i + \cos^2 i' + \cos^2 i'' = 1$ et éliminant tour à tour deux des cosinus.

Pour le moment, démontrons, ce que l'on sait déjà par le Mémoire de M. Chasles, que chacune des équations (20), (21), considérée isolément, convient à toutes les génératrices d'un cône : l'équation (20), par exemple, représente en ce sens le cône formé par toutes les droites qui passent par le point (ρ, μ, ν) et vont toucher la surface (α). Et, en effet, une quelconque de ces droites qui touchent la surface (α) touche aussi une seconde surface (β) dont le paramètre varie d'ailleurs d'une

droite à l'autre : c'est, en effet, une proposition connue de géométrie, et d'ailleurs c'est un fait résultant de nos discussions antérieures, qu'une droite quelconque est toujours tangente à deux de nos surfaces homofocales. Cela étant, on a, pour cette droite, les deux équations (20), (21), et, en particulier, l'équation (26) ; donc l'équation (20) convient en effet à toutes les droites de la même espèce, c'est-à-dire à toutes les génératrices du cône dont le sommet est au point (ρ, μ, ν), et qui enveloppe la surface (α).

On voit que M. Chasles a suivi une marche inverse de la notre : il démontre d'abord que chacune des équations (20), (21) représente un cône ayant son sommet au point (ρ, μ, ν), puis il en conclut que toutes deux appartiennent à une droite, intersection de ces deux cônes.

9. Un point (ρ, μ, ν) ou M étant donné, c'est donc par l'intersection de deux cônes du second degré que l'on obtiendra les droites qui, partant de ce point, sont des tangentes communes aux deux surfaces homofocales (α), (β). Ces droites seront ainsi généralement au nombre de quatre. Et, en effet, les formules (19) fournissent, pour chacune des quantités $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$, deux valeurs égales et de signes contraires, d'où huit combinaisons qui ne répondent qu'à quatre droites distinctes, parce que deux combinaisons à signes partout opposés appartiennent à une seule et même droite prolongée dans les deux sens. Toutefois, pour que les angles i, i', i'' soient réels, il faut que les seconds membres des équations (19) soient positifs et < 1. Mais, cette condition remplie, on construira sans peine les droites demandées. Il y a, du reste, entre ces droites, une liaison simple qui permet, quand l'une d'elles est connue, d'en déduire immédiatement les trois autres. Soient, en effet, MN, MP, MQ les normales aux surfaces (ρ), (μ), (ν) relatives au point M, et MA, MB, MC, MD les quatre droites prises toutes d'un même côté du plan PMQ, de manière à faire avec MN des angles aigus. Ces angles seront, dès lors, égaux entre eux, puisque la valeur (essentiellement positive, d'après notre hypothèse) de chaque cosinus sera fournie par la formule unique

$$\cos i = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\nu^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}.$$

Quant aux angles de MA, MB, MC, MD avec MP, leurs cosinus seront égaux, abstraction faite du signe; par suite, il en sera de même des cosinus des angles que font avec la même normale MP les projections MA′, MB′, MC′, MD′ de MA, MB, MC, MD sur le plan PMQ. Cela résulte de la formule

$$\cos A'MP = \frac{\cos AMP}{\sin AMN},$$

qui, par le changement successif de A en B, en C et en D, donne ces derniers angles sans que le second membre change de valeur. Les angles A′MP, B′MP, C′MP, D′MP sont donc, ou égaux entre eux, ou supplémentaires. Donc les droites MA′, MB′, MC′, MD′ sont deux à deux le prolongement l'une de l'autre : MB′, par exemple, sera le prolongement de MA′, et MD′ celui de MC′. Dans l'espace, les droites MA et MB sont donc situées dans un même plan avec la normale MN, sur laquelle elles sont d'ailleurs inclinées également. En d'autres termes, si la droite MA est la direction d'un rayon de lumière incident, MB sera la direction du rayon réfléchi sur la surface (ρ). Il y a entre MC et MD une liaison semblable. Mais on fera naître encore ces deux dernières droites de la seule droite MA, en considérant les rayons réfléchis sur les deux autres surfaces (μ), (ν). Ainsi, une des quatre droites MA, MB, MC, MD étant donnée, on en déduira les trois autres, en regardant la droite donnée comme un rayon incident, et les trois autres comme des rayons réfléchis sur les trois surfaces (ρ), (μ), (ν).

Nous pourrions à présent suivre la marche d'un rayon de lumière successivement réfléchi en divers points d'un ellipsoïde (ρ), ou même en divers points de plusieurs surfaces homofocales à volonté. Dans toutes ses directions, ce rayon restera tangent aux deux surfaces fixes (α), (β). On voit assez les conséquences qui en résultent pour certaines questions de maximum ou de minimum, et j'ajoute que cela conduit facilement à la belle propriété donnée par M. Chasles (tome XI de ce Journal, page 11) pour les tangentes des lignes géodésiques des surfaces du second degré. Mais qu'il nous suffise ici d'avoir établi nettement la dépendance réciproque qui lie entre elles, d'une manière si remarquable, les droites MA, MB, MC, MD.

Si le point M était situé sur une des surfaces (α), (β), le cône cir-

conserit à cette surface se réduirait à un plan, et ne pourrait couper l'autre cône que suivant deux droites, qui même se réduiraient à une seule si le point M se trouvait à la fois sur les deux surfaces (α), (β). Il est aisé de voir et je ne m'arrête pas à montrer comment ces cas particuliers résultent du cas général, deux ou plusieurs des droites MA, MB, MC, MD venant alors à coincider entre elles.

Revenons au cas général, et désignons par A, B, C, D les points où un plan mené perpendiculairement à la normale MN, par un point N pris à volonté sur cette normale, coupe nos quatre droites MA, MB, MC, MD. On conclura facilement de ce qui a été dit plus haut, que les deux droites AB, CD passent par le point N, et que, de plus, ce point est le milieu de l'une et de l'autre. Donc le point N est le centre commun des deux coniques qui passent par les quatre points A, B, C, D, soit sur le cône tangent à la surface (α), soit sur le cône tangent à la surface (β). Il suit de là que MN est un axe principal pour l'un et pour l'autre de ces cônes; MP et MQ sont évidemment les deux autres axes, et nous retrouvons un théorème connu.

On démontrera d'une autre manière et l'on complétera ces résultats en cherchant les équations de nos deux cônes, rapportées aux trois axes rectangulaires MN, MP, MQ. En effet, soient x, y, z les coordonnées, relatives à ces axes, d'un point quelconque de la génératrice qui fait avec MN, MP, MQ les angles i, i', i''. On aura

$$\cos i = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos i' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos i'' = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Les équations demandées seront donc

$$\frac{x^2}{\rho^2-\alpha^2} + \frac{y^2}{\mu^2-\alpha^2} + \frac{z^2}{\nu^2-\alpha^2} = 0,$$

et

$$\frac{x^2}{\rho^2-\beta^2} + \frac{y^2}{\mu^2-\beta^2} + \frac{z^2}{\nu^2-\beta^2} = 0.$$

Or ces équations montrent de suite que les axes actuels de coordonnées, MN, MP, MQ, sont précisément les axes principaux de nos deux cônes; elles prouvent, de plus, que ces cônes ont mêmes lignes

focales [*], et, par conséquent, se coupent à angle droit; enfin, on en conclut sans peine la liaison de position des quatre droites d'intersection MA, MB, MC, MD.

10. Les quatre espèces différentes de droites tangentes aux deux surfaces (α), (β) qu'on peut mener, en général, par chaque point (ρ, μ, ν) de l'espace, expliquent le caractère multiple des équations (17), que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} \pm \frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} \pm \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0,$$

$$\frac{\rho^2\, d\rho}{\Delta(\rho^2)} \pm \frac{\mu^2\, d\mu}{\Delta(\mu^2)} \pm \frac{\nu^2\, d\nu}{\Delta(\nu^2)} = 0,$$

et qui offrent, par conséquent, quatre combinaisons de signes.

Pour avoir l'équation précise d'une droite, il faudra donc déterminer par une discussion spéciale les signes qu'on doit prendre au point de départ pour les radicaux contenus dans les équations (17). Mais il importe de remarquer que si l'on marche le long de cette droite, toujours dans le même sens, le signe de chaque radical $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$, ou $\Delta(\nu^2)$, devra changer au moment où ce radical s'évanouit. En effet, des équations (17) on tire

$$(\rho^2 - \mu^2)\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} = (\mu^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

$$(\rho^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)} = -(\rho^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}.$$

Comme on a $\rho^2 > \mu^2 > \nu^2$, il s'ensuit que les trois quantités

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)}, \quad -\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)}, \quad \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}$$

doivent toujours être de même signe. On voit encore que quand un radical s'évanouit, la différentielle correspondante s'évanouit aussi,

---

[*] Les lignes focales communes sont, comme on sait, les deux génératrices de l'hyperboloïde (μ) qui passent par le point M.

et *vice versâ*. Il est clair, d'ailleurs, qu'un radical ne peut s'évanouir que pour les valeurs α^2, β^2, b^2 ou c^2 des variables ρ^2, μ^2, ou ν^2, qui deviennent alors un maximum ou un minimum. Maintenant supposons, pour fixer les idées (car dans les différents cas la discussion est la même), qu'au moment où l'on commence à marcher sur la droite, les trois quantités ρ, μ, ν aillent à la fois en augmentant, en sorte que les différentielles $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$ soient alors toutes trois positives. Il faudra prendre $\Delta(\rho^2)$ et $\Delta(\nu^2)$ avec le même signe, tous deux positivement si l'on veut, et $\Delta(\mu^2)$ avec un signe contraire ou négativement. Mais que plus tard un des radicaux $\Delta(\rho^2)$, $\Delta(\mu^2)$, $\Delta(\nu^2)$ vienne à s'évanouir. Nous venons de faire observer que la valeur α^2, β^2, b^2 ou c^2, de ρ^2, μ^2, ou ν^2, pour laquelle cela arrive, est un maximum ou un minimum; la différentielle correspondante $d\rho$, $d\mu$ ou $d\nu$ va donc se réduire à zéro, puis changer de signe. Mais les signes de deux des rapports

$$\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)}, \quad -\frac{d\mu}{\Delta(\mu^2)}, \quad \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)},$$

restant les mêmes, celui du troisième rapport doit aussi se conserver. Donc le radical placé sous la différentielle qui change de signe doit comme elle changer de signe en s'évanouissant.

11. Ce qui précède suffira, je crois, pour la discussion des signes de nos radicaux dans les formules (17), discussion qu'il est d'ailleurs facile d'étendre à la formule (18), liée naturellement aux deux autres. Je passerai donc à un autre sujet en donnant une transformation de la valeur de ds que fournit la formule (18). A cause des équations (17), la formule (18) donne évidemment

$$\begin{aligned} ds = {} & \frac{\rho^4 - (\alpha^2+\beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\rho^2)}\,d\rho \\ & + \frac{\mu^4 - (\alpha^2+\beta^2)\mu^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\mu^2)}\,d\mu \\ & + \frac{\nu^4 - (\alpha^2+\beta^2)\nu^2 + \alpha^2\beta^2}{\Delta(\nu^2)}\,d\nu. \end{aligned}$$

En effet, l'ensemble des termes affectés du facteur $\alpha^2+\beta^2$, ou du facteur $\alpha^2\beta^2$, présente une somme nulle, en vertu des équations (17), ce qui fait retomber immédiatement sur la formule (18).

Mais on a

$$\rho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta^2 = (\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)$$

et

$$\Delta(\rho^2) = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}.$$

La fraction

$$\frac{\rho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\rho^2 + \alpha^2\beta}{\Delta(\rho^2)}$$

est donc égale à

$$\frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Les autres termes contenus dans la valeur précédente de ds sont susceptibles d'une modification du même genre. On a donc finalement

$$(22)\quad ds = d\rho\,\frac{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)(\rho^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} + d\mu\,\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} + d\nu\,\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

La formule (22) peut se démontrer d'une autre manière, en observant que ds est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont ds', ds'' et ds''' sont les côtés. Cette diagonale vaut la somme des projections des trois côtés sur sa direction. Donc

$$ds = \cos i\, ds' + \cos i'\, ds'' + \cos i''\, ds'''.$$

En mettant pour ds', ds'', ds''', et $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$, leurs valeurs, on retrouve la formule (22). Cette manière d'y parvenir indique bien quels signes on doit donner aux coefficients des différentielles pour avoir la valeur absolue de ds. En effet, la valeur absolue de ds doit être la somme des valeurs absolues des projections de ds', ds'', ds''': les trois termes qui la composent doivent donc être pris positivement, et, par conséquent, le coefficient de chaque différentielle dans la formule (22) doit être pris avec le signe même de cette différentielle.

12. Enfin la formule (22) conduit à une dernière forme des équations (17), laquelle est très-utile dans un grand nombre de cas.

Posons

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2g, \quad \alpha^2\beta^2 = 2h.$$

et nous aurons

$$ds = d\rho\sqrt{\frac{\rho^4 - 2g\rho^2 + 2h}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} + d\mu\sqrt{\frac{\mu^4 - 2g\mu^2 + 2h}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}} + d\nu\sqrt{\frac{\nu^4 - 2g\nu^2 + 2h}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}}.$$

Maintenant attribuons aux paramètres g, h des variations infiniment petites, la variation correspondante de ds sera, comme il est aisé de le voir,

$$\left(\frac{d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\Delta(\nu^2)}\right)\delta h$$
$$- \left(\frac{\rho^2 d\rho}{\Delta(\rho^2)} + \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta(\mu^2)} + \frac{\nu^2 d\nu}{\Delta(\nu^2)}\right)\delta g;$$

elle sera donc nulle à cause des équations (17); et réciproquement, on retrouvera ces équations en posant

$$\delta ds = 0,$$

la variation étant relative aux paramètres g et h, ou, ce qui revient au même, aux paramètres α et β considérés comme indépendants l'un de l'autre. Les équations (17) sont ainsi remplacées par la seule équation

$$\delta ds = 0, \tag{23}$$

ou, si on l'aime mieux, par les deux équations

$$\frac{\delta ds}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\delta ds}{\partial\beta} = 0\,[*]. \tag{24}$$

Dans certaines questions de *maxima* et *minima*, ces équations abrègent beaucoup le calcul. Déjà au n° 9 nous avons indiqué un théorème qui peut servir de base à une méthode synthétique pour de telles questions. La méthode analytique dont nous parlons maintenant, plus directe d'ailleurs, surtout plus générale, devient tout aussi simple, grâce à l'emploi des équations (24). Mais nous n'ajouterons, pour le moment, aucun détail à ce sujet, nous réservant d'y revenir dans un autre Mé-

[*] Dans notre premier Mémoire, nous avons déjà trouvé une équation du même genre, $\delta ds = 0$, pour nos lignes géodésiques, et, dans le cas particulier d'une surface plane, pour la ligne droite elle-même.

moire, ainsi que sur les développements géométriques auxquels peuvent donner lieu toutes les formules de ce paragraphe[*].

13. On est conduit à un problème de Dynamique qui peut aussi fournir un texte intéressant à la Géométrie, en prenant dans les formules du § I :

$$f(\rho) = k[\rho^6 - (b^2 + c^2)\rho^4],$$
$$F(\mu) = -k[\mu^6 - (b^2 + c^2)\mu^4],$$
$$\varpi(\nu) = k[\nu^6 - (b^2 + c^2)\nu^4],$$

k étant une constante. Il vient alors

$$U = k(\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2),$$

c'est-à-dire

$$U = kR^2.$$

R étant la distance du mobile à l'origine des coordonnées. D'après la valeur de la fonction des forces telle que je viens de l'écrire, le mouvement sera celui d'un point matériel attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance. Les diverses trajectoires que l'on obtiendra suivant les circonstances initiales et la valeur de k seront donc des coniques concentriques. Or les formules du § I donneront, pour représenter ces coniques, des équations transcendantes. La comparaison des résultats fournira ici, comme dans le cas de la ligne droite, des conséquences utiles sur lesquelles je ne veux pas insister.

§ III.

14. Dans certains cas particuliers, tels que ceux de $c = b$, ou de $b = 0$, par exemple, nos formules générales du § I ne peuvent être appliquées qu'après une transformation préliminaire.

---

[*] Le travail que nous annonçons, et qui doit au reste rouler sur des questions très-diverses, portera ce titre : *Recherches de Géométrie analytique*. Nous y parlerons aussi des propriétés des coniques homofocales dans le plan, et des lignes de différente nature qu'on peut tracer sur l'ellipsoïde, principalement des lignes géodésiques et des lignes de courbure, sujet fécond dont on est encore bien loin d'avoir approfondi tous les détails.

Considérons d'abord le cas de $c = b$; et, pour y préparer les formules, introduisons au lieu de la variable μ l'angle φ, qui est lié à μ par l'équation

$$\mu = \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Faisons, en d'autres termes,

$$x = \frac{\rho\nu}{bc}\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi,$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c} \sin \varphi.$$

Si nous posons

$$F(\mu) = F(\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}) = \Phi(\varphi),$$

$\Phi(\varphi)$ sera une fonction quelconque de φ, comme $F(\mu)$ étant une fonction quelconque de μ; et la valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit, s'écrira

$$U = \frac{(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - \nu^2) f(\rho) + (\rho^2 - \nu)\Phi(\varphi) + (\rho^2 - c^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)\varpi(\nu)}{(\rho^2 - c^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)(\rho^2 - \nu^2)(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - \nu^2)}.$$

Enfin la fonction Θ dont cette méthode dépend, qui conduit aux intégrales (3), et que la formule (11) fournit, s'exprimera par

$$\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \\ &- \int d\varphi \sqrt{\frac{2\Phi(\varphi) - A - B(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) - 2C(c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2}{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ &+ \int d\nu \sqrt{\frac{2\varpi(\nu) + A + B\nu^2 + 2C\nu^4}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.\end{aligned}$$

Jusqu'ici les constantes b et c sont restées quelconques et sans liaison nécessaire entre elles. Mais soit à présent $c = b$. Il nous viendra

$$(25) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\nu}{b}, \\ y = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi, \\ z = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \sin \varphi. \end{cases}$$

Or ces équations donnent d'abord

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z}{y},$$

en sorte que φ désigne l'angle que fait avec l'axe des y la trace du plan qui passe par le point (x, y, z) et par l'axe des x sur le plan des yz. On en tire aussi

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2+z^2}{\rho^2-b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2-\nu^2} = 1.$$

Ce sont (en regardant ρ et ν comme des paramètres) les équations de deux surfaces du second degré homofocales et de révolution autour de l'axe des x. La première de ces surfaces est un ellipsoïde; la seconde un hyperboloïde à deux nappes. L'ancien hyperboloïde à une nappe, qui répondait à $\mu = constante$, est remplacé, comme on voit, par un plan méridien de ces deux surfaces de révolution, qui répond à $\varphi = constante$.

Pour chaque valeur donnée de φ, et en faisant varier ρ et ν, on a successivement tous les points du plan méridien relatif à la valeur donnée de φ; ρ et ν sont, dans ce plan, des coordonnées elliptiques toutes semblables à celles dont nous nous sommes servis dans notre premier Mémoire. Les foyers constants des ellipses et des hyperboles employées pour ce système de coordonnées sont situés sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à b; ils restent donc les mêmes, quel que soit le plan méridien que l'on considère et où se trouve le mobile. Nous les désignerons par F et F'. Les distances du mobile à ces deux points seront représentées à chaque instant par $\rho + \nu$ et $\rho - \nu$. Il est bon d'observer que les foyers F, F' de nos coniques dans chaque plan méridien sont en même temps ceux de toutes les surfaces de révolution (ρ) et (ν).

La valeur de U, pour laquelle notre méthode d'intégration réussit dans ce cas de $c = b$, est

$$(26) \qquad U = \frac{(b^2-\nu^2)f(\rho) + (\rho^2-\nu^2)\varpi(\rho) + (\rho^2-b^2)\varpi(\nu)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)},$$

et l'on a, pour la valeur de Θ correspondante,

$$\Theta = \int \frac{d\rho}{\rho^2 - b} \sqrt{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}$$

$$- \int \frac{d\varphi}{b} \sqrt{2\mathcal{F}(\varphi) - A - Bb^2 - 2Cb^4}$$

$$+ \int \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \sqrt{2\varpi(\nu) + A + B\nu^2 + 2C\nu^4}.$$

Mais puisque sous le second radical les constantes A, B, C n'entrent que dans la quantité $A + Bb^2 + 2Cb^4$, où ne figure aucune variable, il est naturel de prendre pour constante cette quantité que nous représenterons par $-\lambda$; elle remplacera, par exemple, l'ancienne constante A que nous chasserons au moyen de l'équation

$$A = -\lambda - Bb^2 - 2Cb^4.$$

Il nous viendra ainsi

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta = &\int \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2} \sqrt{2f(\rho) - \lambda + B(\rho^2 - b^2) + 2C(\rho^4 - b^4)} \\ &- \int \frac{d\varphi}{b} \sqrt{2\mathcal{F}(\varphi) + \lambda} \\ &+ \int \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \sqrt{2\varpi(\nu) - \lambda + B(\nu^2 - b^2) + 2C(\nu^4 - b^4)}; \end{aligned}\right.$$

et c'est de cette valeur de Θ que nous déduirons nos intégrales au moyen des équations

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \lambda', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C'.$$

On peut observer en passant que la première de ces trois intégrales est la seule dans laquelle la variable φ, et, par conséquent, la fonction $\mathcal{F}(\varphi)$, puissent se trouver. La seconde donnera donc la valeur de ρ en ν, et la troisième celle de t en ρ et ν, indépendamment de la première; et les valeurs de ρ et t ainsi formées ne dépendront en aucune manière de la fonction arbitraire $\mathcal{F}(\varphi)$. Dans un Mémoire intitulé *De motu puncti singularis*, M. Jacobi a déjà rencontré un cas particulier de cette

proposition dont on voit ici la cause et l'origine générale, et que plus tard nous retrouverons encore dans une autre question.

15. Quand on pose

$$\mathcal{F}(\varphi) = 0,$$

la valeur de U du numéro précédent se simplifie, et quoiqu'elle perde ainsi beaucoup de sa généralité, elle renferme pourtant encore, comme cas très-particulier, le cas d'un point mobile attiré par trois centres fixes, tel que Lagrange l'a traité. En faisant, pour abréger,

$$\frac{f(\rho)}{\rho^2 - b^2} = \mathrm{f}(\rho), \qquad \frac{\varpi(\nu)}{b^2 - \nu^2} = -\Pi(\nu),$$

la valeur de U dont nous parlons devient alors

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\rho) - \Pi(\nu)}{\rho^2 - \nu^2},$$

et se trouve ainsi toute semblable à celle qui s'est présentée dans notre premier Mémoire comme remplissant les conditions d'intégrabilité. On en déduira donc encore le cas des trois centres fixes en prenant

$$\mathrm{f}(\rho) = g\rho + g'\rho + k(\rho^4 - b^2\rho^2),$$
$$\Pi(\nu) = g\nu - g'\nu + k(\nu^4 - b^2\nu^2),$$

g, g', k étant des constantes. De là résulte, en effet,

$$\mathrm{U} = \frac{g}{\rho + \nu} + \frac{g'}{\rho - \nu} + k(\rho^2 + \nu^2 - b^2).$$

Mais en représentant par r, r' et R les distances du point mobile aux deux foyers fixes F, F′ de nos surfaces homofocales (ρ), (ν) et à leur centre O, on a

$$r = \rho + \nu, \quad r' = \rho - \nu, \quad \mathrm{R}^2 = \rho^2 + \nu^2 - b^2.$$

Donc

$$\mathrm{U} = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + k\mathrm{R}^2.$$

C'est bien là l'expression de la fonction des forces pour le problème des trois centres fixes.

16. Revenons aux formules (25), (26) et (27) qui conviennent au cas de $c = b$, b étant quelconque, et voyons ce qu'elles donnent lorsqu'on prend $b = 0$. Pour cela, posons d'abord

$$\nu = b \cos \psi.$$

Les valeurs de x, y, z qui étaient, d'après les formules (25),

$$x = \frac{\rho\nu}{b}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \cos \varphi, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b} \sin \varphi$$

deviendront

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sin \psi \cos \varphi, \quad z = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sin \psi \sin \varphi,$$

et, pour $b = 0$, elles se réduiront à

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \psi \sin \varphi.$$

Ainsi ρ, φ, ψ seront les coordonnées polaires ordinaires à trois dimensions. Mais pour que les formules (26) et (27) se prêtent bien à l'hypothèse de $b = 0$, il convient, après y avoir fait $\nu = b \cos \psi$, de remplacer $\mathcal{F}(\varphi)$ par $b^2 \mathcal{F}(\varphi)$, $\mathcal{A}$ par b^2, et enfin $\varpi(\nu)$, qui est une fonction quelconque de ν, par une fonction quelconque de ψ telle que $b^2 \Pi(\psi)$. Nous aurons de la sorte

$$U = \frac{\sin^2\psi f(\rho) + (\rho^2 - b^2 \cos^2 \psi) \mathcal{F}(\varphi) + (\rho^2 - b^2) \Pi(\psi)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - b^2 \cos^2 \psi) \sin^2 \psi}$$

et

$$\begin{aligned}\Theta = &\int \frac{d\rho}{\rho^2 - b^2} \sqrt{2f(\rho) - \mathcal{A}b^2 + B(\rho^2 - b^2) + 2C(\rho^4 - b^4)} \\ &- \int d\varphi \sqrt{2\mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{A}} \\ &- \int \frac{d\psi}{\sin \psi} \sqrt{2\Pi(\psi) - \mathcal{A} - B \sin^2 \psi - 2Cb^2 \sin^2 \psi (1 + \cos^2 \psi)}.\end{aligned}$$

De là, pour $b = 0$,

$$(28) \qquad U = \frac{\sin^2 \psi f(\rho) + \rho^2 \mathcal{F}(\varphi) + \rho^2 \Pi(\psi)}{\rho^4 \sin^2 \psi}$$

et

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Theta &= \int \frac{d\rho}{\rho^2}\sqrt{2f(\rho) + B\rho^2 + 2C\rho^4} \\
&- \int d\varphi \sqrt{2\Phi(\varphi) + \mathcal{A}} \\
&- \int \frac{d\psi}{\sin\psi}\sqrt{2\Pi(\psi) - \mathcal{A} - B\sin^2\psi}.
\end{aligned}
\right.
$$

En faisant

$$f(\rho) = \rho^4 \mathrm{f}(\rho),$$

la valeur de U prendrait cette forme plus simple encore,

$$(30)\quad \mathrm{U} = \mathrm{f}(\rho) + \frac{\Phi(\varphi) + \Pi(\psi)}{\rho^2 \sin^2\psi}.$$

17. Voyons à présent ce que deviennent les formules générales du § I lorsqu'on y prend $b = 0$, mais en laissant cette fois c quelconque. Conservons ρ et μ, mais remplaçons ν par une autre variable. Pour cela, employons la première des formules (7), c'est-à-dire posons

$$\nu = b\cos\psi,$$

et substituons partout la variable ψ à la variable ν, ce qui nous donnera

$$x = \frac{\rho\mu}{c}\cos\psi,$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}\sin\psi.$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}.$$

Alors, en faisant

$$\varpi(\nu) = \Pi(\psi),$$

la valeur de U fournie par la formule (8), c'est-à-dire la valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit, s'écrira

$$\mathrm{U} = \frac{(\mu^2 - b^2\cos^2\psi)f(\rho) + (\rho^2 - b^2\cos^2\psi)\mathrm{F}(\mu) + (\rho^2 - \mu^2)\Pi(\psi)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - b^2\cos^2\psi)(\mu^2 - b^2\cos^2\psi)}.$$

Enfin, la fonction Θ, dont cette méthode dépend et que la formule (11) donne, s'exprimera ici par

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu) - A - B\mu^2 - 2C\mu}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}$$
$$- \int d\psi \sqrt{\frac{2H(\psi) + A + Bb^2\cos^2\psi + 2Cb\cos\psi}{c^2 - b^2\cos^2\psi}}.$$

Jusqu'ici la constante b est restée quelconque, et nos formules ont conservé toute leur généralité. Mais soit à présent $b = 0$. Nous trouverons

$$(31)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\mu}{c}\cos\psi, \\ y = \dfrac{\rho\mu}{c}\sin\psi, \\ z = \dfrac{1}{c}\sqrt{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}. \end{cases}$$

Or ces équations donnent d'abord

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x},$$

en sorte que ψ désigne l'angle que fait avec l'axe des x la trace du plan qui passe par le point (x, y, z) et par l'axe des z sur le plan des xy. On en tire aussi

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2 + y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1.$$

Ce sont les équations de deux surfaces homofocales et de révolution autour de l'axe des z : la première est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe. L'ancien hyperboloïde à deux nappes, qui répondait à $\nu =$ *constante*, est remplacé, comme on voit, par un plan méridien de ces deux surfaces de révolution, qui répond à $\psi =$ *constante*.

Pour chaque valeur donnée de ψ, et en faisant varier ρ et μ, on a successivement tous les points du plan méridien qui correspond à la

valeur de ψ; ρ et μ sont, dans ce plan, les coordonnées elliptiques que nous avons employées dans notre premier Mémoire, et $\rho + \mu$, $\rho - \mu$ représentent les distances d'un point M ou (ρ, μ) de ce plan, par conséquent, du point (ρ, μ, ψ) de l'espace, aux deux foyers F, F′ des coniques qui constituent ce système de coordonnées. Mais ici les foyers F, F′ ne sont pas des points absolument fixes et indépendants de la position du mobile. Ils sont, en effet, situés sur la trace du plan méridien dans le plan des xy, à une distance de l'origine toujours égale à c, et changent, par conséquent, avec ce plan méridien, mais en restant cependant sur un cercle de rayon c.

La valeur de U pour laquelle notre méthode d'intégration réussit dans ce cas de $b = 0$, c quelconque, est

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{H(\psi)}{\rho^2\mu^2},$$

et l'on a, pour la valeur de Θ correspondante,

$$\begin{aligned}\Theta = &\int d\rho \sqrt{\frac{2f(\rho) + A + B\rho^2 + 2C\rho^4}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} \\ &- \int d\mu \sqrt{\frac{2F(\mu) - A - B\mu^2 - 2C\mu^4}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}} \\ &- \int \frac{d\psi}{c} \sqrt{2H(\psi) + A}.\end{aligned}$$

La première des trois intégrales

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C'$$

est la seule dans laquelle la variable ψ, et, par conséquent, la fonction $H(\psi)$ figureront. La seconde donnera donc la valeur de μ en ρ, et la troisième celle de t en ρ et μ, indépendamment de la première; et les valeurs de μ et t ainsi formées ne dépendront en aucune manière de la fonction arbitraire H. Nous avons déjà eu occasion de faire une remarque analogue au sujet des formules du n° **14**.

18. Prenons d'une manière plus particulière

$$\begin{aligned}&H(\psi) = 0,\\ &F(\mu) = -\mu^2(g\mu - g'\mu + k\mu^4 - kc^2\mu^2),\\ &f(\rho) = \rho^2(g\rho + g'\rho + k\rho^4 - kc^2\rho^2).\end{aligned}$$

g, g', k étant des constantes; et la formule

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu(\rho^2-\mu^2)} + \frac{H(\psi)}{\rho^2\mu^2}$$

deviendra

$$U = \frac{g}{\rho+\mu} + \frac{g'}{\rho-\mu} + k(\rho^2+\mu^2-c^2).$$

Mais en représentant par r, r', R les distances du point mobile aux deux foyers F, F′ situés dans le même plan méridien et à l'origine O des coordonnées, on a

$$r = \rho + \mu, \quad r' = \rho - \mu, \quad R^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2.$$

Donc

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2.$$

Cette expression de la fonction des forces est celle qui convient au cas d'un mobile sollicité par des forces qui émanent, proportionnellement à l'inverse du carré des distances, des deux centres variables F, F′, et proportionnellement à la distance, d'un troisième centre O fixe et placé au milieu de la droite qui joint les deux autres. Notre analyse fournit donc, en particulier, la solution de ce cas nouveau et remarquable du mouvement d'un point matériel sollicité par trois centres en ligne droite, mais dont un seul est fixe, tandis que les deux autres tournent à l'entour, sur une circonférence de cercle, de manière à être situés à chaque instant aux deux extrémités du diamètre qui a, dans le plan du cercle, même longitude que le point matériel proposé. Nous n'avons pas l'intention d'y insister ici davantage, mais par la suite nous y reviendrons dans un article spécial, en faisant usage de la méthode de notre premier Mémoire; car cette méthode qui s'étend, comme je l'ai déjà dit, au mouvement d'un point libre dans l'espace, s'applique avec beaucoup de facilité et d'élégance, et au problème des trois centres fixes, et à celui des centres mobiles. Le problème des centres mobiles, tout aussi curieux et moins rebattu que celui des centres fixes, mérite bien d'ailleurs d'être traité à part.

19. Nous indiquerons enfin en peu de mots un dernier cas particulier dans lequel les formules du § 1 ont encore besoin d'une transformation

préalable et qui offre aussi de l'intérêt. C'est celui où l'on prend à la fois $b = 0$, $c = 0$, mais en établissant entre b et c le rapport qu'on voudra avant de faire évanouir ces deux quantités. Au n° **16**, ce rapport était celui d'égalité, puisqu'on avait posé $c = b$ avant de faire $b = 0$. Mais en prenant un rapport quelconque, et, pour conserver b et c dans le résultat final, remplaçant b par nb, c par nc, puis faisant $n = 0$ après une préparation convenable, on aura d'autres formules sur lesquelles je me contente d'appeler l'attention du lecteur. Je dirai seulement que le système général de nos coordonnées, résultant de l'intersection de trois surfaces homofocales, se réduit alors à celui de trois séries de surfaces sphériques et coniques ayant toutes le même centre et orthogonales entre elles. Les cônes dont il s'agit sont, bien entendu, du second degré, et tracent sur les différentes sphères des coniques sphériques d'une excentricité plus ou moins grande, suivant la valeur du rapport donné de c à b. Mais en voilà bien assez sur tous ces cas particuliers.

§ IV.

20. Occupons-nous maintenant du mouvement d'un mobile assujetti à demeurer constamment sur une surface donnée. Les trois coordonnées rectangulaires x, y, z, qui déterminent à chaque instant la position du mobile, s'exprimeront au moyen de deux variables indépendantes α, β. Supposons ces variables tellement choisies, que l'expression $dx^2 + dy^2 + dz^2$ prenne la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2,$$

λ et λ' étant des fonctions de α, β. Il faut et il suffit, pour cela, que les variables α, β soient les paramètres de deux systèmes de courbes orthogonales entre elles sur la surface donnée.

Cela posé, en désignant par U la fonction des forces, les équations du mouvement seront

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda'}{d\alpha}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\alpha},$$

$$\frac{d.\lambda'\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\lambda'}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\beta}.$$

Or, pour en trouver les intégrales, il suffira d'avoir une solution Θ de l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2(U + C),$$

contenant, outre la constante C qui entre dans l'équation aux différences partielles elle-même, une autre constante arbitraire A distincte de celle que l'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition. Les intégrales demandées seront, en effet,

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C'.$$

A′ et C′ étant deux nouvelles constantes. Et, de plus, on aura les intégrales intermédiaires

$$\lambda\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Theta}{d\alpha}, \quad \lambda'\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\Theta}{d\beta},$$

qui donnent

$$\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \lambda'\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2(U + C),$$

et montrent ainsi que la constante C est précisément celle qui entre dans l'équation des forces vives. Ce théorème est tout semblable à celui qui nous a servi pour le mouvement d'un point libre, et il se démontre à peu près de même. Au besoin, du reste, on peut consulter un Mémoire de M. J. Binet, inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

21. Lorsqu'on a

$$\lambda = \lambda' = \varphi(\alpha) - \varpi(\beta)$$

et

$$\lambda U = f(\alpha) - F(\beta),$$

ce qui est le cas discuté dans notre premier Mémoire, la fonction Θ s'obtient aisément. En effet, l'équation aux différences partielles peut alors se mettre sous la forme

$$\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = 2f(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - 2F(\beta) - 2C\varpi(\beta).$$

et l'on y satisfera en prenant

$$\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}\right)^2 = 2f(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - A,$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\beta}\right)^2 = A - 2F(\beta) - 2C\varpi(\beta),$$

A étant une constante arbitraire. Donc

$$\Theta = \int d\alpha \sqrt{2f(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - A} + \int d\beta \sqrt{A - 2F(\beta) - 2C\varpi(\beta)}.$$

Cette valeur de Θ nous ramène à nos anciens résultats, en ayant toutefois soin d'observer que la constante de l'équation des forces vives désignée par C dans notre premier Mémoire est représentée ici par 2C.

Nous terminerons ici l'exposition de nos recherches sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un point matériel. L'extension au cas de plusieurs points, libres ou non, des deux méthodes que nous avons suivies pour le cas d'un seul point, fera l'objet d'un autre travail. C'est dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1850 qu'on trouvera ce nouveau Mémoire, auquel nous avons déjà, du reste, renvoyé le lecteur à l'occasion des équations abéliennes d'ordre élevé.

NOTE

SUR LA RECTIFICATION DE QUELQUES COURBES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

On doit à M. Serret, comme l'on sait, le théorème élégant relatif à la rectification de la cassinoïde, que son arc s'exprime par une fonction abélienne décomposable en la somme ou la différence de deux fonctions elliptiques de première espèce à modules complémentaires. Cet habile géomètre, qui s'est distingué depuis par des recherches fort ingénieuses sur le problème inverse de rectification, a aussi étudié une classe de courbes plus générale que la cassinoïde, savoir, le lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier soit constant. On peut appeler ces courbes, ce me semble, *cassinoïdes à* n *foyers*. M. Serret a donné l'expression générale de l'arc de ces courbes en fonction du rayon vecteur, mais il n'a pas remarqué (ce qui est le but de cette Note), qu'on est conduit, en considérant la cassinoïde à trois foyers, à des résultats analytiques identiques avec ceux qu'il a trouvés pour la cassinoïde ordinaire à deux foyers, sauf la seule différence que les modules des fonctions elliptiques ne sont pas complémentaires dans le cas nouveau dont il s'agit.

L'équation polaire de la courbe dont nous nous occupons est, d'après le théorème de Moivre,

$$(\alpha) \qquad r^6 - 2a^3r^3\cos 3\omega + a^6 = b^6,$$

l'origine étant au centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral donné dont on désigne le rayon par a, et le produit constant étant égal à b^3.

On pourrait démontrer notre proposition en exprimant l'arc de la courbe en fonction de ω, ce qui exigerait des procédés différents

dans les deux cas de $b < a$, et $b > a$. Mais, afin d'éviter cette distinction de cas, nous emprunterons à M. Serret une méthode qu'il a indiquée dans le tome IX de ce Journal. Toutes les courbes (α) dans lesquelles b varie sont coupées orthogonalement par les courbes données par l'équation

$$(\beta) \qquad r^3 = \frac{a^3 \cos 3\theta}{\cos 3(\omega - \theta)}.$$

θ étant un paramètre variable. On peut aussi regarder θ et b comme un genre des coordonnées, et si l'on cherche à exprimer r et ω par ces quantités, on trouvera facilement

$$r^6 = a^6 \pm 2a^3 b^3 \sin 2\theta + b^6, \quad \operatorname{tang} 3\omega = \frac{-b^3 \cos 3\theta}{b^3 \sin 3\theta \pm a^3}.$$

Il est évident, d'ailleurs, que l'équation de notre cassinoïde proviendra de l'élimination de θ entre ces dernières équations, en sorte qu'on aura pour l'arc s de cette courbe, en se rappelant que b ne varie pas, l'expression suivante :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 = \frac{b^6 d\theta^2}{r^4}.$$

Ce qui nous apprend qu'une courbe du système (β) qui répond à une valeur particulière de θ détermine sur notre cassinoïde deux arcs s_1, s_2, dont voici les expressions :

$$s_1 = b^3 \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{a^6 + 2a^3 b^3 \sin 3\theta + b^6}},$$

$$s_2 = b^3 \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{a^6 - 2a^3 b^3 \sin 3\theta + b^6}}.$$

Or ces transcendantes ont été étudiées par Legendre dans le premier volume du *Traité des Fonctions elliptiques*, et il résulte de son analyse que leur somme et leur différence sont exprimables chacune par une fonction elliptique de première espèce. Les amplitudes des deux fonctions sont différentes, et la relation qui existe entre leurs modules est assez compliquée.

Dans le cas particulier de $b = a$, l'équation (2) devient

$$r^3 = 2a^3 \cos 3\omega,$$

et l'arc de cette courbe représente exactement, sans aucune addition, la fonction elliptique de première espèce à module $\sin\frac{\pi}{12}$, *ainsi que celle à module complémentaire*, à cause de la relation suivante, démontrée par Legendre,

$$F\left(\cos\frac{\pi}{12}, \omega\right) = \sqrt{3}\, F\left(\sin\frac{\pi}{12}, \varphi\right),$$

ω étant lié avec φ par l'équation

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \operatorname{tang}\varphi.$$

Il est intéressant d'observer que la même fonction elliptique se trouve représentée également, et avec la même exactitude, par l'arc de la courbe dont l'équation polaire est

$$(7) \qquad r^2 = a^2 \cos\frac{3\omega}{2}.$$

La courbe dont nous venons de donner l'équation est le lieu géométrique des projections orthogonales de l'origine des coordonnées sur les tangentes à la courbe

$$r^3 \cos 3\omega = a^3,$$

et cette dernière est le lieu d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un triangle équilatéral soit égal au cube de sa distance au centre du cercle circonscrit à ce triangle. On peut donc voir une analogie géométrique entre la courbe (7) et la lemniscate de Bernoulli.

A propos du sujet actuel, voici une extension d'une propriété d'une suite de courbes dérivées de l'hyperbole équilatere, que j'ai donnée dans le tome X de ce Journal. Considérons la courbe

$$r^m \cos m\omega = a^m.$$

Les projections orthogonales de l'origine sur ses tangentes en forme-

ront une autre, et si l'on fait dériver de cette dernière une autre encore par la répétition de la même construction, et ainsi de suite, l'équation de la $n^{\text{ième}}$ sera

$$(\delta) \qquad r^{\frac{m}{mn-1}} = a^{\frac{m}{mn-1}} \cos\left(\frac{m\omega}{mn-1}\right),$$

où la courbe primitive répond à $n = 0$.

Maintenant, soient P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, trois points correspondants sur la $(n-1)^{\text{ième}}$, la $n^{\text{ième}}$, et la $(n+1)^{\text{ième}}$, et soit V un sommet commun de toutes les courbes; on aura

$$\text{arc } VP_{n-1} + \text{ligne droite } P_{n-1}P_n = \frac{mn-1}{mn+m-1} \text{ arc } VP_{n+1}.$$

Si l'on prend n avec un signe négatif dans l'équation (δ), on aura une classe de courbes dont la première sera l'enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe primitive, et dont les autres s'obtiennent successivement en répétant la même méthode de génération.

NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRANSCENDANTES

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. La fonction transcendante

$$\int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

qui dépend, en général, de trois quantités, jouit de la propriété d'être exprimée par des fonctions qui n'en contiennent que deux, à l'instar de l'intégrale elliptique de troisième espèce à paramètre logarithmique. En effet, désignons par u la fonction dont il s'agit, et nous aurons, en la différentiant par rapport à θ,

$$\frac{du}{d\theta} = 2 \operatorname{cotang}\theta \left[F(\varphi) - \Pi(-k^2 \sin^2\theta, \varphi) \right].$$

Or on a, d'après la découverte célèbre de M. Jacobi (LEGENDRE, tome III, page 154), en désignant par Υ la transcendante $\int \frac{E(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$,

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{cotang}\theta \left[F(\varphi) - \Pi(-k^2 \sin^2\theta, \varphi) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \left[\Upsilon(\varphi'') - \Upsilon(\varphi') - 2 E(\theta) F(\varphi) \right], \end{aligned}$$

où

$$\varphi' = \operatorname{am}[F(\varphi) - F(\theta)], \quad \varphi'' = \operatorname{am}[F(\varphi) + F(\theta)],$$

en sorte que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \left[\Upsilon(\varphi'') - \Upsilon(\varphi') - 2 E(\theta) F(\varphi) \right]$$

Mais si l'on regarde φ comme constant, on a

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} = -\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

En intégrant $\frac{du}{d\theta}$ par rapport à θ, il vient donc facilement

$$u = \int \frac{\Upsilon(\varphi')\,d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}} + \int \frac{\Upsilon(\varphi'')\,d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2\,\mathrm{F}(\varphi)\,\Upsilon(\theta) + f(\varphi).$$

Maintenant soit $\theta = 0$, ce qui donne $\varphi = \varphi' = \varphi''$; on en conclura

$$f(\varphi) = -2\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

d'où l'on déduira finalement

$$\int \frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int \frac{\Upsilon(\varphi')\,d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}}$$
$$+ \int \frac{\Upsilon(\varphi'')\,d\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi''}} - 2\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2\,\mathrm{F}(\varphi)\,\Upsilon(\theta),$$

équation qui constate la propriété énoncée.

On pourrait aussi arriver à l'équation qu'on vient d'obtenir en employant une formule donnée par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XV), savoir [*],

$$2\,\Upsilon\,\mathrm{am}(p) + 2\,\Upsilon\,\mathrm{am}(q) = \Upsilon\,\mathrm{am}(p+q) + \Upsilon\,\mathrm{am}(p-q)$$
$$- \log[1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(p)\sin^2\mathrm{am}(q)],$$

en la multipliant par dp, et en intégrant ensuite.

2. Il serait intéressant peut-être d'étudier d'une manière approfondie les propriétés de notre nouvelle transcendante $\int \frac{\Upsilon(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$; mais je me suis borné pour le moment à déterminer les valeurs qu'elle prend pour $\varphi = \frac{i\pi}{2}$, i étant un entier quelconque : ces valeurs peuvent s'exprimer assez simplement par des fonctions elliptiques. En effet,

[*] *Voir* aussi le *Traité élémentaire* de M. Verhulst, page 114.

soient φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à l'équation

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k);$$

on a, comme on sait,

$$Y(k, \varphi) + Y(k, \psi) + Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k) F(k, \varphi) - \log(1 - k^2 \sin^2 \varphi),$$

et, par conséquent, en désignant par la caractéristique Ξ l'intégrale dont nous nous occupons,

$$\Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) + Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) F(k, \varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2} E(k) [F(k, \varphi)]^2 - \tfrac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + C,$$

ou, parce que la constante C est évidemment égale à $\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi)$,

$$\Xi(k, \varphi) + \Xi(k, \psi) - \Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= \tfrac{1}{2} E(k) [F(k, \varphi)]^2 - Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) F(k, \varphi) - \tfrac{1}{2} \int_0^{\varphi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

Si, dans cette formule, on pose à la fois $\varphi = \pi$, $\psi = \tfrac{1}{2}\pi$, on obtiendra, en se rappelant que Ξ est une fonction impaire, et que

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = 2 \log k' F(k),$$
$$Y(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2} E(k) F(k) - \tfrac{1}{2} \log k,$$

(k' étant le complément de k, comme de coutume), on obtiendra, dis-je,

$$\Xi(k, \pi) - 2\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) = E(k) [F(k)]^2. \tag{a}$$

Nous allons maintenant établir une autre relation entre $\Xi(k, \pi)$ et $\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi)$ laquelle, combinée avec (a), servira à la complète détermination de ces quantités. Voici comment cela s'effectue.

Désignons cette fois par φ et ψ deux amplitudes satisfaisant à la formule de duplication

$$F(k, \psi) = 2F(k, \varphi)$$

et l'on aura, pour la relation correspondante entre les fonctions Y (LEGENDRE, tome III, page 156),

$$Y(k, \psi) = 4Y(k, \varphi) + \log(1 - k^2 \sin^4 \varphi);$$

par conséquent

$$\Xi(k, \psi) = 8\Xi(k, \varphi) + 2\int \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

ce qui donne encore

$$\Xi(k, \pi) = 8\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Or cette dernière intégrale définie peut être ramenée aux fonctions elliptiques à l'aide de quelques formules que j'ai déjà données dans ce journal (tome XI, pages 473 et 474). Les voici

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + \operatorname{cotang}^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$
$$= \pi F(k', \theta) - 2F(k) Y(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2$$
$$- 2F(k) \log \sin \theta - \tfrac{1}{2}\pi F(k') - \log k F(k),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1 - (1 - k'^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi]}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$
$$= \pi F(k', \theta) - 2F(k) Y(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2$$
$$- \log\left(\frac{k'}{k}\right) F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k').$$

Faisons, dans ces équations, $\operatorname{cotang}^2 \theta = k$, ce qui nous donnera

$$F(k', \theta) = \tfrac{1}{2} F(k'), \quad Y(k', \theta) = \tfrac{1}{8} F(k') E(k') - \tfrac{1}{4} \log\left(\frac{2k\sqrt{k}}{1 + k}\right),$$

et nous conclurons de la première de nos deux formules :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$
$$= \left(\log\left(\frac{2 + 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \tfrac{1}{4} F(k')\right)[F(k) E(k') + E(k) F(k') - F(k) F(k')]$$
$$= \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{2 + 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \frac{\pi}{8} F(k');$$

semblablement on trouvera, en vertu de la seconde,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{2 - 2k}{\sqrt{k}}\right) F(k) - \frac{\pi}{8} F(k').$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+k'}{k}\right) \mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{4}\pi \mathrm{F}(k').$$

Donc

$$\Xi(k, \pi) = 8\,\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) + \log\left(\frac{1+k'}{k}\right) \mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{4}\pi \mathrm{F}(k'),$$

ce qui est la relation cherchée.

On a donc

$$\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{12}\pi \mathrm{F}(k') + \tfrac{1}{6}\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{k}{1+k'}\right) \mathrm{F}(k),$$

$$\Xi(k, \pi) = \tfrac{1}{6}\pi \mathrm{F}(k') + \tfrac{4}{3}\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{3}\log\left(\frac{k}{1+k'}\right) \mathrm{F}(k).$$

Ayant obtenu les valeurs de $\Xi(\frac{1}{2}\pi)$, $\Xi(\pi)$, on peut en déduire celles que prend la même transcendante pour les amplitudes $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$, ..., en suivant une marche tout à fait semblable à celle de Legendre dans le cas de la fonction Υ (tome III, page 157). En effet, on a, lorsque $\varphi + \psi = \pi$,

$$\Upsilon(\varphi) = \Upsilon(\psi) - 2\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k) - \mathrm{F}(\varphi)],$$

d'où l'on déduit aisément

$$\Xi(\varphi) + \Xi(\pi - \varphi) = \Xi(\pi) - 2\mathrm{E}(k)\mathrm{F}(\varphi)[\mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(\varphi)]:$$

ce qui nous donnera, en changeant le signe de φ, l'équation suivante

$$\Xi(\pi + \varphi) - \Xi(\pi - \varphi) - 2\,\Xi(\varphi) = 4\mathrm{E}(k)\mathrm{F}(k)\mathrm{F}(\varphi).$$

En faisant dans celle-ci successivement $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3\pi}{2}$, ..., nous en tirerons

$$\Xi\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3\,\Xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k)]^2, \quad \Xi(2\pi) - 2\,\Xi(\pi) = 8\mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k)]^2,$$

et ainsi de suite.

5. On aurait pu obtenir les résultats du numéro précédent plus promptement, en employant, au lieu de la fonction Υ, la transcendante nommée Θ par M. Jacobi. Cette fonction, qui dépend de deux

quantités, est définie, comme l'on sait, par l'équation

$$\Theta(q, x) = q^{\quad} (2kk')^{\frac{1}{3}} \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\ldots$$

où K est la fonction complète $F(k)$, $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, K' étant la fonction complète à module complémentaire, et

$$x = \frac{\pi}{2K} F(k, \varphi).$$

D'ailleurs, $\Theta(q, x)$ est liée avec $\Upsilon(k, \varphi)$ par l'équation

$$\log\Theta(q, x) = \Upsilon(k, \varphi) - \frac{1}{2}\frac{E(k)}{F(k)}[F(k, \varphi)]^2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)$$

(LEGENDRE, tome III, page 151); en sorte que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\Theta(q, x)\, dx = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Upsilon(k, \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{12}\pi K E(k) + \frac{1}{4}\pi\log\left(\frac{2Kk'}{\pi}\right).$$

On a aussi évidemment

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\Theta(q, x)\, dx = \frac{1}{4}\pi\log\left[\frac{K}{\pi}(2kk')^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{6}}\right]$$

$$- \sum \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(1 - 2q^{2i+1}\cos 2x + q^{4i+2})\, dx,$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs entières de i, depuis zéro jusqu'à l'infini. Mais, en se rappelant que $q < 1$, on verra que chaque terme de cette série s'évanouit, en vertu d'un théorème de Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier), savoir :

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = 0,$$

lorsque a est plus petit que l'unité [*]. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\Theta(q, x)\, dx = \frac{1}{4}\pi\log\left[\frac{K}{\pi}(2kk')^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{6}}\right].$$

---

[*] *Voir* une démonstration de ce théorème, déduite de celui de Cotes, par M. Dupuis, tome III de ce Journal, page 355.

et, par conséquent, après quelques réductions

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Y(k,\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{12}\pi K' - \frac{1}{6}E(k)K^2 - \frac{1}{6}K\log\left(\frac{k}{k'}\right)$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé.

4. Il est bon d'observer que la méthode qu'on vient d'indiquer nous donne avec facilité les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

que j'ai déduites, dans ce Journal (tome XI, page 175), de la considération de la fonction Y. En effet, on a

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}}\sin x\,\frac{1-2q\cos 2x+q}{1-2q\cos 2x+q}\cdot\frac{1-2q^3\cos 2x+q^3}{1-2q^3\cos 2x+q^3},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x\,\frac{1+2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\cos 2x+q}\cdot\frac{1+2q^3\cos 2x+q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}$$

(LEGENDRE, tome III, page 97), d'où l'on déduit, en se rappelant que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\cos x)\,dx = -\frac{1}{2}\pi\log 2,$$

et en ayant égard à la formule de Poisson que nous avons citée,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \frac{\pi}{4K}\left[K\log\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\pi K\right],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\cos\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \frac{\pi}{4K}\left[K\log\left(\frac{k'}{k}\right) - \frac{1}{2}\pi K'\right].$$

5. Je terminerai cette Note en remarquant que l'analyse précédente nous conduit immédiatement à évaluer trois intégrales doubles définies d'une forme remarquable, savoir :

$$\text{I)} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\theta\,d\varphi,$$

$$\text{II)} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+\operatorname{cotang}^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,d\theta\,d\varphi,$$

$$\text{III)} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,d\theta\,d\varphi.$$

Rappelons-nous, en effet, que

$$\int_0^{\theta} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \mathrm{E}(k)\,[\mathrm{F}(k, \theta)]^2 - 2\,\mathrm{F}(k)\,\Upsilon(k, \theta),$$

ce qui nous donnera, pour la valeur de (I),

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{E}(k)\,[\mathrm{F}(k)]^3 - 2\,\mathrm{F}(k)\,\Xi(k, \tfrac{1}{2}\pi),$$

ou bien encore

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{F}(k)\left[\log\left(\frac{4k'}{k}\right)\mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{2}\pi\mathrm{F}(k')\right]$$

De même, on trouvera, pour la valeur de (II),

$$-2\,\mathrm{F}(k)\,\Xi(k', \tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{3}[\mathrm{F}(k')]^3[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)] - \log k\,\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k')$$
$$- 2\,\mathrm{F}(k)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\theta)\, d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\theta}},$$

expression qu'on peut mettre, après quelques réductions, sous la forme simple

$$\tfrac{1}{3}\pi[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k')]^2 - \tfrac{1}{3}\log\left(\frac{4k'}{k}\right)\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k').$$

Enfin, la valeur de la troisième de nos intégrales sera

$$\tfrac{1}{3}\log\left(\frac{4k'}{k}\right)\mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k') - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k)]^2 - \tfrac{1}{6}\pi[\mathrm{F}(k')]^2.$$

Démonstration nouvelle et élémentaire de la loi de réciprocité de Legendre, par M. Eisenstein, précédée et suivie de remarques sur d'autres démonstrations qui peuvent être tirées du même principe;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La démonstration de M. Eisenstein, dont je veux parler ici (car M. Eisenstein en a donné plusieurs), est celle qui a paru en 1844 dans le tome XXVII du Journal de M. Crelle. Il est dit, dans le préambule, que dans l'espace de près de trente ans, on n'avait rien ajouté de nouveau aux six démonstrations de M. Gauss. Désirant connaître le fondement de cette assertion, j'ai relu les six démonstrations de M. Gauss et celles qui sont parvenues à ma connaissance; j'ai été conduit à quelques remarques que je vais exposer brièvement :

1°. La démonstration de M. Jacobi, communiquée à Legendre en 1827, et qui a paru en 1830 dans la troisième édition de la *Théorie des Nombres*, ou, ce qui revient au même, la démonstration donnée par M. Cauchy, en 1829, dans le Bulletin de Férussac, peut être regardée comme une simplification de la sixième démonstration de M. Gauss.

2°. Le principe fondamental de la démonstration nouvelle et élémentaire de M. Eisenstein paraît emprunté à la sixième démonstration de M. Gauss.

En d'autres termes, ces démonstrations emploient le développement suivant :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i \right\}^q = \xi^q.$$

où le symbole $\left(\frac{i}{p}\right)$ représente $+1$ si i est résidu quadratique du nombre p, premier impair et positif, et -1 si i est non-résidu quadratique de p.

M. Gauss suppose x tout à fait indéterminée.

MM. Jacobi et Cauchy supposent $x^p = 1$, x imaginaire.

M. Eisenstein suppose $x^p = 1$, $x = 1$.

3°. La démonstration que j'ai donnée dans le tome III, page 142 de ce Journal (*Recherches sur les Nombres*), peut être considérablement abrégée par l'emploi du développement indiqué plus haut, ou plutôt par celui-ci,

$$\left\{\sum_{i=1}^{i=p-1} x^{i^2}\right\}^q,$$

qui s'y ramène immédiatement quand $x^p = 1$.

I.

1. La sixième démonstration de M. Gauss dépend du développement de la somme $\xi = \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i$ élevée à la puissance q. L'auteur, qui emploie une autre notation, commence par montrer que la quantité

$$\xi^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

est divisible par

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = \sum_{i=1}^{i=p-1} x^i;$$

le nombre p est supposé positif premier et impair. La quantité x est tout à fait arbitraire.

On voit donc que pour $x^p = 1$, on a

$$\xi^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = 0,$$

ce qui avait été déjà prouvé par le même auteur dans ses *Recherches arithmétiques*.

M. Gauss donne ensuite une double expression de la somme Σ^q, d'où résulte une identité qui conduit à la loi de réciprocité.

2. La rédaction que Legendre a donnée de la démonstration de M. Jacobi n'est pas complétement satisfaisante. D'après une Note qui se trouve à la page 172 du tome XXX du Journal de M. Crelle, la démonstration de M. Jacobi serait celle que M. Eisenstein a exposée dans un article intitulé : « La loi de réciprocité tirée des formules de » M. Gauss, sans avoir préalablement déterminé le signe du radical » (Journal de M. Crelle, tome XXVIII). La démonstration de M. Cauchy n'est qu'indiquée dans le Bulletin de Férussac (septembre 1829) : elle se trouve avec tous les développements nécessaires dans la quatrième Note du Mémoire sur la théorie des nombres (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, tome XVII).

Voici, avec une légère modification, la rédaction de M. Eisenstein.

Soit

$$S = \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i, \quad \sum_{i=1}^{i=p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^{qi} = S_q = \left(\frac{q}{p}\right) S;$$

comme on a

$$S^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p,$$

il en résultera

$$S^{q-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}},$$

d'où

$$S.S^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}};$$

d'ailleurs

$$S.S_q = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left(\frac{q}{p}\right),$$

donc

$$S(S^q - S_q) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)\right\}.$$

Mais on reconnaît tout de suite que $S^q - S_q$ se réduit à une somme de termes de la forme qAx^t où A est entier, pourvu que q soit un nombre

premier et impair; il en sera donc de même de $S(S^q - S_q)$, et l'on aura

$$m = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left\{ (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right) \right\}$$
$$= q(A + Bx + \ldots + Gx^{p-2} + Hx^{p-1}).$$

Soit donc l'équation

$$m = q(A + Bx + \ldots Gx^{p-2} + Hx^{p-1}),$$

où m, q, A, B,..., H sont des nombres entiers; comme on a

$$qH(1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}) = 0,$$

l'équation précédente deviendra

$$m = q[(A - H) + (B - H)x + \ldots + (G - H)x^{p-2}].$$

Or l'équation

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$$

est irréductible : il faut donc qu'on ait

$$B = H, \ldots\ldots, G = H,$$

et

$$m = q(A - H),$$

ce qui montre que q divise m, et, par conséquent aussi,

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right),$$

puisque q est premier à p. D'ailleurs

$$p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{p}{q}\right)$$

est aussi divisible par q; il suit de là que

$$\left(\frac{q}{p}\right) - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$$

sera également divisible par q, ce qui ne peut arriver que pour

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right),$$

ce qui est la loi de réciprocité.

3. Cette démonstration a été donnée comme la plus courte; mais si l'on remarque qu'elle suppose la démonstration de l'équation

$$\xi^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p,$$

on reconnaîtra qu'elle est réellement plus longue et d'ailleurs moins simple que la troisième démonstration de M. Gauss. Quand on fait intervenir l'équation $x^p = 1$ dans la démonstration de la loi de réciprocité, la démonstration la plus courte est, ce me semble, celle que M. Liouville a donnée dans ce Journal (février 1847); l'équation

$$\xi^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

est remplacée par la suivante, où ρ est une racine imaginaire de l'équation $x^p = 1$,

$$p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\rho^1 - \rho^{-1})^2 (\rho^2 - \rho^{-2})^2 \ldots \left(\rho^{\frac{p-1}{2}} - \rho^{-\frac{p-1}{2}}\right)^2;$$

l'élévation à la puissance $\frac{1}{2}(q-1)$ donne, comme on le voit aisément,

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \Pi \left(\frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}}\right) \left(\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{p-1}{2} \end{matrix}\right).$$

Cette équation, comparée à celle-ci,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \Pi \left(\frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}}\right),$$

donne immédiatement la loi de réciprocité.

Quant à l'équation fondamentale

$$p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \Pi (\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha})^2,$$

où $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, c'est une conséquence presque immédiate de l'identité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = (x - \rho)(x - \rho^2) \ldots (x - \rho^{p-1}).$$

Il est à remarquer que l'équation

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \Pi \left(\frac{\rho^{\alpha q} - \rho^{-\alpha q}}{\rho^{\alpha} - \rho^{-\alpha}}\right)$$

revient à

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \Pi \frac{\sin \alpha \frac{q\,2\pi}{p}}{\sin \alpha \frac{2\pi}{p}};$$

cette équation, combinée avec cette autre

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \Pi \frac{\sin \beta \frac{p\,2\pi}{q}}{\sin \beta \frac{2\pi}{q}} \left(\begin{matrix}\beta = 1 \\ \beta = \frac{q-1}{2}\end{matrix}\right),$$

a conduit M. Eisenstein à une démonstration qui a son analogue dans la théorie des résidus biquadratiques et cubiques.

Voyez son article sur l'application de l'algèbre à l'arithmétique transcendante (Journal de M. Crelle, tome XXIX).

II.

4. La démonstration nouvelle et élémentaire de M. Eisenstein s'appuie sur le calcul de certaines sommes $\psi(\mu, \nu)$, qui se présentent tout naturellement quand on développe

$$\xi^\mu = \left\{\sum \left(\frac{i}{p}\right) x^i\right\}^\mu = \left\{\left(\frac{1}{p}\right) x + \left(\frac{2}{p}\right) x^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) x^{p-1}\right\}^\mu$$

dans l'hypothèse de $x^p = 1$.

En supposant p premier, le terme général du développement de ξ^μ sera

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_\mu}{p}\right) x^{a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu},$$

en représentant par

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_\mu,$$

des nombres égaux ou non pris dans la série

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad p-1.$$

Si donc on pose

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu = \nu \quad \text{mod. } p,$$

et qu'on fasse

$$\sum \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_\mu}{p}\right) = \psi(\mu, \nu),$$

on aura

$$\xi^\mu = \psi(\mu, 0) + \psi(\mu, 1)x + \psi(\mu, 2)x^2 + \ldots + \psi(\mu, \nu)x^\nu + \ldots + \psi(\mu, p-1)x^{p-1}.$$

Or c'est précisément de la considération des sommes $\psi(\mu, \nu)$, définies comme il vient d'être dit, que M. Eisenstein tire sa démonstration.

Pour $x = 1$, $\xi = 0$, il en résultera donc

$$\psi(\mu, 0) + \psi(\mu, 1) + \psi(\mu, 2) + \ldots + \psi(\mu, p-1) = 0.$$

Soient d'ailleurs les congruences

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu \equiv \mathrm{K}, \quad a_1 \equiv \mathrm{K}b_1, \quad a_2 \equiv \mathrm{K}b_2, \ldots, \quad a_\mu \equiv \mathrm{K}b_\mu \pmod{p},$$

il en résultera, K n'étant pas divisible par p,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_\mu \equiv 1 \pmod{p};$$

et comme

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_\mu}{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{K}}{p}\right)^\mu \left(\frac{b_1}{p}\right)\left(\frac{b_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{b_\mu}{p}\right),$$

on en conclura l'équation

$$\psi(\mu, \mathrm{K}) = \left(\frac{\mathrm{K}}{p}\right)^\mu \psi(\mu, 1).$$

1°. Soit $\mu = 2\lambda + 1$ ou impair, alors

$$\psi(2\lambda + 1, \mathrm{K}) = \left(\frac{\mathrm{K}}{p}\right)\psi(2\lambda + 1, 1);$$

de là

$$\psi(2\lambda + 1, 1) + \psi(2\lambda + 1, 2) + \ldots + \psi(2\lambda + 1, p-1) = 0,$$

et, par conséquent,

$$\psi(2\lambda + 1, 0) = 0.$$

2°. Soit $\mu = 2\lambda$ ou pair, alors

$$\psi(2\lambda, \mathrm{K}) = \psi(2\lambda, 1);$$

donc

$$\psi(2\lambda, 0) + (p-1)\psi(2\lambda, K) = 0,$$
$$\psi(2\lambda, 0) - \psi(2\lambda, K) = -p\psi(2\lambda, K),$$
$$\psi(2\lambda, 0) - \psi(2\lambda, 1) = -p\psi(2\lambda, 1).$$

Par ce qui précede, on ramène $\psi(\mu, \nu)$ à dépendre de $\psi(\mu, 1)$; on peut aussi faire dépendre $\psi(\mu, \nu)$ de $\psi(\mu - 1, 1)$.

On posera

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{\mu-1} \equiv \nu - a_\mu \pmod{p},$$
$$\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_\mu}{p}\right) = \left(\frac{a_\mu}{p}\right) \times \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_{\mu-1}}{p}\right),$$

et il en résultera

$$\psi(\mu, \nu) = \sum \left(\frac{a_\mu}{p}\right) \psi(\mu - 1, \nu - a_\mu),$$

ou il faut donner successivement à a_μ les valeurs $1, 2, \ldots, p-1$.

Pour $\nu = 0$, on a

$$\psi(\mu, 0) = \sum \left(\frac{a_\mu}{p}\right) \psi(\mu - 1, -a_\mu);$$

or pour $\mu = 2\lambda$, on a

$$\psi(\mu - 1, -a_\mu) = \left(\frac{-a_\mu}{p}\right) \psi(\mu - 1, 1),$$

de là

$$\psi(\mu, 0) = \sum \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{a_\mu}{p}\right)^2 \psi(\mu - 1, 1),$$

ou bien

$$\psi(\mu, 0) = \left(\frac{-1}{p}\right)(p-1)\psi(\mu - 1, 1)$$

mais, dans ce cas,

$$\psi(\mu, 0) = (1-p)\psi(\mu, 1).$$

On a donc, pour $\mu = 2\lambda$,

$$\psi(\mu, 1) = -\left(\frac{-1}{p}\right)\psi(\mu - 1, 1) = \psi(\mu, \nu).$$

Mais si $p = 2\lambda + 1$, on aura

$$\psi(2\lambda+1, \nu) = \left(\frac{\nu}{p}\right)\psi(2\lambda, 0) + \left\{\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{\nu-1}{p}\right)\right\}\psi(2\lambda, 1)$$
$$+ \left(\frac{\nu+1}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right)\Big\}$$

$$= \left(\frac{\nu}{p}\right)\{\psi(2\lambda, 0) - \psi(2\lambda, 1)\}$$
$$= -\left(\frac{\nu}{p}\right) p\psi(2\lambda, 1).$$

Voici donc le résumé des formules obtenues :

$$\psi(2\lambda+1, 0) = 0, \qquad \psi(2\lambda+1, \nu) = -\left(\frac{\nu}{p}\right) p\psi(2\lambda, 1)$$

$$\psi(2\lambda, 0) = \left(\frac{-1}{p}\right)(p-1)\psi(2\lambda-1, 1), \quad \psi(2\lambda, \nu) = -\left(\frac{-1}{p}\right)\psi(2\lambda-1, 1)$$

On aura donc, pour $\nu = 1$,

$$\psi(2\lambda+1, 1) = -p\psi(2\lambda, 1),$$
$$\psi(2\lambda, 1) = -\left(\frac{-1}{p}\right)\psi(2\lambda-1, 1)$$
$$\psi(2\lambda-1, 1) = -p\psi(2\lambda-2, 1).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi(3, 1) = -p\psi(2, 1),$$
$$\psi(2, 1) = -\left(\frac{-1}{p}\right)\psi(1, 1);$$

et comme $\psi(1, 1) = 1$ et $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, la multiplication donnera

$$\psi(2\lambda+1, 1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\lambda} p^{\lambda}, \qquad \psi(2\lambda+1, \nu) = \left(\frac{\nu}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\lambda} p^{\lambda}$$
$$\psi(2\lambda+1, 0) = 0,$$
$$\psi(2\lambda, 1) = \psi(2\lambda, \nu) = -(-1)^{\frac{p-1}{2}\lambda} p^{\lambda-1}, \quad \psi(2\lambda, 0) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\lambda}(p-1)p^{\lambda-1}.$$

on aura, par exemple,

$$\psi(2, 1) = \psi(2, \nu) = -(-1)^{\frac{p-1}{2}}, \qquad \psi(2, 0) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1).$$

d'où l'on tirera

$$\xi^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

5. Pour déduire des formules précédentes la loi de réciprocité, on prendra un nombre premier impair q, et l'on aura

$$\psi(q, 1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} = \sum \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_q}{p}\right),$$

sous la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q \equiv 1 \pmod{p}.$$

Or il y a un terme qui donne

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_q,$$

et, par suite,

$$qa_1 \equiv 1 \pmod{p};$$

de la une seule valeur de a_1, telle que $\left(\frac{a_1}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$. La somme $\psi(q, 1)$ contient donc un terme $\left(\frac{a_1}{p}\right)^q = \left(\frac{q}{p}\right)$.

D'ailleurs des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, qui ne sont pas tous égaux, donnent, dans le cas de q premier, un nombre d'arrangements multiple de q; on aura donc

$$\sum \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) + Mq,$$

le nombre M étant étant entier. Il suit de là que

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)$$

est divisible par q, et que l'on a, par suite,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right),$$

ce qui est la loi de réciprocité.

III

6. J'ai montré dans mes Recherches sur les nombres que, étant donnée une formule pour le nombre des solutions de la congruence

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2 = a \pmod{p},$$

on en tirait très-facilement la démonstration de la loi de réciprocité. Voici une rédaction simple et nouvelle de cette démonstration.

Représentons par u^a le nombre des solutions de la congruence précédente, ce nombre étant déterminé ainsi qu'il suit. On fera les $(p-1)^q$ arrangements des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$ pris q à q, le même nombre pouvant être répété. Soit

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots, \quad x_q = a_q$$

un de ces arrangements; ce sera une solution si l'on a

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_q^2 = a \pmod{p}.$$

Le nombre de solutions ainsi obtenues est celui que l'on représente par u_q^a.

Il faut distinguer trois cas :

1°. $a = 0$, le nombre des solutions est u^0.

2°. Soit a un résidu quadratique, on reconnaît de suite que si l'on prend pour a un quelconque des $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques de p, le nombre de solutions restera le même, ce qui résulte de ce que tous les résidus sont contenus dans la formule ay^2, où a est résidu. On remplacera donc u_q^a par u^1 ou u_q.

3°. Si a est un non-résidu quadratique, comme ay^2 sera la formule des non-résidus, u_q^a conservera une même valeur, quel que soit le non-résidu a. Cette valeur sera représentée par u'.

De là et de la manière d'obtenir les solutions, on tire l'équation

$$u_q^0 + \frac{p-1}{2}(u_q + u') = (p-1)^q.$$

Si l'on voulait admettre 0 au nombre des valeurs données aux

inconnues, on remplacerait n_q', n_q, n_q'' par N_q', N_q, N_q'', et la relation analogue à la précédente serait

$$N_q'' + \frac{p-1}{2}(N_q + N_q') = p^q,$$

les nombres pris q à q étant ici $0, 1, 2, \ldots, p-1$, et, par conséquent, en nombre p.

7. Cela posé, a

$$\xi = \sum \left(\frac{i}{p}\right) x^i = \sqrt{p(-1)^{\frac{p-1}{2}}}.$$

ajoutons

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0,$$

il viendra

$$1 + x^1 + x^4 + \ldots + x^{i^2} + \ldots + x^{(p-1)^2} = \sqrt{p(-1)^{\frac{p-1}{2}}};$$

dans cette équation on a remplacé les exposants par les carrés qui leur sont congrus ou équivalents. Quant au signe du radical, il reste indéterminé; le radical sera représenté par ξ et disparaîtra du résultat final.

L'équation

$$x^1 + x^4 + \ldots + x^{(p-1)^2} = \xi - 1$$

donne, par l'élévation à la puissance q et en vertu des remarques faites plus haut,

$$n_0' + n_q \Sigma x^a + n'' \Sigma x^b = (\xi - 1)^q,$$

en représentant par Σx^a la somme des $\frac{p-1}{2}$ termes x^a, $x^{a'}$, $x^{a''}$, ..., ayant pour exposants les $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques, et, de même, par Σx^b la somme des $\frac{p-1}{2}$ termes x^b, $x^{b'}$, ..., ayant pour exposants les $\frac{p-1}{2}$ non-résidus quadratiques.

Comme on a

$$\Sigma x^a + \Sigma x^b = \xi - 1 \quad \text{et} \quad 1 + \Sigma x^a + \Sigma x^b = 0$$

il en résultera

$$1 + 2\Sigma x^n = \xi, \quad 1 + 2\Sigma x^{n'} = -\xi;$$

on aura donc

$$(A) \qquad 2n^0 - n_q - n_{-q} + (n_q - n_{-q})\xi = 2(\xi - 1)^2.$$

En partant de l'équation

$$1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{p-1} = \xi,$$

on trouvera tout à fait de la même manière

$$(B) \qquad 2N^0 - N_q - N_{-q} + (N_q - N_{-q})\xi = 2\xi^2.$$

Calcul des nombres N^0, N_q, N_{-q}.

1°. Soit $q = 2r$, l'équation (B) devra se partager ainsi :

$$2N^0 - N_q - N_{-q} = 2\xi^q, \quad N_q - N_{-q} = 0;$$

joignant à ces deux équations celle-ci,

$$N^0 + \frac{p-1}{2}(N_q + N_{-q}) = p^q,$$

il viendra

$$pN^0 = p^q + (p-1)\xi^q, \quad N_q = N_{-q} = N^0 - \xi^q.$$

Or

$$\xi = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$$

donne

$$\xi^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}} p^{\frac{q}{2}};$$

on a donc

$$N^0 = p^{q-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}}(p-1)p^{\frac{q}{2}-1}, \quad N_q = N_{-q} = p^{q-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}} p^{\frac{q}{2}-1}.$$

2°. Soit q impair, l'équation (B) se partagera ainsi :

$$2N^0 - N_q - N_{-q} = 0, \quad N_q - N_{-q} = 2\xi^{q+1}.$$

D'ailleurs on a

$$N^0 + \frac{p-1}{2}(N_q + N_{-q}) = p^q;$$

donc

$$N^0 = p^{q-1}, \quad N_q = p^{q-1} + \xi^{q-1}, \quad N'_q = p^{q-1} - \xi^{q-1};$$

et comme

$$\xi^{q-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}},$$

on aura

$$N^0 = p^{q-1}, \quad N_q = p^{q-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}, \quad N' = p^{q-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}$$

Calcul des nombres n_q^0, n_q, n'_q.

Si q est pair $= 2r$, en posant

$$\xi = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p} = \sqrt{p}\, i, \quad \left| i = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \right|,$$

le développement $(\xi - 1)^q$ deviendra $(\xi - 1)^q = P - Q\xi$; en posant

$$P = (pi)^r + \frac{q\cdot q-1}{1.2}(pi)^{r-1} + \ldots + \frac{q\cdot q-1}{1.2} pi + 1 = 1 + pi.R,$$

$$R = (pi)^{r-1} + \frac{q\cdot q-1}{1.2}(pi)^{r-2} + \ldots + \frac{q\cdot q-1}{1.2},$$

$$Q = q(pi)^{r-1} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1.2.3}(pi)^{r-2} + \ldots + q,$$

on aura les équations

$$2(n_q^0 - n_q + n'_q) = 2P, \quad n_q - n'_q = -2Q, \quad 2(n_q^0 - (p-1)(n_q + n'_q)) = 2(p-1)^q,$$

qui donneront

$$n_q^0 = (p-1)\left\{\frac{(p-1)^{q-1}+1}{p} + iR\right\}, \quad n_q = \frac{(p-1)^{q-1}}{p} - iR - Q,$$

$$n'_q = \frac{(p-1)^{q-1}}{p} - iR + Q.$$

Si q est impair $= 2r - 1$, on aura $(\xi - 1)^q = P\xi - Q$,

$$P = (pi)^r + \frac{q\cdot q-1}{1.2}(pi)^{r-1} + \ldots + q,$$

$$Q = q(pi)^r + \frac{q\cdot q-1}{1.2}\cdot\frac{q-2}{3}(pi)^{r-1} + \ldots + \frac{q\cdot q-1}{1.2} pi + 1 = 1 + piR,$$

$$R = q(pi)^{r-1} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1.2.3}(pi)^{r-2} + \ldots + \frac{q\cdot q-1}{1.2}$$

On aura, de plus, les équations

$$2n_q^0 - n_q - n'_q = -2Q, \quad n_q - n'_q = 2P, \quad 2n_q^0 + (p-1)(n_q + n'_q) = 2^q(p-1)^q,$$

d'où l'on tire

$$n_q^0 = (p-1)\left\{\frac{(p-1)^{q-1}-1}{p} - iR\right\}, \quad n_q = \frac{(p-1)^{q-1}+1}{p} + iR - P,$$

$$n'_q = \frac{(p-1)^{q-1}+1}{p} + iR + P.$$

8. Pour tirer des formules précédentes la loi de réciprocité, il faut d'abord remarquer que la congruence

$$x^2 \equiv m \pmod{p}$$

a toujours deux solutions, quand elle est possible : l'une de ces solutions étant $x = z$, l'autre sera $x = p - z$. Il suit de là que les nombres n_q^0, n_q, n'_q sont de la forme

$$2^q S_q^0, \quad 2^q S_q, \quad 2^q S'_q,$$

c'est-à-dire multiples de 2^q.

Quand la congruence

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2 \equiv a \pmod{p}$$

est satisfaite par

$$x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_q^2,$$

on a

$$qx_1^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Ainsi

$$(qx_1)^2 \equiv aq \pmod{p},$$

aq doit être résidu quadratique de p. Réciproquement, si aq est résidu quadratique, on pourra résoudre

$$qx_1^2 \equiv a \pmod{p},$$

et la congruence sera satisfaite par

$$x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_q^2.$$

Il suit de là que l'on a

$S_q = qQ + 1$ si q est résidu quadratique de p, et

$S_q = qQ$ si q est non-résidu ;

ou des nombres $x_1^2, x_2^2, \ldots, x^2$ inégaux donnent un nombre de solutions multiple de q, si q est premier.

De même $S_q = qQ + 1$ si q est non-résidu quadratique de p, et

$$S_q = qQ \quad \text{si } q \text{ est résidu quadratique.}$$

D'ailleurs on a

$$n_q = 2S_q, \quad n'_q = 2S'_q \pmod{q};$$

donc

$$n_q = 1 + \left(\frac{q}{p}\right) \pmod{q},$$

$$n'_q = 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \pmod{q}.$$

Pour le cas de q premier impair, l'équation

$$n_q = \frac{(p-1)^{q+1}}{p} + iR + P$$

donne

$$n_q = p^{q-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q};$$

d'ailleurs

$$n_q = 1 + \left(\frac{q}{p}\right) \pmod{q},$$

de là

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}. \pmod{q},$$

ce qui revient à la loi de réciprocité

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right).$$

Si l'on voulait employer les valeurs de N_q, il suffirait d'établir la formule

$$N_q = n_q + qn_{q-1} + \frac{q.q-1}{1.2} n_{q-2} + \ldots + qn_1,$$

d'où

$$n_q = N_q - qN_{q-1} + \frac{q.q-1}{1.2} N_{q-2} - \ldots \pm qN_1.$$

Pour le cas de q premier, il en résulte

$$N_q \equiv n_q \pmod{q};$$

ainsi

$$N_q = 1 + \left(\frac{q}{p}\right)$$

Mais

$$N_q = q^{p-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}},$$

la comparaison des deux valeurs de N_q donne, comme plus haut, la loi de Legendre.

Dans mes Recherches sur les nombres, je n'ai donné que les valeurs de

$$N^0, \quad N_q, \quad N';$$

celles de

$$n^0, \quad n_q, \quad n_{\infty}$$

pouvant s'en déduire au moyen de l'équation

$$n_q = N_q - qN_{q-1} + \frac{q.q-1}{1.2} N_{q-2} + \ldots \pm qN_1$$

Le calcul donné plus haut est plus simple

NOTE

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET [*].

(Traduit de l'allemand par M. KOPP, Professeur au college de Cherbourg.)

Si un systeme de points matériels est sollicité par des forces attractives ou répulsives, qui ne dépendent que de la distance, et qui sont dirigées vers des centres fixes ou qui proviennent des actions mutuelles entre deux masses, l'action et la réaction étant égales; si, en outre, les équations de condition qui lient les coordonnées des différents points ne contiennent pas le temps, l'équation des forces vives (établie dans toute sa généralité par D. Bernoulli) aura lieu. Cette équation est

$$\sum mv^2 = f(x, y, z, x', \ldots) + C.$$

Le signe $\sum$ s'étend à toutes les masses du systeme, chaque masse étant représentée par m, et sa vitesse par v; C est une constante arbitraire. La fonction des coordonnées ne dépend que de la nature des forces, et peut s'exprimer par un nombre déterminé de variables indépendantes $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, de sorte que l'équation des forces vives s'écrira

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) + C.$$

La fonction φ est liée d'une manière intime aux positions d'équilibre du systeme; car la condition qui exprime que, pour certaines valeurs

[*] Journal de M. Crelle, tome XXXII, 1846.

déterminées de λ, μ, ν,..., le système est dans une position d'équilibre, coïncide avec celle qui exprime que, pour ces mêmes valeurs, la différentielle totale de φ est nulle. De sorte qu'en général, pour chaque position d'équilibre, la fonction sera un maximum ou un minimum. Si le maximum a lieu réellement, l'équilibre est stable, c'est-à-dire que, si l'on déplace infiniment peu les points du système de leurs positions d'équilibre, et qu'on donne à chacun une petite vitesse initiale, dans tout le cours du mouvement les déplacements des différents points du système, par rapport à la position d'équilibre, resteront toujours compris entre certaines limites déterminées et très-petites.

Ce théorème est un des plus importants de la Mécanique. Il est la base de la théorie des petites oscillations, qui conduit à tant d'applications intéressantes relatives à la Physique. On doit donc s'étonner qu'on n'en ait donné jusqu'ici qu'une démonstration peu rigoureuse et insuffisante.

Supposons, comme il est permis de le faire sans nuire à la généralité, que la position d'équilibre du système, ou le maximum de la fonction φ, corresponde aux valeurs $\lambda = 0$, $\mu = 0$, etc. La démonstration donnée par Lagrange (*Mécanique analytique*, première partie, section III) se ramène à ceci : le développement de la fonction suivant les puissances de λ, μ, ν,..., qui commence par les termes du second ordre, est réduit à ces termes; puis, d'après la condition connue du maximum, que les termes du second ordre peuvent être considérés comme une somme de carrés négatifs, on déduit pour λ, μ, ν,..., des limites que ces quantités ne peuvent pas franchir. Ce genre de démonstration, employé encore dans d'autres questions de stabilité, et surtout dans l'Astronomie physique, manque de rigueur. En effet, on peut douter avec raison que des grandeurs pour lesquelles on trouve, avec l'hypothèse qu'elles seront toujours petites (car ce n'est que dans ce cas que l'on peut négliger les termes d'un ordre supérieur) de petites limites, resteront toujours renfermées réellement, au bout d'un temps quelconque, dans ces limites, et même, en général, dans des limites petites.

La démonstration que nous venons de citer a été reproduite, sans modification importante que je sache, par tous les auteurs qui se

sont occupés de cette matière; et tout ce que Poisson (*Traité de Mécanique*, tome II, page 492) y a ajouté pour faire entrer en considération les termes d'un ordre supérieur, repose sur cette hypothèse inadmissible, que *chaque* terme du second ordre surpasse la somme de tous les termes d'ordre supérieur.

Même en complétant les considérations de Lagrange, pour le cas auquel elles s'appliquent et où le maximum se reconnaît par les termes du second ordre, le théorème en question ne serait point prouvé dans toute son étendue. On sait que l'existence d'un maximum est compatible avec l'évanouissement des termes du second ordre; il suffit, en général, que les premiers termes différents de zéro soient d'ordre pair, et que la somme de ces termes soit toujours négative. Les formules relatives à cette dernière condition n'ont pas encore été données, même dans le cas où il s'agit des termes du quatrième ordre. Il faudrait donc les rechercher d'abord. Cela introduirait nécessairement dans la démonstration du théorème de Mécanique dont nous parlons une grande complication. Heureusement on peut démontrer le principe de la stabilité de l'équilibre indépendamment de ces formules, par une considération très-simple qui se rattache d'une manière immédiate à l'idée du maximum.

Outre la supposition déjà faite, que la position d'équilibre répond aux valeurs $\lambda = 0$, $\mu = 0, \ldots$, nous supposerons encore que $\varphi(0, 0, 0, \ldots) = 0$; ce qui est permis, à cause de la constante arbitraire. Déterminons la constante en ayant égard à l'état initial donné, pour lequel nous désignerons par v_0, λ_0, μ_0, $\nu_0, \ldots$ les valeurs de v, λ, μ, $\nu, \ldots$. On a ainsi

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \sum mv_0^2.$$

Puisque par hypothèse $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, pour $\lambda = 0$, $\mu = 0, \ldots$, est nul et maximum, on pourra déterminer des grandeurs positives l, m, $n, \ldots$, assez petites pour que $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ soit toujours négatif pour tout système λ, μ, $\nu, \ldots$ où les valeurs absolues des variables sont respectivement assujetties à ne pas dépasser les limites l, m, $n, \ldots$, excepté, toutefois, le seul cas où λ, μ, $\nu, \ldots$ sont nuls à la fois. Ce cas est exclu si nous ne considérons que des systèmes tels, qu'au moins une des

variables λ, μ, ν, ... soit égale en valeur absolue à sa limite l, m, n, ... Supposons que de toutes les valeurs négatives de la fonction pour de tels systèmes, $-p$, abstraction faite du signe, soit la plus petite; alors on peut facilement montrer que, si l'on prend λ_0, μ_0, ν_0, ... numériquement plus petits que l, m, n, ..., et que l'on satisfasse en même temps à l'inégalité

$$-\varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \sum mv_0^2 < p,$$

chacune des variables λ, μ, ν,... restera pendant toute la durée du mouvement au-dessous des limites l, m, n,.... En effet, si le contraire avait lieu, comme les valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0,... remplissent la condition que nous venons d'énoncer, et à cause de la continuité des variables λ, μ, ν,..., il faudrait d'abord qu'à un certain instant, il y eût égalité entre une ou plusieurs valeurs numériques de λ, μ, ν, ... et leurs limites respectives l, m, n,..., sans qu'aucune des autres valeurs eût dépassé sa limite. A cet instant, la valeur absolue de $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ serait supérieure ou au moins égale à p. Par conséquent, le second membre de l'équation des forces vives serait négatif, à cause de l'inégalité écrite plus haut, et qui se rapporte à l'état initial; ce qui n'est pas possible, $\sum mv^2$ étant toujours positif.

Il suit encore de là, évidemment, que les vitesses v seront toujours comprises entre des limites déterminées, puisque l'on a toujours

$$\sum mv^2 \leqq \sum mv_0^2 - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots).$$

Il est évident aussi que les limites pour chaque vitesse, ainsi que celles de chaque variable λ, μ, ν, ..., peuvent être aussi petites que l'on voudra, puisque les quantités l, m, n,... peuvent devenir aussi petites que l'on voudra.

Je vais encore appeler l'attention sur une erreur que l'on trouve dans divers auteurs, et qui se rapporte au sujet que je viens de traiter. On dit (*Traité de Mécanique*, par Poisson, tome II, page 491) que si un système passe dans le cours du mouvement par plusieurs positions d'équilibre, ces positions successives sont alternativement des positions d'équilibre stable et instable, c'est-à-dire telles, que des maxima et des minima de la fonction $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ leur correspondent.

On fonde cette assertion sur les théorèmes suivants :

I. Un maximum ou minimum ne cesse pas d'être maximum ou minimum si les variables λ, μ, ν..., considérées d'abord comme variables indépendantes, deviennent, pour les valeurs particulières pour lesquelles le maximum ou le minimum a lieu, fonctions d'une nouvelle variable t.

II. Dans une fonction d'une seule variable t, les maxima et les minima se succèdent alternativement.

Ces deux théorèmes sont vrais, mais ne justifient pas la conséquence qu'on en tire; il faudrait que la réciproque du premier théorème eût lieu, c'est-à-dire que si la fonction $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, fonction d'une seule variable indépendante t, présente pour une certaine valeur de t un maximum ou minimum, la fonction conservât cette propriété, si l'on regarde les valeurs correspondantes de λ, μ, ν... comme des valeurs particulières de λ, μ, ν..., considérées comme variables arbitraires. Ce qui n'arrive pas nécessairement, même dans le cas où il n'y a qu'une seule variable, par exemple λ. Ainsi, la fonction λ^2 a un minimum et pas de maximum, tandis que la fonction $\sin^2 t$, dans laquelle la première se transforme en posant $\lambda = \sin t$, a une infinité de minima, tous égaux entre eux et au minimum de λ^2, et, de plus, a une infinité de maxima. L'erreur dans laquelle on est tombé à cet égard doit étonner d'autant plus, que la fausseté du théorème énoncé se manifeste déjà dans le mouvement du pendule ordinaire.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. ALFRED SERRET

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« ... Je viens de trouver quelques courbes sphériques analogues à vos courbes elliptiques de première classe. En prenant pour mon point de départ la propriété que vous avez constatée pour ces dernières, savoir, que l'arc est une fonction elliptique du rayon vecteur, je cherche à déterminer les courbes sphériques dont l'arc peut s'exprimer par une fonction elliptique de la tangente trigonométrique du demi-arc, rayon vecteur sphérique. En désignant par ρ le rayon vecteur sphérique, et par θ l'angle polaire, on a, pour la différentielle d'un arc s de courbe,

$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\theta^2,$$

et si l'on fait $z = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho$,

$$ds^2 = \frac{4\,dz^2}{(1+z^2)^2} + \frac{4\,z^2\,d\theta^2}{(1+z^2)^2}.$$

Maintenant posons, conformément à ce que nous avons supposé,

$$ds^2 = \frac{4\,C^2\,dz^2}{-1+\alpha z^2 - z^4},$$

ce qui nous donnera

$$d\theta = \sqrt{1+C^2}\sqrt{\frac{1+\frac{2C^2-\alpha}{1+C^2}z^2+z^4}{-1+\alpha z^2-z^4}}\,\frac{dz}{z},$$

ou bien, en faisant $C^2 = \frac{\alpha-2}{4}$,

$$d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\alpha}\,\frac{z^2-1}{\sqrt{-1+\alpha z^2-z^4}}\,\frac{dz}{z}.$$

Cette équation différentielle est tout à fait semblable à celle des courbes elliptiques de première classe, et peut s'intégrer de la même manière.

Les courbes qu'elle représente seront algébriques, si $2 + \alpha = n^2$, n étant une quantité commensurable.

» Voici le système des équations appartenant à nos courbes elliptiques sur la sphère, ω étant une constante arbitraire :

$$\frac{2\theta}{n} = \omega - \lambda - \mu,$$

$$2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}\cos 2\lambda,$$

$$2 \operatorname{cotang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}\cos 2\mu.$$

L'arc de la courbe représentée par ces équations a pour valeur

$$\sqrt{n^2 - 4}\int \frac{dz}{\sqrt{-1 + (n^2 - 2)z^2 - z^4}},$$

ou bien encore, si l'on pose $z - \frac{1}{z} = \sqrt{n^2 - 4}\cos\varphi$,

$$\frac{\sqrt{n^2 - 4}}{n}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{n^2 - 4}{n^2}\sin^2\varphi}}.$$

Note de M. J.-A. Serret.

La Lettre que M. William Roberts m'a fait l'honneur de m'écrire, et dont je publie ici un extrait, m'a suggéré l'idée de rechercher si les courbes sphériques qu'il a trouvées étaient susceptibles d'un mode de génération analogue à celui que j'ai fait connaître pour les courbes elliptiques de la première classe (tome XI de ce Recueil, page 89). J'ai reconnu aisément que les courbes de M. Roberts ne constituent qu'un cas très-particulier des courbes elliptiques que l'on obtient en exécutant sur la sphère des constructions analogues à celles qui fournissent sur le plan les courbes elliptiques de première classe. C'est ce que je vais faire voir en peu de mots.

Considérons une sphère dont nous prendrons le rayon pour unité, et tracons sur sa surface un triangle sphérique quelconque OMP.

Soit posé

$$\mathrm{OM} = c, \quad \mathrm{MP} = a, \quad \mathrm{OP} = b, \quad \mathrm{MOP} = \alpha, \quad \mathrm{OMP} = \beta;$$

désignons aussi par θ l'angle que le coté ρ fait avec un grand cercle fixe mené par le point O, et par p et q deux nombres quelconques donnés. Cela posé, imaginons que le triangle OMP varie de telle manière que le sommet O reste fixe, que les cotés a et b restent constants, et que l'angle polaire θ du sommet variable M satisfasse constamment à la condition

$$\theta = p\alpha - q\beta; \tag{1}$$

la courbe que décrira le point M sera algébrique si p et q sont commensurables, et l'on pourra toujours faire en sorte que son arc soit exprimé par une fonction elliptique de première espèce. Il suffira pour cela que deux conditions soient remplies entre les deux arcs a et b et les deux nombres p et q: par où l'on voit que les résultats seront beaucoup plus étendus sur la sphère que sur le plan.

L'équation de la courbe que nous considérons résultera de l'élimination des angles α et β entre l'équation (1) et les deux suivantes:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos\rho}{\sin b \sin\rho}.$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos\rho}{\sin a \sin\rho}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho = z.$$

$$\Delta^2 = -(\cos a - \cos b)^2 + 2(\sin^2 a + \sin^2 b)z^2 - (\cos a + \cos b)^2 z^4;$$

on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{(\cos a - \cos b) + (\cos a + \cos b)z^2}{2z\sin b}, & \sin\alpha = \dfrac{\Delta}{2z\sin b}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{-(\cos a - \cos b) + (\cos a + \cos b)z^2}{2z\sin a}, & \sin\beta = \dfrac{\Delta}{2z\sin a}. \end{cases}$$

Maintenant on trouve, par la différentiation des équations (1) et (2),

$$d\alpha = \frac{(\cos a - \cos b) - (\cos a + \cos b)z^2}{\Delta}\frac{dz}{z},$$

$$d\beta = \frac{-(\cos a - \cos b) - (\cos a + \cos b)z^2}{\Delta}\frac{dz}{z},$$

$$d\theta = p\,d\alpha - q\,d\beta;$$

ce qui donnera, pour l'équation différentielle de la courbe entre les coordonnées z et θ,

$$z\,d\theta = \frac{(p+q)(\cos a - \cos b) - (p-q)(\cos a + \cos b)z^2}{\Delta}\,dz.$$

Enfin, si ds désigne la différentielle de l'arc de la courbe, on a

$$ds^2 = \frac{1}{(z^2+1)^2}(dz^2 + z^2\,d\theta^2),$$

et, dans le cas actuel,

$$ds = 2(\cos a + \cos b)\sqrt{(p-q)^2 - 1}\,\frac{dz}{\Delta}, \tag{3}$$

si l'on établit entre les quatre quantités a, b, p, q, les deux relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &[(p+q)^2 - 1](\cos a - \cos b)^2 = [(p-q)^2 - 1](\cos a + \cos b)^2 \\ &\qquad = \sin^2 a + \sin^2 b + (p^2 - q^2)(\sin^2 a - \sin^2 b). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Voilà donc l'extension la plus complète qu'on puisse désirer du théorème qui nous a fourni la génération des courbes elliptiques sur le plan. Pour obtenir les courbes de M. Roberts, il suffit de supposer

$$b = \frac{\pi}{2}.$$

Les équations (4) deviennent, dans ce cas,

$$q = 0, \quad p = \pm\frac{1}{\cos a}.$$

On a alors

$$\Delta = \frac{1}{p}\sqrt{-1 + 2(2p^2 - 1)z^2 - z^4},$$

et

$$ds = 2\sqrt{p^2 - 1}\,\frac{dz}{\sqrt{-1 + 2(2p^2 - 1)z^2 - z^4}};$$

ce qui est bien, à un changement insignifiant près, la formule de rectification de laquelle est parti M. Roberts. La courbe dont il s'agit ici a l'équation très-simple

$$\sin\rho\cos\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p}.$$

Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde;

PAR M. E. CATALAN

Les trajectoires orthogonales des cercles situés sur un ellipsoïde et parallèles entre eux, n'ont probablement que très-peu de propriétés remarquables, soit géométriques, soit mécaniques; mais leur équation différentielle, très-difficilement intégrable lorsqu'elle est mise sous la forme qui se présente le plus naturellement, s'intègre, au contraire, avec la plus grande facilité, lorsqu'au moyen d'une transformation de coordonnées, on l'a mise sous une autre forme. Les équations différentielles que l'on sait intégrer étant en assez petit nombre, il n'est peut-être pas tout à fait inutile d'en indiquer une de plus, qui conduit d'ailleurs à des développements analytiques assez remarquables.

1. Soit un ellipsoïde OABC [*], ayant pour centre le point O, et dans lequel les demi-axes, rangés par ordre de grandeurs décroissantes, sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Si, dans le plan de la section principale CA, nous menons un rayon vecteur $OE = OB = b$, le plan BOE coupera l'ellipsoïde suivant un cercle; et il en sera de même pour tous les plans parallèles à celui-là. Les limites de ces cercles, c'est-à-dire les points I et I' où l'ellipsoïde est touché par deux plans parallèles à BOE, sont deux des ombilics de la surface. Enfin, les angles θ et θ', que forment avec OA les directions OE et OI, sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}, \quad \operatorname{tang}\theta' = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

[*] Le lecteur est prié de faire la figure.

2. Si nous rapportons l'ellipsoïde aux droites OE, OB et à une perpendiculaire Oz au plan de ces deux droites, son équation sera, en prenant OE pour axe des x,

$$\frac{(x\cos\theta - z\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x\sin\theta + z\cos\theta)^2}{c^2} = 1;$$

ou, en réduisant, et posant

$$m = +\frac{1}{ac}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}, \quad n^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} - 1,$$

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2mxz + n^2z^2 = b^2.$$

3. Dans cette équation, regardons z comme un paramètre variable, elle représentera une infinité de cercles situés dans le plan des xy. Et comme les projections orthogonales de deux droites perpendiculaires, faites sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont perpendiculaires, les projections sur le plan des xy, des trajectoires cherchées, couperont à angle droit tous les cercles représentés par l'équation (1); elles seront donc les trajectoires orthogonales de ces cercles.

Or l'équation (1) donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+mz}{y};$$

donc, pour les trajectoires cherchées,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+mz}.$$

Éliminant z entre cette dernière équation et l'équation (1), on obtient

$$(2) \qquad \left[y^2 + \frac{n^2-m^2}{m^2}x^2 - b^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{n^2-m^2}{m^2}xy\frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{m^2}y^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui représente les trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde, ou, ce qui est la même chose, les *lignes de plus grandes pentes* de cette surface, relativement à un plan parallèle aux sections circulaires.

4. Il est facile de voir que les projections des ombilics ont pour

coordonnées

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{mb}{\sqrt{n^2 - m^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (2), on reconnaît que cette équation est vérifiée, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à $\frac{dy}{dx}$. Il résulte évidemment de là, que les trajectoires d'une même série de sections circulaires passent toutes par les ombilics correspondants. C'est une propriété que l'on peut vérifier par des considérations géométriques.

On peut vérifier aussi que la projection du contour apparent de l'ellipsoïde, ou l'enveloppe des cercles représentés par l'équation (1), est une ellipse dont les foyers sont précisément les projections des ombilics. Cette ellipse a pour équation

$$(3) \qquad y^2 + \frac{n^2 - m^2}{m^2} x^2 = b^2.$$

5. Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que l'équation (1) tient lieu de deux équations du premier ordre et du premier degré. On aurait obtenu ces deux équations, si l'on avait substitué, dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + mz},$$

successivement les deux valeurs de z tirées de l'équation (1). Considérons, pour fixer les idées, l'une quelconque des courbes représentées par la première de ces équations du premier ordre et du premier degré. Si nous prenons sur cette courbe un point quelconque; que nous portions dans l'équation (1) les coordonnées de ce point, nous obtiendrons deux valeurs numériques de z, lesquelles, étant reportées successivement dans cette même équation (1), nous fourniront deux cercles différents. L'un de ces cercles coupera orthogonalement la courbe que nous considérons, et l'autre cercle coupera à angle droit une des courbes représentées par la seconde équation différentielle. Il n'y aura d'exception que pour les points situés sur l'ellipse (3). En effet, pour chacun de ces points, les deux valeurs correspondantes

de z sont égales entre elles, les deux cercles se confondent, et, par suite, les deux trajectoires sont tangentes l'une à l'autre.

Il résulte de ces observations que si l'on considère sur la surface de l'ellipsoïde une trajectoire quelconque allant du point I au point I', la projection de cette courbe est une ligne qui va du premier foyer de l'ellipse (3) au second foyer, et qui présente un point de rebroussement situé sur la circonférence de cette ellipse. La première partie de cette ligne coupe à angle droit une première série de cercles, et la seconde partie coupe de même à angle droit la seconde série des cercles représentés par l'équation (1).

6. L'intégration de l'équation (2) paraît présenter d'assez grandes difficultés : nous allons les éluder au moyen d'une transformation de coordonnées.

Rapportons la surface aux droites OE, OB et au demi-diamètre OI passant par l'ombilic. Ce demi-diamètre, qui est conjugué de OE, étant représenté par δ, nous aurons

$$\delta^2 = a^2 + c^2 - b^2;$$

et l'équation de l'ellipsoïde sera

$$(4) \qquad \frac{\xi^2 + \eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{\delta^2} = 1.$$

Soient M un point quelconque de la surface, MG la section circulaire passant en ce point, MT la tangente à cette courbe au point M. La tangente à la trajectoire, pour ce même point M, est une perpendiculaire à MT, située dans le plan tangent en M. Elle est donc contenue dans un plan P perpendiculaire à MT. D'ailleurs, le plan MG, parallèle à BE, est perpendiculaire au plan IOE : donc la trace du plan P, sur le plan IOE des $\xi\zeta$, sera perpendiculaire à l'axe des ξ; et, d'un autre côté, cette même trace passe par le centre de la section circulaire MG.

En exprimant ces deux conditions, et en représentant par β l'angle $IOE = \theta' - \theta$, on trouve, pour équation du plan P,

$$(X - \xi) - \frac{\xi}{\eta}(Y - \eta) + (Z - \zeta)\cos\beta = 0.$$

Le plan tangent à l'ellipsoïde, pour le point M, a pour équation

$$(X - \xi)\frac{\xi}{b^2} + (Y - \eta)\frac{\eta}{b^2} + (Z - \zeta)\frac{\zeta}{\delta^2} = 0.$$

La tangente à la trajectoire est donc représentée par l'ensemble de ces deux équations. Éliminant Z, on obtient, pour la projection de cette droite sur le plan BOE,

$$\frac{Y - \eta}{X - \xi} = -\frac{\delta^2 \xi\eta \cos\beta - b^2 \eta\zeta}{\delta^2 \eta^2 \cos\beta + b^2 \xi\zeta}.$$

Égalons le second membre à $\frac{d\eta}{d\xi}$, puis éliminons ζ entre l'équation ainsi formée et l'équation (4), et nous obtiendrons, pour équation différentielle des trajectoires, ou pour transformée de l'équation (2) :

$$(5) \qquad \frac{\xi^2 + \eta^2}{b^2} + \frac{\delta^2 \cos^2\beta\,(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta)^2\,\eta^2}{b^4\,(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta)^2} = 1$$

7. L'équation (5) s'intègre bien aisément. En effet, posons

$$\xi = u\cos\omega, \quad \eta = u\sin\omega;$$

et nous aurons

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{\delta^2\cos^2\beta}{b^4}\sin^2\omega\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 = 1;$$

ou, en prenant encore $u = b\sin\varphi$,

$$d\varphi = \pm\frac{b}{\delta\cos\beta}\frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Cette double équation donne

$$\varphi = \pm\frac{2b}{\delta\cos\beta}\,\mathrm{l.}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\omega + \lambda),$$

λ étant une constante arbitraire.

Nos trajectoires sont donc définitivement représentées par

$$(6) \qquad u = \pm b\sin\left[\frac{2b}{\delta\cos\beta}\,\mathrm{l.}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\omega + \lambda)\right].$$

8. Nous ne nous arrêterons pas à discuter cette formule; nous aimons mieux indiquer les transformations analytiques qu'il faut

employer pour identifier les équations (2) et (5), et, par suite, pour intégrer la première de ces deux équations.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, l'équation (2) tient lieu de deux équations du premier degré en $\frac{dy}{dx}$, qui répondent aux deux valeurs de z tirées de l'équation (1). Afin de procéder avec plus d'ordre, considérons seulement une de ces équations.

On tire de l'équation (1), en prenant seulement le signe + du radical,

$$z = \frac{-mx + \sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}}{n^2}.$$

Cette valeur, substituée dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + mz},$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n^2 y}{(n^2 - m^2)x + m\sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left[(n^2 - m^2)x - m\sqrt{n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2}\right]}{(n^2 - m^2)x^2 + m^2(y^2 - b^2)}.$$

Telle est l'une des racines de l'équation (2).

Les considérations géométriques employées plus haut donnent aisément

$$x = \xi + \zeta\cos\beta, \quad y = \eta, \quad z = \zeta\sin\beta,$$

ou, d'après l'équation (4), et en prenant seulement la valeur positive de ζ, puisque nous avons considéré la valeur positive de z,

$$x = \xi + \frac{\delta}{b}\cos\beta\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad y = \eta.$$

D'après les valeurs de tang θ, tang θ', m et n, on trouve

$$\cos\beta = \cos(\theta' - \theta) = -\frac{1}{b\delta}\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$$

$$= -\frac{mac}{b\delta} = -\frac{bm}{\delta\sqrt{n^2 - m^2}}.$$

Donc

$$(8)\qquad x = \xi + \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad y = \eta.$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'équation (7), calculons à part les fonctions

$$n^2(b^2 - y^2) - (n^2 - m^2)x^2 \quad \text{et} \quad n^2 - m^2(x^2 + m^2(y^2 - b^2)$$

La première devient

$$\begin{aligned} &n^2(b^2 - \eta^2) - (n^2 - m^2)\xi^2 + 2m\sqrt{n^2 - m^2}\,\xi\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2} - m^2(b^2 - \xi^2 - \eta^2) \\ &= (n^2 - m^2)(b^2 - \xi^2 - \eta^2) + 2m\sqrt{n^2 - m^2}\,\xi\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2} + m^2\xi^2 \\ &= \left[m\xi + \sqrt{(n^2 - m^2)(b^2 - \xi^2 - \eta^2)}\right]^2. \end{aligned}$$

La seconde fonction se transforme en

$$\xi\left[(n^2 - m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right]$$

Par suite, le second membre de l'équation (7) devient

$$\frac{\eta\left[(n^2 - 2m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right]}{\xi\left[(n^2 - 2m^2)\xi - 2m\sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}\right]} = \frac{\eta}{\xi}.$$

D'ailleurs,

$$dx = d\xi + \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\,\frac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad dy = d\eta;$$

donc l'équation (7) transformée est

$$(9)\qquad \frac{d\eta}{d\xi + \dfrac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\,\dfrac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}}} = \frac{\eta}{\xi}.$$

et il est facile de vérifier qu'elle est identique avec l'une des deux dans lesquelles se décompose l'équation (5).

Un calcul tout à fait semblable au précédent prouverait que les formules

$$(10)\qquad x = \xi + \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\sqrt{b^2 - \xi^2 - \eta^2}, \quad y = \eta,$$

ramèneraient l'équation

$$(11)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left[(n^2-m^2)x + m\sqrt{n^2(b^2-y^2)-(n^2-m^2)x^2}\right]}{(n^2-m^2)x^2 + m^2(y^2-b^2)}$$

à la suivante,

$$(12)\qquad \frac{d\eta}{d\xi - \frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}\,\frac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\sqrt{b^2-\xi^2-\eta^2}}} = \frac{\eta}{\xi},$$

laquelle rentre aussi dans l'équation (5).

9. A l'aide des formules (8) ou (10), nous avons ramené les équations (7) ou (11) aux équations (9) ou (12), lesquelles sont comprises l'une et l'autre dans l'équation (5). Conséquemment, nous pouvons regarder comme effectuée la transformation de l'équation (2) dans l'équation (5). Cette marche indirecte était la seule praticable : si l'on substitue directement les formules (8) ou (10) dans l'équation (2), et qu'on essaye de parvenir à l'équation (5), on arrive à des calculs qui paraissent véritablement inextricables. Du reste, ces calculs ne présentent aucun intérêt ; car le problème que nous nous étions proposé, c'est-à-dire l'intégration de l'équation (2), nous paraît complétement résolu.

EXTRAITS DE DEUX LETTRES ADRESSÉES A M. LIOUVILLE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS

Dublin, le 29 décembre 1846.

» . . . . Les théorèmes suivants, qui concernent les lignes géodésiques sur l'ellipsoïde, quoiqu'ils soient bien simples et n'exigent aucun calcul, seront, je l'espère, dignes de votre attention.

» J'ai déjà fait remarquer, dans un Mémoire dont vous m'avez fait l'honneur de communiquer les résultats à l'Académie des Sciences, que les lignes géodésiques qui passent par un ombilic passent aussi par l'ombilic opposé. On voit de plus, en ayant égard à la symétrie de la surface, que si deux de ces lignes forment entre elles au premier ombilic un certain angle, elles se rencontreront encore sous le même angle à l'autre ombilic.

» Par une conséquence facile :

» 1°. Le triangle géodésique, dont les points angulaires sont les ombilics contigus situés aux côtés opposés de l'axe *minimum*, et un point quelconque de la section contenant l'axe *moyen* et l'axe *maximum* de la surface, aura deux angles droits pour la somme de ses angles à la base.

» La somme de ses côtés sera la demi-circonférence de la section principale perpendiculaire à l'axe moyen.

» Il est évident que cette propriété a son analogue dans la géométrie sphérique.

» 2°. Si d'un ombilic nous tirons une ligne géodésique qui forme un angle droit avec la section de la surface qui passe par les ombilics, cette ligne passera par l'extrémité de l'axe *moyen* de la surface.

» Il suit de là qu'on peut passer sur la surface d'une des extrémités de l'axe *moyen* à l'autre par trois chemins géodésiques distincts, dont les longueurs sont les demi-circonférences des sections principales de la surface. »

« Dublin, le 29 janvier 1847

» ... J'ai l'honneur de vous envoyer quelques théorèmes nouveaux sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde, qui, je l'espère, mériteront votre attention [*]. Les résultats principaux auxquels je suis arrivé consistent dans la forme sous laquelle j'ai mis l'intégrale seconde de l'équation de la ligne géodésique, qui passe par un ombilic, en exprimant la constante arbitraire en fonction de l'angle que cette ligne forme avec la section principale de la surface contenant les ombilics; et aussi dans la découverte d'une fonction d'une ligne géodésique issue d'un ombilic, et terminée par un point (μ, ν), qui paraît être analogue au sinus d'un arc circulaire. La simplicité des résultats que je viens de trouver et leur analogie avec les propriétés des sections coniques donnent lieu d'espérer qu'une discussion approfondie des arcs des lignes de courbure jettera quelque jour sur les intégrales abéliennes, qui se rencontrent dans cette partie des mathématiques. Il est bien probable que les fonctions algébriques par lesquelles la comparaison des arcs des lignes de courbure s'effectue, comme cela a été démontré théoriquement par Abel, s'expriment avec simplicité en fonction de quelques lignes remarquables, liées avec la géométrie de la surface. »

---

[*] Le Mémoire dont M. Michael Roberts parle ici, mais auquel il a fait depuis quelques changements qui en ont prolongé l'impression, paraîtra dans le prochain cahier. (J. L.)

NOTE

Sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

THÉORÈME I. « Il est possible de trouver une fonction V de x, » y, z [*] qui s'évanouisse quand x, y ou z devient infinie, et qui » satisfasse à l'équation

$$(a) \qquad \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dz}\right)}{dz} = 4\pi\zeta,$$

» pour toutes les valeurs réelles des variables; α étant une fonction » des variables continue ou discontinue, mais ayant toujours une » valeur réelle, et ζ une fonction réelle qui s'évanouit quand les va- » leurs de x, y, z ne sont pas comprises dans les limites données par » l'équation d'une surface fermée. »

THÉORÈME II. « Il n'y a qu'une solution de l'équation (a) qui ait » lieu pour toutes les valeurs réelles des variables x, y, z, avec la » condition de s'évanouir lorsqu'une de ces variables devient in- » finie. »

1. Pour démontrer le théorème I, soit U la valeur de l'intégrale

$$\int\int\int \frac{\zeta' dx' dy' dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}},$$

[*] Je ne m'occupe ici que du cas de trois variables, pour éviter des complications inutiles, les applications physiques étant comprises dans ce cas.

étendue à tout l'espace où ζ' a une valeur finie. Désignons maintenant par V une fonction quelconque de x, y, z, qui s'évanouisse lorsqu'une de ces variables devient infinie; et soit

$$(b)\quad Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\alpha\frac{dV}{dx} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\alpha\frac{dV}{dy} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\alpha\frac{dV}{dz} - \frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dz}\right)^2\right]dxdydz.$$

L'intégrale Q dépend de la fonction V, et en disposant de V on pourra évidemment faire prendre à Q des valeurs positives plus grandes qu'une quantité donnée quelconque. Il n'y a donc pour la valeur de Q aucune limite supérieure, mais il y a une limite inférieure puisque Q est toujours > 0; il doit donc exister une fonction V de x, y, z qui rend Q un minimum. Or, en appliquant le calcul des variations, on trouve, après une intégration par parties (suivant le procédé ordinaire) dans laquelle il faut remarquer que les parties intégrées s'évanouissent aux limites,

$$(c)\quad \frac{1}{2}\delta Q = \int\int\int \delta V\left[\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz} - \frac{dU}{dz}\right)\right]dxdydz.$$

Mais on a, d'après la valeur de U,

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 4\pi\zeta;$$

l'équation précédente devient donc

$$(d)\quad \frac{1}{2}\delta Q = \int\int\int \delta V\left[\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz}\right) - 4\pi\zeta\right]dxdydz$$

On conclut de là que la fonction V qui répond au minimum Q de l'intégrale (b), minimum dont l'existence a été démontrée plus haut, satisfait à l'équation

$$(a)\quad \frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dV}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dV}{dz}\right) = 4\pi\zeta.$$

2. Pour démontrer le théorème II énoncé ci-dessus, considérons, d'une part une fonction V satisfaisant à l'équation (a) et la valeur correspondante Q de l'intégrale (b), puis d'autre part la valeur Q_1 de cette même intégrale (b), qui correspond à une fonction V_1 différente de V, c'est-à-dire à une fonction V_1 telle que la différence $V_1 - V$, que nous désignerons par φ, n'est pas égale à zéro pour toutes les valeurs des variables. Comme V_1, aussi bien que V, doit s'évanouir

lorsqu'une des variables x, y, z devient infinie, il en sera de même de φ. En remarquant que

$$\left(\alpha\frac{dV}{dx}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2=\left(\alpha\frac{dV}{dx}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)^2+2\left(\alpha\frac{dV}{dx}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dx}+\alpha^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$

on trouve

$$Q_1=Q+2\int\int\int\left[\left(\alpha\frac{dV}{dx}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dx}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dx}+\left(\alpha\frac{dV}{dy}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dy}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dy}+\left(\alpha\frac{dV}{dz}-\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dz}\right)\alpha\frac{d\varphi}{dz}\right]dx\,dy\,dz$$
$$+\int\int\int\alpha^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation s'évanouit parce que V satisfait à l'équation (a); on le verra sans peine en effectuant une intégration par parties. Il reste donc simplement

$$(c)\qquad Q_1=Q+\int\int\int\alpha^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz;$$

et comme la quantité placée sous les signes d'intégration ne peut pas être constamment nulle, sans quoi φ se réduirait à une simple constante et par suite à zéro puisque l'on a $\varphi=0$ lorsqu'une des variables x, y, z est infinie, ce résultat montre que Q_1 est $>Q$. Mais si V_1 était aussi une solution de (a), on aurait de même $Q>Q_1$, ce qui n'est pas possible. J'en conclus que V_1 n'est pas une solution de (a); c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir deux solutions différentes de cette équation.

Ce théorème est utile dans les théories de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de l'hydrodynamique; j'espère donner plus tard quelques développements à ce sujet.

Dans les applications qui présentent le plus d'intérêt, il faut considérer des transitions subites dans la valeur de α. Par exemple, si α a une valeur constante dans tout l'espace extérieur à une surface fermée S, dans l'intérieur de laquelle α est infinie, notre analyse convient au cas d'un corps conducteur S soumis à l'influence d'une masse électrique donnée $(\int\int\int\zeta\,dx\,dy\,dz)$, et cette application ne présente aucune difficulté. On en tire, en effet les démonstrations données par Green, que la solution analytique du problème de la distribution d'électricité dans ces circonstances est possible et qu'elle est unique.

Dans une application à l'hydrodynamique, ou à un certain problème

de magnetisme, il faut considérer un espace dans lequel la valeur de α soit zéro. L'interprétation du résultat ne présente aucune difficulté, mais il est plus difficile de bien comprendre comment la demonstration telle que je l'ai donnée plus haut se prête à ce cas. En essayant de l'expliquer nettement, j'ai trouvé une démonstration directe du theoreme suivant, qui renferme le résultat dont il s'agit :

« Il est possible de trouver une fonction V qui s'évanouisse pour » les valeurs infiniment grandes des variables x, y, z, et satisfasse à » l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

» pour tous les points exterieurs à une surface fermée S, avec cette » condition

$$\frac{dV}{dn} = F,$$

» dans laquelle F est une fonction arbitraire des coordonnées d'un » point sur la surface S, et dn est l'élément d'une normale extérieure » à la surface en ce point. »

Pour le démontrer, considérons l'integrale

$$\int\int\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] dxdydz = Q,$$

relative à l'espace extérieur à S. Parmi toutes les fonctions V qui vérifient la condition

$$\int\int VFdS = A,$$

où A est une quantité quelconque, il y en a une pour laquelle l'intégrale Q est un minimum. Une fonction V, ainsi déterminée, satisfait aux équations

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{dV}{dn} = cF$$

(où c est une constante), comme on s'en assure par le calcul des variations. Suivant les valeurs de A, c aura des valeurs proportionnelles; on peut prendre A telle que $c = 1$. De là on conclut le théorème enoncé. Il serait facile d'ajouter une démonstration, que la solution du probleme de la détermination de V sons ces conditions est unique.

Sur le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ *et quelques-unes de ses applications,*

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

I.

Définition du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$, *d'après Legendre et M. Jacobi.*

Soient a, b deux nombres entiers premiers entre eux, qui ne sont pas tous deux négatifs et dont le second est impair : $\left(\frac{a}{b}\right)$ sera $+1$ ou -1, selon les cas dont voici l'énumération :

1°. Si b est un nombre premier positif, $\left(\frac{a}{b}\right)$ sera $+1$ ou -1, selon que b sera résidu ou non-résidu quadratique de p : autrement, $\left(\frac{a}{b}\right)$ sera le reste ± 1 de $a^{\frac{b-1}{2}}$ divisé par b (LEGENDRE).

2°. Si b est un nombre composé positif, $b = pqr\ldots$, les facteurs $p, q, r, \ldots$ étant des nombres premiers égaux ou non, on aura

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{pqr\ldots}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)\left(\frac{a}{r}\right)\cdots \quad \text{(JACOBI)}.$$

3°. Si b est un nombre négatif, on fera

$$\left(\frac{a}{-b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right),$$

ou bien encore, en posant

$$\left(\frac{a}{-b}\right) = \left(\frac{a}{-1}\right)\left(\frac{a}{b}\right),$$

on fera

$$\left(\frac{a}{-1}\right) = 1 \quad \text{(JACOBI)}.$$

Voici des conséquences immédiates de ces définitions :

4°. $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{2k} = 1, \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{2k+1} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

5°. $$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)\cdots = \left(\frac{a}{pq\ldots}\right).$$

6°. $$\left(\frac{abc\ldots}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\cdots$$

7°. $$\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{l}{p}\right),$$

si l'on a $$k \equiv l \pmod{p}.$$

8°. $$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

A ces propositions on joindra les suivantes, dont la démonstration exige quelques développements :

9°. $$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{-2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}.$$

10°. $$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right),$$

ou

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Dans cette dernière équation, p et q sont deux nombres impairs.

II.

Sur la démonstration des équations fondamentales.

Si l'on voulait énoncer les propositions exprimées par les équations précédentes, il suffirait de dire que les nombres premiers à un nombre impair p se partagent en deux classes : la première renfermant les nombres k, qui donnent

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1;$$

la seconde renfermant les nombres k, qui donnent

$$\left(\frac{k}{p}\right) = -1.$$

Pour p premier, la première classe est celle des résidus quadratiques, et la seconde, celle des non-résidus.

Pour p composé, $p = qrs\ldots$ (q, r, s,... étant premiers), la première classe est celle des nombres qui sont non-résidus quadratiques d'un nombre pair (0, 2, 4,...) des facteurs q, r, s,...; la seconde classe est celle des nombres qui sont non-résidus d'un nombre impair des mêmes facteurs q, r, s,...

Voici maintenant les principaux énoncés :

« Des nombres congrus suivant le module p sont de même classe.

» Un produit $abc\ldots$ sera de première ou de seconde classe relativement à p, selon que les facteurs (a, b, c,...) de seconde classe » seront en nombre pair ou impair.

» Le nombre -1 est de première classe relativement aux nombres » de forme $4q+1$, et de seconde classe relativement aux nombres de » forme $4q-1$.

» Le nombre 2 est de première classe relativement aux nombres de » forme $8k \pm 1$, et de seconde classe relativement aux nombres de » forme $8k \pm 3$.

» Le nombre -2 est de première classe relativement aux nombres » de forme $8k+1$, $8k+3$, et de seconde classe relativement aux » nombres $8k+5$, $8k+7$.

» Les nombres premiers positifs p et q sont de même classe, l'un » par rapport à l'autre quand p et q ne sont pas tous deux de forme $4q-1$. C'est le contraire si p et q sont tous deux de forme $4q-1$.

Cette dernière proposition est la loi de réciprocité de Legendre.

» La loi de Legendre s'étend à deux nombres quelconques positifs » impairs. »

La démonstration de l'équation

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

pour p composé, revient à montrer qu'en posant $p = qrs\ldots$, ce qui donne

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{-1}{r}\right)\left(\frac{-1}{s}\right)\ldots = (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{r-1}{2}+\frac{s-1}{2}+\ldots},$$

on peut remplacer l'exposant $\frac{q-1}{2} + \frac{r-1}{2} + \frac{s-1}{2} + \cdots$ par l'exposant $\frac{qrs\ldots-1}{2} = \frac{p-1}{2}$. Il suffit donc de démontrer que les deux nombres $\frac{q-1}{2} + \frac{r-1}{2} + \cdots$ et $\frac{qr\ldots-1}{2}$ diffèrent d'un multiple de 2, puisque dans $(-1)^{\alpha+\beta} = (-1)^{\alpha}(-1)^{2\beta}$ on peut supprimer le facteur $(-1)^{2\beta} = 1$, quel que soit le signe de β. Or

$$\frac{q-1}{2} + \frac{r-1}{2} = \frac{q+r-2}{2};$$

donc

$$\frac{qr-1}{2} - \left(\frac{q-1}{2} + \frac{r-1}{2}\right) = \frac{qr-q-r+1}{2} = \frac{(q-1)(r-1)}{2}.$$

nombre pair. Ainsi l'exposant $\frac{qr-1}{2}$ peut remplacer $\frac{q-1}{2} + \frac{r-1}{2}$. La démonstration est la même pour tant de facteurs qu'on voudra.

Quand l'équation

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

a été démontrée pour p premier, on passe, comme pour $\left(\frac{-1}{p}\right)$, au cas de p composé; cela fait, $\left(\frac{2}{p}\right)$ et $\left(\frac{-1}{p}\right)$ donnent $\left(\frac{-2}{p}\right)$. Il suffit donc de démontrer l'équation

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

pour p premier. C'est ce que M. Gauss fait ainsi :

Divisez les produits

$$k, \quad 2k, \quad 3k, \ldots, \quad \frac{p-1}{2}k,$$

par p, de manière à obtenir des restes positifs et $< p$,

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \ldots, \quad r_{\frac{p-1}{2}};$$

si les restes $> \frac{p}{2}$ sont en nombre ν, vous aurez

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\nu}.$$

Posez, en effet,

$$ak = p \cdot e\left(\frac{ak}{p}\right) + r_a;$$

a étant successivement $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, vous aurez $\frac{p-1}{2}$ équations qui, par la multiplication, donneront

$$1.2.3\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right) k^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\nu}\, 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2} \mod. p,$$

d'où

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\nu}.$$

Pour $k = 2$, ou $k = -2$, on trouve de suite les valeurs de ν, et l'on en conclut celles de $\left(\frac{2}{p}\right)$ et $\left(\frac{-2}{p}\right)$.

Quant à la démonstration de l'équation

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

pour le cas de p, q nombres premiers, positifs et impairs, voici comment M. Gauss l'a trouvée. Puisque l'on a

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\nu},$$

il suffit de savoir si ν est pair ou impair; or par l'addition des $\frac{p-1}{2}$ équations

$$a.k = p.e\left(\frac{ak}{p}\right) + r_a,$$

on trouve sans peine

$$\nu \equiv e\left(\frac{k}{p}\right) + e\left(\frac{2k}{p}\right) + \cdots + e\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \mod. 2,$$

k étant impair; ou bien encore, en posant

$$\varphi(k, p) = e\left(\frac{k}{p}\right) + e\left(\frac{2k}{p}\right) + \cdots + e\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right),$$

$$\nu \equiv \varphi(k, p) \mod. 2).$$

Puisque l'on a

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\varphi(q,p)},$$

et de même

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\varphi(p,q)},$$

il en résultera

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\varphi(q,p)+\varphi(p,q)}.$$

Or M. Gauss a montré, par une transformation très-simple, que l'on a toujours

$$\varphi(q,p) + \varphi(p,q) = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2};$$

de là la loi de réciprocité.

Au reste, comme l'a remarqué M. Eisenstein (Journal de M. Crelle, tome XXVIII), l'équation

$$\varphi(q,p) + \varphi(p,q) = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$$

résulte presque immédiatement d'une construction géométrique fort simple.

Prenez deux axes de coordonnées rectilignes Ox, Oy, divisez-les, à partir de l'origine O, en parties égales à l'unité; par les points de division de chaque axe menez des parallèles à l'autre: ces deux systèmes de droites parallèles détermineront par leur intersection tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers. Menez par l'origine la droite ayant pour équation

$$y = \frac{q}{p}x,$$

puis formez le parallélogramme ayant pour cotés

$$Ox = \frac{1}{2}(p+1), \quad Oy = \frac{1}{2}(q+1).$$

Il renfermera $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ points d'intersection. La droite $y = \frac{q}{p}x$ partagera le parallélogramme en deux parties, dont l'une contiendra $\varphi(p,q)$ points d'intersection, et l'autre $\varphi(q,p)$; on aura donc

l'équation

$$\varphi(p, q) + \varphi(q, p) = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

L'assertion précédente résulte de ce que pour toute courbe $y = \varphi x$ si l'on fait $x = m$, m étant un entier, l'expression $e\varphi(m)$ indiquera combien, sur l'ordonnée répondant à l'abscisse entière m, il y a entre l'axe des x et la courbe, de points ayant une ordonnée aussi entière. Dans certains cas, mais non dans celui de la ligne $y = \frac{q}{p}x$, un point pourrait se trouver sur la courbe.

Quand l'équation

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

a été prouvée pour des nombres positifs premiers, on passe sans difficulté au cas de p premier et q composé, puis de ce cas à celui de p et q composés; enfin, de ce cas, on passe à celui où l'un des nombres p, q est négatif. Pour la démonstration de ce dernier cas, il suffit de remarquer que l'on a toujours $(-1)^{\alpha} = (-1)^{-\alpha}$, c'est-à-dire que l'on peut changer le signe de l'exposant de -1.

III.

Calcul du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$.

C'est une conséquence directe des formules qui précèdent.

Soit, pour exemple, proposé de calculer $\left(\frac{-3778}{773}\right)$; comme on a $-3778 = -1 \cdot 2 \cdot 1889$, il en résultera

$$\left(\frac{-3778}{773}\right) = \left(\frac{-1}{773}\right)\left(\frac{2}{773}\right)\left(\frac{1889}{773}\right);$$

et comme $773 = 4 \cdot 193 + 1 = 8 \cdot 96 + 5$, on aura

$$\left(\frac{-1}{773}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{773}\right) = -1, \quad \left(\frac{-3778}{773}\right) = -\left(\frac{1889}{773}\right).$$

D'ailleurs la division donne $1889 = 2 \cdot 773 + 343$; de là

$$\left(\frac{1889}{773}\right) = \left(\frac{343}{773}\right).$$

Par la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{343}{773}\right) = \left(\frac{773}{343}\right);$$

or $773 = 343.2 + 87$, donc

$$\left(\frac{773}{343}\right) = \left(\frac{87}{343}\right).$$

Mais, par la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{87}{343}\right) = -\left(\frac{343}{87}\right);$$

et comme $343 = 87.3 + 82$, il en résulte

$$\left(\frac{343}{87}\right) = \left(\frac{82}{87}\right) = \left(\frac{2}{87}\right)\left(\frac{41}{87}\right) = \left(\frac{41}{87}\right) = \left(\frac{87}{41}\right).$$

De plus, $87 = 2.41 + 5$ donne

$$\left(\frac{87}{41}\right) = \left(\frac{5}{41}\right) = \left(\frac{41}{5}\right),$$

et $41 = 5.8 + 1$ donne enfin

$$\left(\frac{41}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1.$$

On aura donc

$$\left(\frac{-3778}{773}\right) = -1 \times -\left(\frac{343}{87}\right) = \left(\frac{343}{87}\right) = 1.$$

Ainsi tout dépend de la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Or cette recherche peut être effectuée de plusieurs manières.

On peut prendre tous les quotients par défaut, ou de manière à avoir des restes positifs plus petits que les diviseurs; c'est la méthode ordinaire. On peut prendre les quotients de manière à obtenir des restes impairs; on obtient ainsi l'algorithme de M. Eisenstein (Journal de M. Crelle, tome XXVII), dont l'énoncé est très-simple. On peut prendre les quotients de manière à obtenir des restes pairs $\pm 2^m r$, en supposant r impair; dans ce cas, r sert de nouveau diviseur. Le nombre des divisions devient d'autant moindre que les facteurs 2^m sont

plus grands. L'algorithme est d'un énoncé moins simple; mais, en général, il est préférable pour la brièveté du calcul.

Algorithme de M. Eisenstein. — Soit à calculer $\left(\frac{p}{p_1}\right)$, où l'on suppose p, p_1 positifs impairs premiers entre eux et tels que $p > p_1$, tous les cas pouvant se ramener à celui-là. On divisera p par p_1, on prendra le quotient pair afin d'avoir un reste impair, et comme il pourra être positif ou négatif, on le représentera par $\varepsilon_1 p_2$, ε_1 étant ± 1, et p_2 un entier positif $< p_1$. On opérera sur p_1 et p_2 comme sur p et p_1, et comme ces deux nombres sont premiers entre eux, on finira par tomber sur un reste $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$. Soient donc les équations

$$p = p_1 Q_1 + \varepsilon_1 p_2, \quad p_1 = p_2 Q_2 + \varepsilon_2 p_3, \ldots, \quad p_{i-1} = p_i Q_i + \varepsilon_i p_{i+1}, \ldots,$$
$$p_n = p_{n+1} Q_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

Si l'on représente par ν le nombre des équations

$$p_{i-1} = p_i Q_i + \varepsilon_i p_{i+1},$$

où p_i et $\varepsilon_i p_{i+1}$ sont tous deux de forme $4k - 1$, on aura

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = (-1)^{\nu}.$$

Cela se prouve sans difficulté comme plus haut.

Autre algorithme. — Si l'on prend, au contraire, les quotients impairs afin d'avoir des restes pairs, on aura la suite d'équations

$$p = p_1 Q_1 + 2^{m_1} \varepsilon_1 p_2, \quad p_1 = p_2 Q_2 + 2^{m_2} \varepsilon_2 p_3, \ldots, \quad p_{i-1} = p_i Q_i + 2^{m_i} \varepsilon_i p_{i+1},$$
$$p_n = p_{n+1} Q_{n+1} + 2^{m_{n+1}} \varepsilon_{n+1}$$

Si l'on représente par ν le nombre des équations

$$p_{i-1} = p_i Q_i + 2^{m_i} \varepsilon_i p_{i+1},$$

où p_i et $\varepsilon_i p_{i+1}$ sont tous deux de forme $4k - 1$, et par μ le nombre des équations, où à un diviseur p_i de forme $8k \pm 3$ réponde un facteur 2^{m_i} à exposant impair, on aura

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = (-1)^{\mu + \nu}.$$

Autre algorithme. — Si l'on fait la recherche du plus grand commun diviseur à la manière ordinaire, et que l'on représente les restes successifs par $2^{m_1}p_2$, $2^{m}p_3, \ldots, 1$; et que l'on désigne par

λ le nombre des exposants impairs m_i répondant à $p_i = 8k \pm 3$;

μ le nombre des exposants impairs m_i répondant à $p_{i+2} = 8k \pm 3$;

ν le nombre des diviseurs p_i de forme $4k - 1$ répondant à des restes où p_{i+1} a la même forme;

on aura

$$\left(\frac{p}{p_1}\right) = (-1)^{\lambda+\mu+\nu}.$$

En appliquant ces trois règles à $\left(\frac{3785}{2933}\right)$, on trouve :

1° $3785 = 2933.2 - 2081$, $2933 = 2081.2 - 1229$, $2081 = 1229.2 - 377$;
$1229 = 377.4 - 279$, $377 = 279.2 - 181$, $279 = 181.2 - 85$;
$181 = 85.2 + 11$, $85 = 11.8 - 3$, $11 = 3.4 - 1$.

Ici $\nu = 2$ et $\left(\frac{3785}{2933}\right) = 1$.

2°. La deuxième règle donne

$3785 = 2933.1 + 4.213$, $2933 = 213.13 + 4.41$, $213 = 41.5 + 8$.

Ici $\mu = 0$, $\nu = 0$ et $\left(\frac{3785}{2933}\right) = 1$.

3°. La troisième règle donne

$3785 = 2933.1 + 852$, $2933 = 852.3 + 377$, $852 = 377.2 + 98$;
$377 = 98.3 + 83$, $98 = 83.1 + 15$, $83 = 15.5 + 8$;
$15 = 8.1 + 7$, $8 = 7.1 + 1$.

Ici, à cause de $852 = 2^2.213$, $98 = 2.49$, $8 = 2^3$, on trouve

$$\lambda = 0,\ \mu = 1,\ \nu = 1 \text{ et } \left(\frac{3785}{2933}\right) = 1.$$

Il est bon de faire remarquer que, dans tous les cas, si l'on est

conduit à une division donnant le reste $\pm 2^m r^2$, toutes les divisions suivantes sont inutiles pour le calcul du symbole $\left(\frac{p}{p_1}\right)$. (Troisième exemple : $98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2$.)

Règle tirée du calcul de

$$\varphi(k, p) = e\left(\frac{k}{p}\right) + e\left(\frac{2k}{p}\right) + \ldots + e\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right).$$

M. Gauss a prouvé que l'on a, pour k impair,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\varphi(k, p)},$$

et, pour k pair,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\varphi(k, p) + \frac{p^2-1}{8}}.$$

Il a d'ailleurs donné un algorithme qui fournit la valeur exacte de $\varphi(k, p)$, d'où l'on déduit une règle fort simple pour déterminer si $\varphi(k, p)$ est pair ou impair. Cette même règle donnera donc la valeur de $\left(\frac{k}{p}\right)$ pour le cas de p nombre premier. Nous verrons plus loin qu'elle s'étend au cas de p nombre impair quelconque. L'algorithme de M. Gauss résout donc complétement la question : il est également fondé sur la recherche d'un plus grand commun diviseur. Mais, comme il emploie non-seulement les restes, mais encore les quotients, les algorithmes précédents seront préférables pour la brièveté du calcul. Pour cet algorithme, *voyez* le Mémoire intitulé : *Démonstration nouvelle et développements nouveaux du théorème fondamental de la théorie des résidus quadratiques*, présentés à la Société royale des Sciences de Göttingue, le 11 février 1817, par M. C.-F. Gauss. *Voyez* aussi le tome III de ce Journal, page 1[illegible].

IV

Première application. — Détermination du signe des sommes

$$S = \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad C = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

prises de $i = 0$ à $i = p - 1$, h est premier à p.

Dans son Mémoire sur la sommation de certaines séries singulières, M. Gauss a donné une règle pour la détermination du signe des sommes S, C, dont la valeur absolue est $\sqrt{p}$, quand elles ne sont pas nulles.

Cette règle peut être réduite à une expression plus simple, et si l'on pose $p = 2^m p'$, p' étant impair, le symbole $\left(\frac{h}{p'}\right)$ fera connaître les sommes S et C au moyen des règles suivantes. Soient

$$S = \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = A\left(\frac{h}{p'}\right)\sqrt{p}, \quad C = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = B\left(\frac{h}{p'}\right)\sqrt{p},$$

les nombres A et B auront les valeurs suivantes :

$m = 0$, $p' = 4q + 1$, $A = 0$, $B = 1$;

$m = 0$, $p' = 4q - 1$, $A = 1$, $B = 0$;

$m = 1$, $p' = 4q \pm 1$, $A = 0$, $B = 0$;

$m = 2n$, $p' = 4q + 1$, $A = (-1)^{\frac{h-1}{2}}$, $B = 1$;

$m = 2n$, $p' = 4q - 1$, $A = 1$, $B = (-1)^{\frac{h-1}{2}}$;

$m = 2n + 1$, $p' = 4q + 1$, $A = (-1)^{\frac{h-1}{8}\frac{h-3}{8}}$, $B = (-1)^{\frac{h^2-1}{8}}$;

$m = 2n + 1$, $p' = 4q - 1$, $A = (-1)^{\frac{h^2-1}{8}}$, $B = (-1)^{\frac{h-1}{8}\frac{h-3}{8}}$.

Ce tableau montre que le changement de $p' = 4q + 1$ en $p' = 4q - 1$ ne fait que changer A en B, et réciproquement. Je vais présenter brièvement la démonstration, renvoyant pour plus de détails au Mémoire de M. Gauss.

Si l'on pose

$$\sum x^{i^2 h} = 1 + x^h + x^{4h} + x^{9h} + \ldots = x^{(p-1)^2 h} = F(h, p),$$

sous la condition de h premier à p et de $x^p = 1$, qui donne

$$x = \cos\frac{2\pi}{p} + \sin\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1},$$

on aura, pour cette valeur de x,

$$F(h, p) = \sum\left(\cos i^2\frac{2h\pi}{p} + \sin i^2\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}\right) = C + S\sqrt{-1}.$$

C'est donc du calcul de $F(h, p)$ que dépend celui des sommes désignées par S et C.

Soit $p = a.b.c\ldots$, les nombres $a, b, c, \ldots$ étant premiers entre eux : on sait que, pour trouver un nombre k tel que l'on ait

$$k \equiv \alpha \pmod{a}, \quad k \equiv \beta \pmod{b}, \quad k \equiv \gamma \pmod{c}, \quad \text{etc.},$$

il suffit de poser

$$A\frac{p}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \quad B\frac{p}{b} \equiv 1 \pmod{b}, \quad C\frac{p}{c} \equiv 1 \pmod{c}, \quad \text{etc.},$$

et de prendre

$$k \equiv A\frac{p}{a}\alpha + B\frac{p}{b}\beta + C\frac{p}{c}\gamma + \ldots \pmod{p = abc\ldots}.$$

Or, si l'on prend successivement :

Pour α, les nombres $1, 4, 9, \ldots, (a-1)^2$;
Pour β, les nombres $1, 4, 9, \ldots, (b-1)^2$,
Pour γ, les nombres $1, 4, 9, \ldots, (c-1)^2$;

et ainsi de suite, on trouvera,

Pour k ou i^2, les nombres $1, 4, 9, \ldots, (p-1)^2$.

Il suit de là que l'équation

$$x^{i^2 h} = \left(x^{\frac{p}{a}}\right)^{\alpha^2 A h} \cdot \left(x^{\frac{p}{b}}\right)^{\beta^2 B h} \cdot \left(x^{\frac{p}{c}}\right)^{\gamma^2 C h} \ldots$$

donnera, en supposant

$$x^{\frac{p}{a}} = x_1, \quad x^{\frac{p}{b}} = x_2, \quad x^{\frac{p}{c}} = x_3, \quad \text{etc.},$$

et, par suite,

$$x_1^a = 1, \quad x_2^b = 1, \quad x_3^c = 1, \quad \text{etc.},$$

l'équation fondamentale

$$F(h, p) = F(h, abc\ldots) = F(Ah, a).F(Bh, b).F(Ch, c)\ldots,$$

en supposant

$$F(Ah, a) = 1 + x_1^{Ah} + x_1^{2Ah} + x_1^{3Ah} + \ldots + x_1^{(a-1)Ah} = \sum x_1^{\alpha Ah};$$

et ainsi des autres.

Il suffit donc de calculer $F(Ah, a)$ dans l'hypothèse de a premier ou puissance d'un nombre premier.

Soit donc $a = q^m$; comme dans la somme $\sum x_1^{\alpha Ah}$ on peut négliger, comme étant égale à zéro, la somme des termes où α n'est pas divisible par q, on trouvera sans difficulté, pour le cas de $q = 2$,

1°. $$F(Ah, 2) = 0;$$

2°. $$F(Ah, 4) = \left(1 + \sin\frac{Ah\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\sqrt{4},$$

$$= \left[1 + (-1)^{\frac{Ah-1}{2}}\sqrt{-4}\right]\sqrt{4},$$

et généralement,

$$F(Ah, 2^{2m}) = \left[1 + (-1)^{\frac{Ah-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{2^{2m}}.$$

3°. $$F(Ah, 8) = \left(\cos\frac{Ah\pi}{4} + \sin\frac{Ah\pi}{4}\sqrt{-1}\right)\sqrt{8},$$

$$= (-1)^{\frac{Ah^2-1}{8}}\left[1 + (-1)^{\frac{Ah-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{8},$$

et généralement,

$$F(Ah, 2^{2m+1}) = (-1)^{\frac{Ah^2-1}{8}}\left[1 + (-1)^{\frac{Ah-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{2^{2m+1}}.$$

Pour le cas de q premier impair, les formules de M. Gauss

donneront

$$F(Ah, q) = \left(\frac{Ah}{q}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{q},$$

$$F(Ah, q^\alpha) = \left(\frac{Ah}{q^\alpha}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{q^\alpha-1}{2}\right)^2}\sqrt{q^\alpha}.$$

D'après ces formules particulières, si l'on pose $p = q^\alpha r^\beta s^\gamma \ldots$, q, r, s étant des nombres premiers impairs, on aura

$$F(h, p) = F(Ah, q^\alpha) \cdot F(Bh, r^\beta) \cdot F(Ch, s^\gamma) \ldots,$$

ou, ce qui revient au même par la substitution,

$$F(h, p) = \left(\frac{Ah}{q^\alpha}\right)\left(\frac{Bh}{r^\beta}\right)\left(\frac{Ch}{s^\gamma}\right)\cdots(\sqrt{-1})^{\left(\frac{q^\alpha-1}{2}\right)^2+\left(\frac{r^\beta-1}{2}\right)^2+\left(\frac{s^\gamma-1}{2}\right)^2+\ldots}\sqrt{p}.$$

Or, d'après les règles pour le calcul des symboles $\left(\frac{Ah}{q^\alpha}\right)$, etc., on trouve

$$\left(\frac{Ah}{q^\alpha}\right)\left(\frac{Bh}{r^\beta}\right)\left(\frac{Ch}{s^\gamma}\right)\cdots = \left(\frac{h}{p}\right)\cdot\left(\frac{A}{q^\alpha}\right)\left(\frac{B}{r^\beta}\right)\left(\frac{C}{s^\gamma}\right)\cdots.$$

D'ailleurs la congruence

$$A\frac{p}{q^\alpha} \equiv 1 \pmod{q^\alpha},$$

ou, ce qui revient au même, la congruence

$$Ar^\beta s^\gamma \ldots \equiv 1 \pmod{q^\alpha},$$

donne

$$\left(\frac{A}{q^\alpha}\right) = \left(\frac{r^\beta}{q^\alpha}\right)\left(\frac{s^\gamma}{q^\alpha}\right)\cdots.$$

De même,

$$\left(\frac{B}{r^\beta}\right) = \left(\frac{q^\alpha}{r^\beta}\right)\left(\frac{s^\gamma}{r^\beta}\right)\cdots,$$

$$\left(\frac{C}{s^\gamma}\right) = \left(\frac{q^\alpha}{s^\gamma}\right)\left(\frac{r^\beta}{s^\gamma}\right)\cdots;$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$\left(\frac{A}{p}\right)\left(\frac{B}{p'}\right)\left(\frac{C}{p''}\right)\cdots = \left(\frac{q^\alpha}{p'}\right)\left(\frac{p'}{q^\alpha}\right)\times\left(\frac{q^\alpha}{s^\gamma}\right)\left(\frac{s^\gamma}{q^\alpha}\right)\times\left(\frac{p'}{s^\gamma}\right)\left(\frac{s^\gamma}{p'}\right)\cdots$$

$$= (-1)^{\frac{q^\alpha-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}+\frac{q^\alpha-1}{2}\cdot\frac{s^\gamma-1}{2}+\frac{p'-1}{2}\cdot\frac{s^\gamma-1}{2}+\cdots}$$

$$= (\sqrt{-1})^{2\frac{q^\alpha-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}+2\cdot\frac{q^\alpha-1}{2}\cdot\frac{s^\gamma-1}{2}+2\frac{p'-1}{2}\cdot\frac{s^\gamma-1}{2}+\cdots};$$

d'où résulte

$$F(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{q^\alpha-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}+\frac{s^\gamma-1}{2}+\cdots\right)^2}\sqrt{p},$$

ou bien

$$\text{(A)}\qquad F(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

comme pour le cas de p nombre premier.

Soit maintenant $p = 2^m.p'$ et p' impair, on fera

$$\iota^2 \equiv Ap'.\alpha^2 + 2^m.B\beta^2 \pmod{2^m.p'},$$

et il viendra

$$F(h, p) = F(Ah.2^m).F(Bh, p').$$

Pour $m = 1$, le facteur

$$F(Ah.2) = 0;$$

donc

$$F(h, p) = 0.$$

Pour $m = 2n$, la congruence

$$Ap' \equiv 1 \pmod{2^{2n}}$$

donne

$$A \equiv p' \pmod 4; \quad \text{d'où} \quad Ah \equiv hp' \pmod 4.$$

De même, la congruence

$$2^{2n}B \equiv 1 \pmod{p'}$$

donne

$$\left(\frac{B}{p'}\right) = 1, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{Bh}{p'}\right) = \left(\frac{h}{p'}\right).$$

d'où la formule

$$(B)\quad F(h, 2^{2n}p') = \left(\frac{h}{p'}\right)\left[1 + (-1)^{\frac{hp'-1}{2}}\sqrt{-1}\right](\sqrt{-1})^{\left(\frac{p'-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}$$

Pour $m = 2n + 1$, la congruence

$$Ap' = 1 \pmod{2^{2n+1}},$$

où $n > 1$, donne

$$A \equiv p' \pmod{8}, \quad \text{d'où} \quad Ah = hp' \pmod{8}$$

De même, la congruence

$$2^{2n+1}B = 1 \pmod{p'}$$

donne

$$\left(\frac{B}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{Bh}{p'}\right) = \left(\frac{2h}{p'}\right),$$

on aura donc

$$(C)\quad F(h, 2^{2n+1}p') = (-1)^{\frac{h^2-1}{8}}\left(\frac{h}{p'}\right)\left[1 + (-1)^{\frac{hp'-1}{2}}\sqrt{-1}\right](\sqrt{-1})^{\left(\frac{p'-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Les trois formules (A), (B), (C) donnent immédiatement tous les cas particuliers énoncés au commencement de ce paragraphe.

Comme le calcul des symboles $\left(\frac{h}{p}\right)$, $\left(\frac{h}{p'}\right)$ est très-court, on a, pour déterminer le signe des sommes S et C, un moyen plus court encore que celui qui se tire de l'algorithme de M. Gauss (*Sur la sommation de quelques séries*, tome V de ce Journal). Je vais rappeler ici cette règle et la comparer à la précédente. Cette comparaison, qui conduit à une démonstration de la loi de réciprocité (la quatrième de M. Gauss), fait voir encore comment, connaissant $\varphi(h, p)$, on peut trouver $\left(\frac{h}{p}\right)$.

Autre règle pour le signe des sommes S *et* C.

Soient h et p deux nombres premiers entre eux; représentons par $e\left(\frac{kh}{p}\right)$ l'entier immédiatement au-dessous de la fraction $\frac{kh}{p}$; posons $p' = e\left(\frac{p}{2}\right)$, savoir, $p' = \frac{p-1}{2}$ pour p impair, et $p' = \frac{p}{2}$ pour p pair.

Faisons, de plus,

$$\varphi(h, p) = e\left(\frac{h}{p}\right) + e\left(\frac{2h}{p}\right) + e\left(\frac{3h}{p}\right) + \ldots + e\left(\frac{p'h}{p}\right),$$

et

$$(h, p) = (-1)^{\varphi(h, p)}.$$

Le signe de (h, p) donnera celui des sommes S et C au moyen des formules suivantes :

1°. p impair,

$$(A') \qquad F(h, p) = (-1)^{(h+1)\frac{p^2-1}{8}}(h, p)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p};$$

2°. p double d'un impair,

$$F(h, p) = 0;$$

3°. p divisible par 4, $p = 4p'$ et p' impair,

$$(B') \qquad F(h, p) = (h, 2p')\left[(-1)^{\frac{h-1}{2}} + \sqrt{-1}\right]\sqrt{p};$$

4°. p divisible par 4, $p = 4p'$ et p' pair,

$$(C') \qquad F(h, p) = (h, 2p')\left[1 + (-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{p}.$$

La comparaison des formules (A) et (A') donne

$$(a) \qquad (-1)^{(h+1)\frac{p^2-1}{8}}(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right).$$

Pour h impair,

$$\left(\frac{h}{p}\right) = (h, p);$$

c'est la règle donnée plus haut.

La comparaison des formules (B) et (B') donne, à cause de $p = 4p'$ et $p' = 4q \pm 1$,

$$(b) \qquad \begin{cases} (h, 2p') = (-1)^{\frac{h-1}{2}}\left(\frac{h}{p'}\right), & \text{pour } p' = 4q + 1, \\ (h, 2p') = \left(\frac{h}{p'}\right), & \text{pour } p' = 4q - 1. \end{cases}$$

La comparaison des formules (C) et (C'), pour $\frac{p}{4} = 2^{2n} p_1$, ou bien $p = 2^{2n+2} p_1$, donne

$$(c)\quad \begin{cases} (h, 2^{2n+1} p_1) = \left(\frac{h}{p_1}\right), & \text{pour } p_1 = 4q + 1, \\ (h, 2^{2n+1} p_1) = (-1)^{\frac{h-1}{2}} \left(\frac{h}{p_1}\right), & \text{pour } p_1 = 4q - 1. \end{cases}$$

Enfin, la comparaison des formules (C) et (C'), pour le cas de $\frac{p}{4} = 2^{2n-1} p_1$, donne

$$(d)\quad \begin{cases} (h, 2^{2n} p_1) = (-1)^{\frac{h^2-1}{8}} \left(\frac{h}{p}\right), & \text{pour } p_1 = 4q + 1, \\ (h, 2^{2n} p_1) = (-1)^{\frac{(h-1)(h-3)}{8}} \left(\frac{h}{p}\right), & \text{pour } p_1 = 4q - 1. \end{cases}$$

On voit donc que si l'on suppose $p = 2^m p_1$ et p_1 impair, les formules (a), (b), (c), (d) feront, dans tous les cas, connaître (h, p) au moyen de $\left(\frac{h}{p_1}\right)$.

Sur les sommes $\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$.

Ces sommes se déduisent très-facilement des sommes S et C. Voici les résultats pour p impair, car elles sont nulles pour p pair. Le nombre h est premier à p:

$$p = 4q + 1, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{h}{p}\right) \sin q \frac{h\pi}{p} \cdot \sqrt{p},$$

$$\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{h}{p}\right) \cos q \frac{h\pi}{p} \cdot \sqrt{p};$$

$$p = 4q - 1, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{h}{p}\right) \cos q \frac{h\pi}{p} \cdot \sqrt{p},$$

$$\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}} \left(\frac{h}{p}\right) \sin q \frac{h\pi}{p} \cdot \sqrt{p}.$$

Pour démontrer ces formules, il suffit de calculer

$$S_1 = \sum \left(\cos i^2 \frac{2h\pi}{8p} + \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}\right).$$

Soient d'abord p pair et h impair, on reconnaît de suite que la partie de S_1, où $i = 2k$, a la même valeur que la somme entière S; et comme l'autre partie, où $i = 2k+1$ et $i^2 = 4(k^2+k)+1$, revient à

$$4\left(\cos\frac{2h\pi}{8p} + \sin\frac{2h\pi}{8p}\sqrt{-1}\right)\sum\left(\cos\frac{k^2+k}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} + \sin\frac{k^2+k}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

les sommes en question seront nulles.

Pour p impair et h impair, la partie de la somme S_1, où $i = 2k$, se réduisant à

$$\sum\left(\cos k^2\frac{2h\pi}{2p} + \sin k^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}\right),$$

sera nulle, l'autre partie devra donc être égalée à S_1. Mais la décomposition en facteurs donne

$$S_1 = 4\left(\cos\frac{2ph\pi}{8} + \sin\frac{2ph\pi}{8}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{2h}{p}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p};$$

d'où, par la division,

$$\sum\left(\cos\frac{k^2+k}{2} + \sin\frac{k^2+k}{2}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \left(\frac{2h}{p}\right)\left(\cos\frac{p^2-1}{4}\frac{h\pi}{p} + \sin\frac{p^2-1}{4}\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right)(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p};$$

savoir, pour $p = 4q+1$,

$$(-1)^{qh}\left(\frac{2h}{p}\right)\left(\cos q\frac{h\pi}{p} + \sin q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right)\sqrt{p};$$

et, pour $p = 4q-1$,

$$(-1)^{qh}\left(\frac{2h}{p}\right)\left(\sin q\frac{h\pi}{p} + \cos q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right)\sqrt{p}.$$

Mais comme h est impair,

$$(-1)^{qh} = (-1)^{q} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{p}\right),$$

le facteur $(-1)^{qh}\left(\frac{2h}{p}\right)$ se réduira à $\left(\frac{h}{p}\right)$.

Pour h pair, on posera $h = p - h'$, d'où h' impair; alors

$$\frac{2h\pi}{p} = 2\pi - \frac{2h'\pi}{p}.$$

Il faudra donc changer, dans le résultat, h en $-h'$; mais

$$\left(\frac{-h'}{p}\right) = \left(\frac{h-p}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) \quad \text{et} \quad q\frac{-h'\pi}{p} = q\frac{(h-p)\pi}{p} = q\frac{h\pi}{p} - q\pi,$$

on aura donc

$$\sin q\frac{-h'\pi}{p} = (-1)^q \sin q\frac{h\pi}{p}, \quad \cos q\frac{-h'\pi}{p} = (-1)^q \cos q\frac{h\pi}{p}.$$

comme h est pair,

$$(-1)^q = (-1)^{q(h+1)} = (-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}},$$

d'où la formule donnée plus haut.

Si l'on remplace $(-1)^{h+1 \cdot \frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{h}{p}\right)$ par (h, p), on aura les valeurs données dans le Mémoire cité plus haut (tome V de ce Journal, page 52).

Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier;

PAR M. J.-A. SERRET.

Si l'on développe en fraction continue la racine carrée d'un nombre entier non carré, et que l'on forme la suite des fractions convergentes, il y aura toujours une relation simple et uniforme entre les deux fractions qui répondent au dernier quotient, dans les périodes de rangs n et $2n$. Je ne sache pas que cette relation soit connue; aussi ai-je cru utile de l'indiquer en quelques mots.

Soient A un nombre entier non carré, a la racine du plus grand carré qui y est contenu, $\frac{P_n}{Q_n}$ ou x_n la fraction convergente qui répond au dernier quotient dans la période de rang n, lequel est, comme on sait, égal à $2a$, et enfin $\frac{P'_n}{Q'_n}$ la fraction convergente qui précède $\frac{P_n}{Q_n}$; on aura évidemment

$$\sqrt{A} = \frac{(a+\sqrt{A})P_n + P'_n}{(a+\sqrt{A})Q_n + Q'_n},$$

d'où l'on déduit les valeurs connues de P'_n et de Q'_n, savoir :

$$P'_n = AQ_n - aP_n,$$
$$Q'_n = P_n - aQ_n.$$

Cela posé, la fraction convergente qui suit $\frac{P_n}{Q_n}$ a pour valeur

$$\frac{2aP_n + P'_n}{2aQ_n + Q'_n}$$

et l'on en déduira la valeur de $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ ou x_{2n}, en remplaçant le quotient

$2a$ par $a + \frac{P_n}{Q_n}$; on aura donc

$$x_{2n} = \frac{\left(a + \frac{P_n}{Q_n}\right) P_n + P}{\left(a + \frac{P_n}{Q_n}\right) Q_n + Q},$$

ou, en mettant au lieu de P_n et Q_n leurs valeurs,

$$x_{2n} = \frac{P_n^2 + AQ_n^2}{2 P_n Q_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}.$$

On arrive ainsi à ce résultat très-simple, que la fraction x_{2n} est la moyenne arithmétique des valeurs x_n et $\frac{A}{x_n}$. Il est assez remarquable que cette quantité x_{2n} soit précisément celle que donne la méthode d'approximation de Newton, lorsqu'on prend x_n pour première valeur approchée. Cette méthode donne, en effet, pour seconde approximation,

$$x_n + \frac{A - x_n^2}{2 x_n} \quad \text{ou} \quad \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}.$$

Les fractions convergentes x_n qui répondent au dernier quotient dans les périodes successives ne sont pas toujours les seules jouissant de cette propriété; il peut arriver, en effet, qu'en partant d'une fraction convergente quelconque $\frac{P}{Q}$, la méthode de Newton en fournisse une seconde. Soient, en effet, P_1 et Q_1 les quotients des nombres $P^2 - AQ^2$ et $2PQ$ par leur plus grand commun diviseur D, le résultat fourni par la méthode de Newton sera

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P^2 + AQ^2}{2PQ},$$

et l'on a

$$P_1 = \frac{P^2 + AQ^2}{D}, \quad Q_1 = \frac{2PQ}{D},$$

d'où

$$P_1^2 - AQ_1^2 = \left(\frac{P^2 - AQ^2}{D}\right)^2.$$

Or on sait que $\frac{P_1}{Q_1}$ sera toujours l'une des fractions convergentes vers $\sqrt{A}$, si l'on a

$$P_1^2 - AQ_1^2 < \sqrt{A},$$

ce qui exige que

$$\pm (P^2 - AQ^2) < D\sqrt[4]{A}.$$

Cette condition sera toujours remplie, si $\frac{P}{Q}$ est l'une des fractions x_n, car, dans ce cas, $P^2 - AQ^2 = \pm 1$; mais il est évident qu'elle peut l'être aussi dans beaucoup d'autres cas.

En particulier, si l'on applique la méthode de Newton à l'une quelconque des fractions convergentes vers $\sqrt{39}$, on obtiendra une seconde fraction convergente.

FIN DU DOUZIÈME VOLUME.

Q
Thur of Math
J. G. S. Hand Phres of Appl
J. M.
Dept of Maths
York University

QA
1
J684
t.1

Journal de mathématiques
pures et appliquées

Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY